Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 5, ejercicios de cálculo diferencial, curso 2010–2011.

1. Calcular las siguientes derivadas:

a) $f'(1)$ siendo $f(x) = (x^2+1)^3$

b) $f'(1)$ siendo $f(x) = e^{x^2} - 1$

c) $f''(1)$ siendo $f(x) = \ln(x^2+1)$

d) $f''(1)$ siendo $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - 1$

e) $f'''(0)$ siendo $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

f) $f'(1)$ siendo $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

g) $f''(0)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$

h) $f''(0)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}$

Solución:

a) $f'(x) = 3(x^2+1)^{3-1}(2x) = 6x(x^2+1)^2 \Rightarrow f'(1) = 6(1+1)^2 = 24$

b) $f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2e$

c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{1+1} = 1$

d) $f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 + 12ax^2 + 6bx \Rightarrow f''(1) = 20 + 12a + 6b$

e) $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{(x-1)^4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{12}{(-1)^4} = 12$

f) $f'(x) = -xe^{-x}(x-2) \Rightarrow f'(1) = -e^{-1}(1-2) = e^{-1}$

g) $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}\left(x^2+4x+1\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{6}{(2)^3} = \frac{3}{4}$

h) $f'(x) = \frac{x}{(a-x)^2}(x-2a) \Rightarrow f''(x) = -2\frac{a^2}{(a-x)^3} \Rightarrow f''(0) = -2\frac{a^2}{(a)^3} = -\frac{2}{a}$

2. Hallar el valor del parámetro real a sabiendo que la función $f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln x$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$. Clasificar dicho extremo.

Solución:

Comenzamos calculando la primera derivada de la función dada, que es:

$$f'(x) = 2 + 2ax - 4\frac{1}{x}.$$

Según el enunciado la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, por lo que sustituimos dicho punto en la primera derivada y la igualamos a cero:

$$0 = f'(1) = 2 + 2a - 4 = 2(a-1) \Rightarrow a = 1.$$

Ahora bien, si $a = 1$, entonces $f(x) = 2x + x^2 - 4\ln x$ y $f'(x) = 2 + 2x - 4\frac{1}{x}$. Así:

$$f'(x) = 2 + 2x - 4\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -2.$$

Como $x = -2$ no pertenece al dominio de la función dada, ya que la función logarítmica está definida solamente para reales positivos, entonces $x = -2$ no es extremo. Para clasificar el extremo en el punto $x = 1$, tendremos que calcular la segunda derivada y evaluarla en dicho punto.

$$f''(x) = 2 + 4\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow \text{la función tiene un mínimo en } x = 1.$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, se pide:

a) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcular sus puntos de inflexión.

c) Esbozar su gráfica.

(Junio 2001, opción B)

Solución:

a) Calculamos la primera derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{1}{2}2x - 2 = x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -2.$$

A continuación, para estudiar el tipo de extremo relativo, hallamos la segunda derivada y la evaluamos en dichos puntos.

$$f''(x) = 2x + 1 \Rightarrow f''(1) = 2 + 1 = 3 > 0 \text{ y } f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0.$$

Por lo tanto, la función tendrá un mínimo en $x = 1$ y un máximo en $x = -2$. Sustituyendo dichos valores de x en la función dada obtendremos la coordenada y correspondiente.

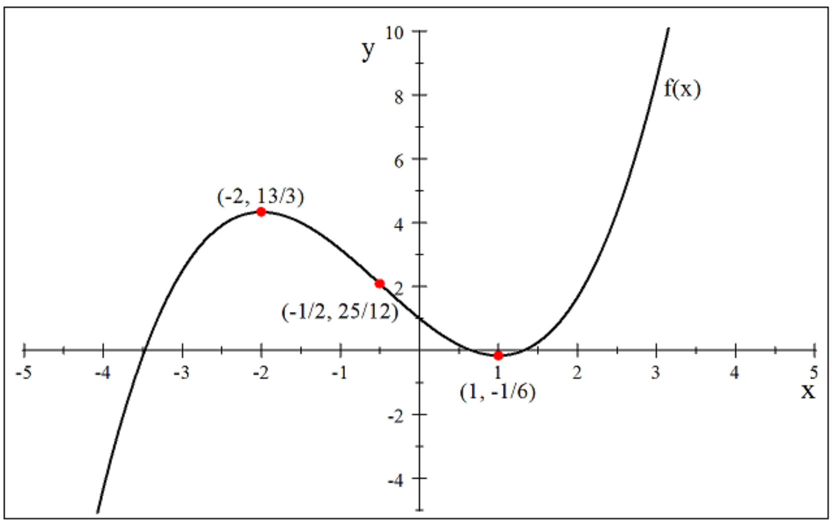
$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{6} \text{ y } f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + 1 = \frac{13}{3}.$$

Luego, el punto $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ es un mínimo y el punto $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ es un máximo.

b) Para calcular los puntos de inflexión debemos igualar la segunda derivada a cero. En el apartado anterior hallamos la segunda derivada: $f''(x) = 2x + 1$. Entonces

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

c) La gráfica de la función dada es:



4. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto $(0, 0)$.
- Tiene mínimo local en $(1, -1)$.

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hallar el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

(Modelo 2001, opción B)

Solución:

a) La primera derivada de la función dada es $f'(x) = 3ax^2 + b$. Ahora, como la función pasa por el punto $(0, 0)$, entonces $0 = f(0) = c$. Y como tiene un tiene mínimo local en $(1, -1)$, eso significa que la función pasa por dicho punto, luego $-1 = f(1) = a + b + c$. Por otra parte, por ser mínimo la derivada en dicho punto es igual a cero, es decir, $0 = f'(1) = 3a + b$. Luego:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} c & = & 0 \\ a + b + c & = & -1 \\ 3a + b & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ y $c = 0$, por lo que la función es

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x\left(x^2 - 3\right).$$

b) Aún no podemos resolverlo. Ver hoja de ejercicios del capítulo 6.

5. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcr} 2x + 24 & \text{si} & x \leq -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} & -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Representar graficamente la función $f(x)$.

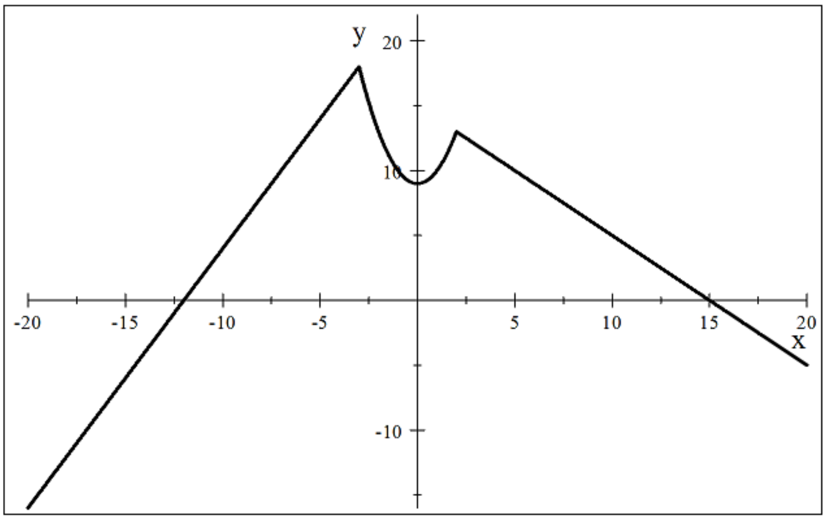
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

(Septiembre 2009, opción A)

Solución:

a) La representación gráfica es:



b) Para calcular la ecuación de la recta tangente pedida, seguimos los pasos vistos en el capítulo teórico:

- Calculamos $f(x_0)$ sustituyendo el valor de $x_0 = 1$ en la función dada: $f(x_0) = f(1) = 1^2 + 9 = 10$.

- Para obtener la pendiente b, hacemos la derivada de la función y sustituimos el valor de $x_0 = 1$. Así : $f'(x) = 2x$ y $b = f'(x_0) = f'(1) = 2$.

- La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_0) = b(x - x_0) \Rightarrow y - 10 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 8$.

c) Aún no podemos resolverlo. Ver hoja de ejercicios del capítulo 6.