Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 2, sistemas de ecuaciones lineales, curso 2010–2011.

1. Discuta y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{c} x+2y-z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x+2y+z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 \neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A) \geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que es igual a cero, por tanto, $rg(A)=2$. A continuación hallamos el rango de la matriz ampliada.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ entonces } rg(A|b)=3.$$

Por lo que el sistema es incompatible, ya que $rg(A) \neq rg(A|b)$.

b) La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero (el mismo que para el anterior sistema)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 \neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A) \geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que es igual a 4, por tanto, $rg(A)=3$. **Siempre que la matriz de coeficientes sea cuadrada y su rango coincida con el número de incógnitas, podremos afirmar que la matriz ampliada tiene el mismo rango**, ya que la matriz ampliada tiene un menor de orden n distinto de cero que es la propia matriz de coeficientes. Por lo que, en este caso, $rg(A|b)=3$. Como $rg(A)=rg(A|b)=n$ (número de incógnitas) entonces el sistema es compatible determinado (SCD.) Para calcular su solución, observe que es un sistema de Cramer, ya que la matriz de coeficientes es cuadrada y su determinante es distinto de cero. Luego podremos calcular directamente su inversa, resolverlo mediante la regla de Cramer o mediante el método de Gauss.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución del sistema es:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ x - y \qquad &= 2 \\ y + z \ &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución: La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A) \geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que es igual a cero, por tanto, $rg(A) = 2$. A continuación hallamos el rango de la matriz ampliada.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ entonces } rg(A|b) = 2.$$

Por lo que el sistema es compatible indeterminado (SCI), ya que $rg(A) = rg(A|b) < n$.

Fijándonos en el menor de orden dos distinto de cero definimos el siguiente sistema de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x - y \ &= 2 \\ y \ &= -1 - z \end{aligned}\right\}$$

En este caso lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1-z & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1 - z, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1-z \end{vmatrix}}{1} = -1 - z.$$

3. Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} x + y \qquad &= a \\ ax + y + z \ &= 2a \\ x + y + z \ &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución: La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & a \\ a & 1 & 1 & | & 2a \\ 1 & 1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A) \geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que depende del parámetro a.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Entonces:

- Si $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$.

- Si $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$.

A continuación estudiamos el rango de la matriz ampliada, según los valores de a:

- Si $a = 1 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

entonces $rg(A) = 2 \neq rg(A|b) = 3 \Rightarrow$sistema incompatible.

- Si $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A|b) \Rightarrow$sistema compatible determinado.

Para calcular su solución, observe que si $a \neq 1$ entonces es un sistema de Cramer, ya que la matriz de coeficientes es cuadrada y su determinante es distinto de cero. Luego podremos calcular directamente su inversa, resolverlo mediante la regla de Cramer o mediante el método de Gauss.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1-a & a-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & -1 \\ -(1-a) & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución del sistema es:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & -1 \\ -(1-a) & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 5-2a \\ -a^2+3a-5 \\ a^2-6a+5 \end{pmatrix}.$$

4. En una fábrica de pastas disponen de 51Kg de harina y 42Kg de huevo en polvo. Si fabrican tres tipos de pastas y la combinación de ingredientes en cada lote es la siguiente:

	Harina	Huevo
Tipo 1	5	2
Tipo 2	3	3
Tipo 3	1	4

¿Cuántos lotes de cada tipo se pueden obtener?

Solución: Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y+z=51 \\ 2x+3y+4z=42 \end{array}\right\}$$

Claramente no es un sistema de Cramer ya que la matriz de coeficientes no es cuadrada. Sin embargo, el siguiente sistema sí es de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=51-z \\ 2x+3y=42-4z \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es cuadrada y con determinante distinto de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9.$$

Resolviéndolo mediante la regla de Cramer obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 51-z & 3 \\ 42-4z & 3 \end{vmatrix}}{9}=\frac{27+9z}{9}=3+z\geq 0 \Leftrightarrow z\geq -3. \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 51-z \\ 2 & 42-4z \end{vmatrix}}{9}=\frac{108-18z}{9}=12-2z\geq 0 \Leftrightarrow z\leq 6. \end{aligned}$$

Como las variables indican el número de lotes por cada tipo, ninguna puede ser negativa, por tanto:

$$x=3+z, \quad y=12-2z \ \text{ y } \ 0\leq z\leq 6.$$

5. Estúdiese las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ ax+y-z=a \\ 3x+ay+z=a \end{array}\right\}$$

Solución: La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ a & 1 & -1 & | & a \\ 3 & a & 1 & | & a \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A)\geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que depende del parámetro a.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix}=2a^2-8=0 \Leftrightarrow a=\pm 2.$$

Entonces:

- Si $a=\pm 2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)=2$.

- Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$.

A continuación estudiamos el rango de la matriz ampliada, según los valores de a:

- Si $a = 2$ entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

luego $rg(A) = 2 = rg(A|b) < 3 \Rightarrow$sistema compatible indeterminado.

- Si $a = -2$ entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 16,$$

luego $rg(A) = 2 \neq rg(A|b) = 3 \Rightarrow$sistema incompatible.

- Si $a \neq \pm 2$, $rg(A) = 3 = rg(A|b) \Rightarrow$sistema compatible determinado.

6. Se considera el siguiente sistema lineal, dependiente del parámetro a

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3a \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) Estudiar el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

(examen del curso 2006/07, opción A).

Solución:

a) La matriz de coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A|b = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 4 & 1 & | & 3a \\ 2 & -5 & a & | & -2 \end{pmatrix}.$$

Como existe un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

podemos afirmar que el rango de A es mayor o igual que 2, es decir, $rg(A) \geq 2$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes vemos que depende del parámetro a.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13\,(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Entonces:

- Si $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$.

- Si $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$.

A continuación estudiamos el rango de la matriz ampliada, en este caso es suficiente con calcular un menor de orden tres, concretamente el formado por las columnas del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3a \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 39\,(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Entonces:

- Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A|b) < 3 \Rightarrow$sistema compatible indeterminado.

- Si $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A|b) = n \Rightarrow$sistema compatible determinado.

b) en este apartado resolvemos el sistema para $a = 1$. Para este valor del parámetro el sistema no es de Cramer, sin embargo el siguiente sistema sí que lo es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 - 2z \\ x + 4y = 3 - z \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es cuadrada y con determinante distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Resolviéndolo mediante la regla de Cramer obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 3-z & 4 \end{vmatrix}}{13} = \frac{7-9z}{13}. \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2z \\ 1 & 3-z \end{vmatrix}}{13} = \frac{8-z}{13}. \end{aligned}$$