Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 3, ejercicios de programación lineal, curso 2010–2011.

1. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represente gráficamente el recinto definido.

c) Obtenga el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

(examen del curso 2000/01, opción B).

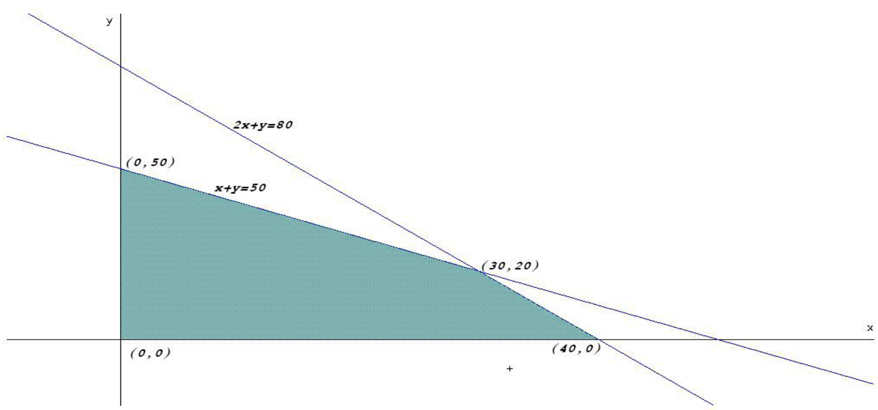
Solución:

a) LLamamos x al número de collares e y al número de pulseras. Las restricciones son:

$$\begin{cases} x & + & y & \leq & 50 \\ 2x & + & y & \leq & 80 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $z = 5x + 4y$.

b) El recinto será el siguiente:



c) La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} z(0,50) &= 200 \\ z(30,20) &= 230 \\ z(40,0) &= 200 \end{aligned}$$

Por lo que el artesano tiene que fabricar 30 collares y 20 pulseras para obtener el mx́imo beneficio, que asciende a 230 euros.

2. Un fabricante de productos químicos vende fertilizantes, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo, respectivamente. Su producción máxima es de una tonelada de cada fertilizante y su mínimo operativo es de 100 kilogramos de cada fertilizante. Si su producción total es de 1700 kilogramos, cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcular dichos ingresos máximos.

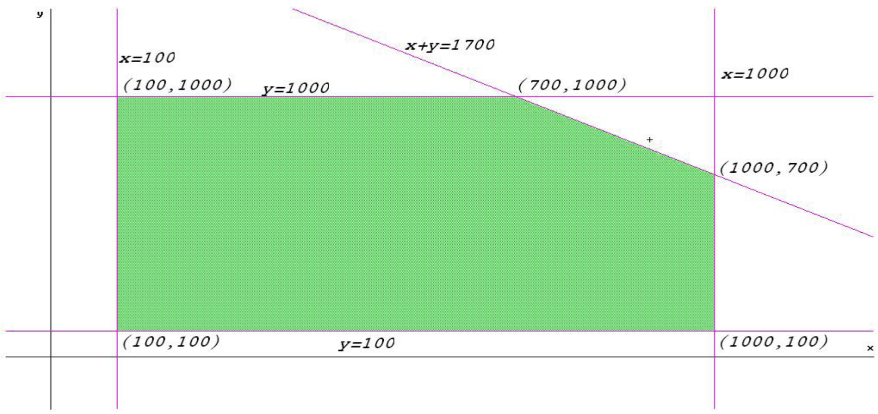
(examen del curso 2001/02, opción A).

Solución: Sea x la cantidad en kg de fertilizante de A e y la cantidad en kg de fertilizante de B. Se trata de resolver el problema de programación lineal:

$$\max z = 40x + 20y$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 100 & \leq & x & \leq & 1000 \\ 100 & \leq & y & \leq & 1000 \\ x & + & y & \leq & 1700 \end{array}\right.$$

La región factible es



La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{array}{rcl} z(100,100) & = & 6000 \\ z(100,1000) & = & 24000 \\ z(1000,100) & = & 42000 \\ z(700,1000) & = & 48000 \\ z(1000,700) & = & 54000 \end{array}$$

El máximo beneficio se dará con una producción de 1 tonelada de fertilizante A y 700 kg de fertilizante B. El beneficio máximo que se producirá con estas cantidades será de 54000 euros.

3. Considerar el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{minimizar } z = -3x - 2y$$

$$\text{sujeto a } \left\{\begin{array}{ccccc} -2x & + & y & \leq & 2 \\ x & - & 2y & \leq & 2 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Se pide:

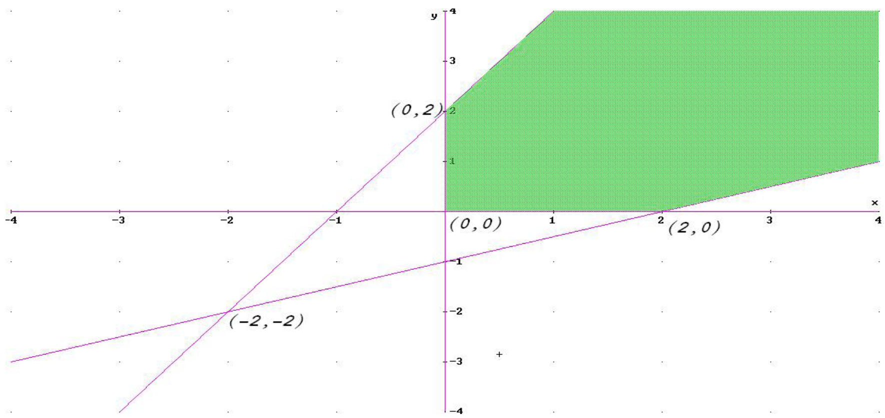
a) Mediante la resolución gráfica del problema, discutir si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

b) Si se añade la restricción $x + y \geq 10$ discutir si existe solución óptima y en caso afirmativo calcularla.

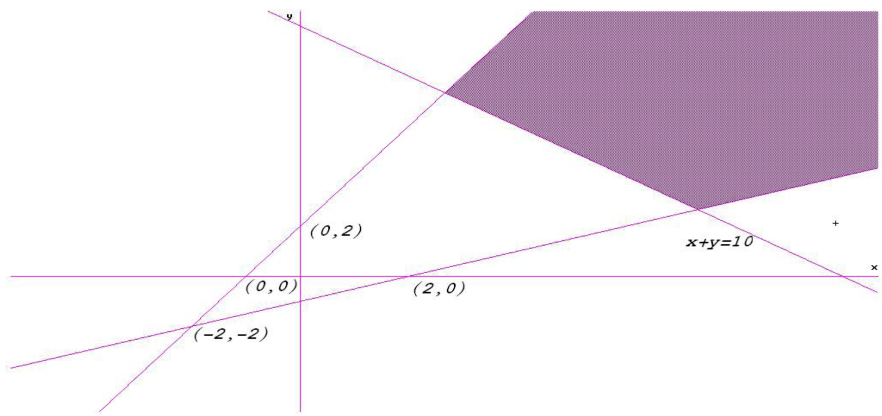
(examen del curso 2001/02, opción A).

Solución:

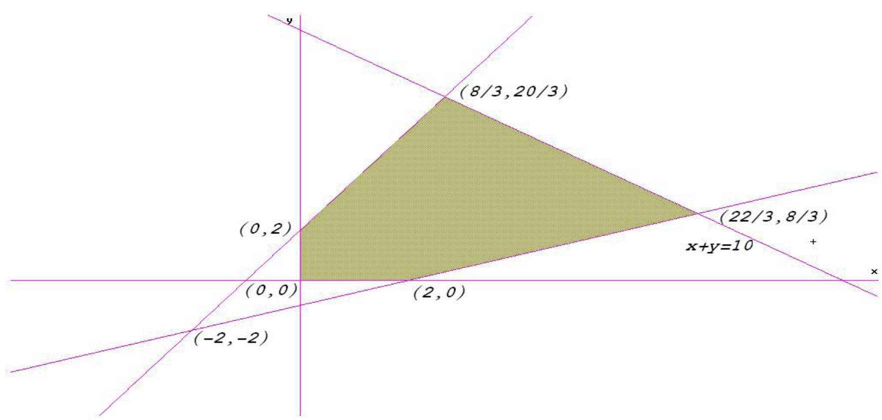
a) Minimizar la función objetivo dada es equivalente a maximizar $z = 3x + 2y$. Observando la región factible, vemos que el máximo no puede obtenerse.



b) Cuando se introduce la restricción $x + y \geq 10$ la situación no mejora, nos encontramos como antes sin solución factible.



Sin embargo, si consideramos $x + y \leq 10$ el problema tiene solución. En este caso, la región factible es



La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} z(0,0) &= 0 \\ z(2,0) &= 6 \\ z(0,2) &= 4 \\ z(\frac{8}{3},\frac{20}{3}) &= \frac{64}{3} \\ z(\frac{22}{3},\frac{8}{3}) &= \frac{82}{3} \end{aligned}$$

Luego los valores buscados que hacen máxima la función son $x = \frac{22}{3}$ e $y = \frac{8}{3}$.

4. Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 33000 euros para G1 y en 35000 euros para G2. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

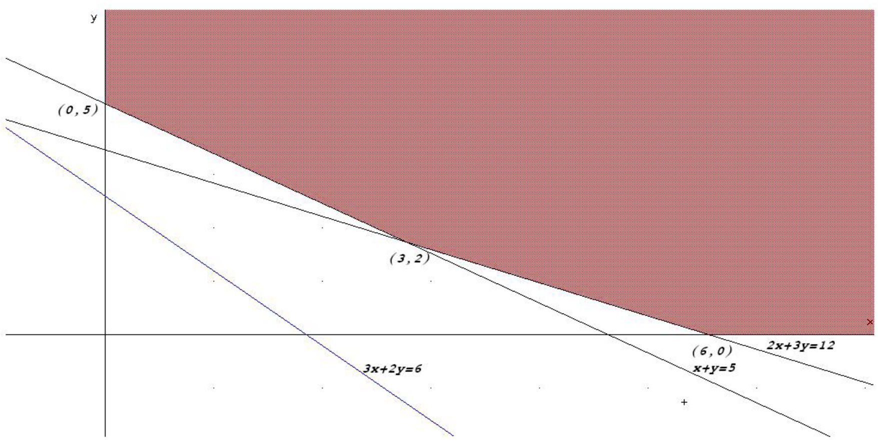
(examen del curso 2001/02, opción B).

Solución: Sea x el número de semanas que trabaja el grupo G1 e y el número de semanas que trabaja el grupo G2. Entonces el problema que debemos resolver es el siguiente:

$$\text{minimizar } z = 33000x + 35000y$$

$$\text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{cccc} 3x & + & 2y & \geq & 6 \\ 2x & + & 3y & \geq & 12 \\ x & + & y & \geq & 5 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

La región factible es



La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{array}{rcl} z(0,5) & = & 175000 \\ z(6,0) & = & 189000 \\ z(3,2) & = & 169000 \end{array}$$

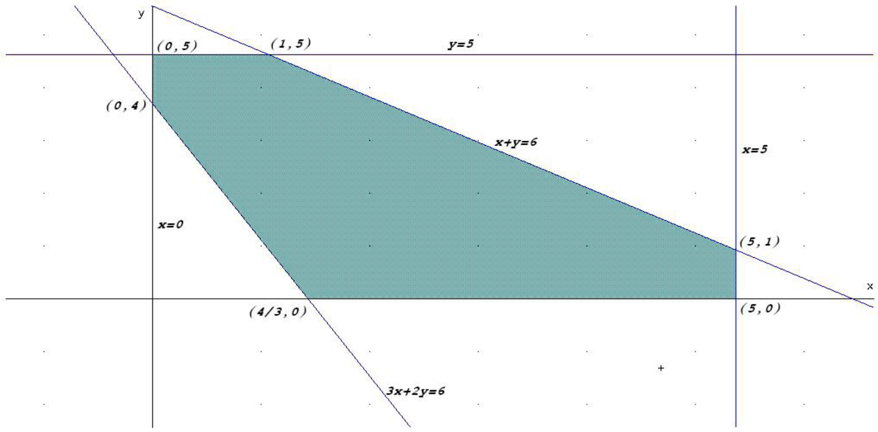
El coste mínimo viene dado cuando el grupo G1 trabaja 3 semanas y el grupo G2 2 semanas, con un coste de 169000 euros.

5. Determinar los valores máximos y mínimos de la función $z = 5x + 3y$ sujeta a las restricciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & y & \geq & 4 \\ x & + & y & \leq & 6 \\ 0 & \leq & x & \leq & 5 \\ 0 & \leq & y & \leq & 5 \end{array} \right.$$

(examen del curso 2002/03, opción B).

Solución: La región factible es



La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} z(0,5) &= 15 \\ z(0,4) &= 12 \\ z(5,0) &= 25 \\ z(5,1) &= 28 \\ z(1,5) &= 20 \\ z(4/3,0) &= 20/3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo se obtiene en el punto $(5,1)$ con un valor de 28 y el mínimo se obtiene en el punto $(4/3,0)$ con un valor de $20/3$.