Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 4, ejercicios de límites y continuidad, curso 2010–2011.

1. Estudiar el límite de la función siguiente: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^x & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} e^x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Exite el límite de la función en } x = 0 \text{ y vale } 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} e^x = e \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{No exite el límite de la función en } x = 1.$$

2. Estudiar la continuidad de la función del ejercicio anterior.

Solución:

El dominio de la función dada es el conjunto de los números reales, $\Re$. Además, hemos visto en el ejercicio anterior, que existe el límite de la función en $x = 0$ y que $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$. Por lo tanto, se verifican los apartados a) y b) de la definición de continuidad. Es fácil ver que $f(0) = \cos 0 = 1$. Luego, $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, es decir, la función es continua en $x = 0$. Sin embargo, por el ejercicio anterior sabemos que no existe el límite de la función en $x = 1$, por lo tanto, la función es continua en todo su dominio excepto en el punto $x = 1$.

3. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}.$$

Se pide:

a) Determinar su dominio de definición.

b) Obtener sus asíntotas.

(examen de Junio 2004, opción B).

Solución:

a) Como la función es una raz cuadrada para que el dominio exista el radicando ha de ser positivo, es decir,

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)} \geq 0 \quad .$$

Estudiando el signo de los elementos del numerador y del denominador resumidos en la siguiente tabla, es fácil hallar el dominio de la función.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $(-\infty, 2] \cup (-1, 1) \cup [2, \infty)$.

b) Para obtener sus asíntotas recordemos lo visto en el apartado 4.4 del caítulo de límites y continuidad. Así, las asíntotas *verticales* son:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{-3}{0}} = +\infty \, ,$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{-3}{0}} = +\infty \, .$$

Luego, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. La función dada tiene una asíntota *horizontal* en $y = 1$, ya que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = 1 \quad .$$

No hay asíntotas *oblicuas* puesto que la función dada tiene una asíntota horizontal.

4. Se considera la función

$$f(x) = 2x + 3x^2 - 4\ln x \quad ,$$

se pide:

a) Estudiar el dominio de la función.

b) Hallar las asíntotas.

Solución:

a) Como la función logaritmo neperiano existe solamente para valores de x positivos, entonces el dominio de la función dada es $[0, +\infty)$.

b) La función tiene una asíntota *vertical* en $x = 0$, pues

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (2x + 3x^2 - 4\ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty \quad .$$

Como

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty \quad ,$$

no tiene asíntotas *horizontales*. Y tampoco tiene asíntotas *oblicuas* ya que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x + 3x^2 - 4\ln x}{x} = \infty \quad .$$

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} \quad .$$

Se pide:

a) Estudiar el dominio de la función.

b) Estudiar su continuidad.

c) Hallar las asíntotas.

(examen de Septiembre 2003, opción B).

Solución:

a) Para obtener el dominio de la función tenemos que estudiar cuando se anula el denominador, es decir, para qu valores de x se cumple $2x^2 + 2x - 12 = 0$. Facilmente comprobamos que $2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 0$ cuando

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 2, \text{ y } x = -3 \quad .$$

Por tanto, el dominio de la función es $\Re - \{-3, 2\}$.

b) Tenemos que calcular los límites de la función en los puntos $x = 2$ y $x = -3$. Como

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \longrightarrow -3} \frac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12} = \infty \quad ,$$

entonces la función tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -3$. Por lo tanto, la función es continua en todo su dominio, $\Re - \{-3, 2\}$.

c) En el apartado anterior hemos visto que $x = 2$ y $x = -3$ son asíntotas verticales. Tambin tiene una asíntota horizontal en $y = -\frac{1}{2}$, ya que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12} = -\frac{1}{2} \quad .$$

Asíntotas oblicuas no hay porque tiene horizontales.