*Nuria Torrado Robles*
*Departamento de Estadística*
*Universidad Carlos III de Madrid*

**Hoja 6, ejercicios de cálculo integral, curso 2010–2011.**

**1.** Hallar la integral de las siguientes funciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = 5a^2x^6$ | e) | $f(x) = 6x^2 + 8x + 3$ |
| b) | $f(x) = x(x+a)(x+b)$ | f) | $f(x) = x^2(a+bx^3)^2$ |
| c) | $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$ | g) | $f(x) = \dfrac{x}{a+bx}$ |
| d) | $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ | h) | $f(x) = xe^{-x^2}$ |

***Solución:***

a) $f(x) = 5a^2x^6$, entonces

$$\int f(x)dx = \int 5a^2\, x^6 dx = 5a^2 \int x^6 dx = 5a^2\, \frac{x^{6+1}}{6+1} = 5a^2 \frac{x^7}{7} + c.$$

b) $f(x) = x(x+a)(x+b)$ , entonces

$$\int f(x)dx = \int x(x+a)(x+b)dx = \int \left(ax^2 + bx^2 + x^3 + abx\right) dx = (a+b)\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ab\frac{x^2}{2} + c.$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$ , entonces

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}dx = \frac{1}{5}\int 5(5x-2)^{-1/2}dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + c.$$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)\,(x+1)}{x-1} = x+1$ , entonces $\displaystyle\int f(x)dx = \int (x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} + x + c.$

e) $f(x) = 6x^2 + 8x + 3$, entonces

$$\int f(x)dx = \int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx = 6\int x^2dx + 8\int xdx + \int 3dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 8\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x = 2x^3 + 4x^2 + 3x + c.$$

f) $f(x) = x^2(a+bx^3)^2$ , entonces

$$\int f(x)dx = \int x^2(a+bx^3)^2dx = \frac{1}{3b}\int 3bx^2(a+bx^3)^2dx = \frac{1}{3b}\frac{(a+bx^3)^3}{3} + c.$$

g) $f(x)=\dfrac{x}{a+bx}$ , entonces

$$\int f(x)dx=\int \frac{x}{a+bx}dx=\frac{1}{b}\int \frac{bx}{a+bx}dx=\frac{1}{b}\ln(a+bx)+c.$$

h) $f(x)=xe^{-x^2} \Rightarrow \displaystyle\int f(x)dx=\int x\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int -2x\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$

**2.** Hallar las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x+3)\ dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\ dx$

c) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x-2}\ dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx$

***Solución:***

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x+3)\ dx=\int_1^2 x^2dx-2\int_1^2 xdx+\int_1^2 3dx=\frac{x^3}{3}-x^2+3x\Big]_1^2$
$$=\left(\frac{2^3}{3}-2^2+3\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2+3\cdot 1\right)=\frac{7}{3}.$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\ dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\ dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)\big]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln(1^2+3)-\ln(0^2+3)\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 4-\ln 3\right).$

c) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x-2}\ dx=\int_2^6 (x-2)^{1/2}\ dx=\frac{(x-2)^{1/2+1}}{1/2+1}\Bigg]_2^6=\frac{2}{3}\,(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^6=\frac{2}{3}\left((6-2)^{\frac{3}{2}}-(2-2)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{16}{3}.$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 3x^2e^{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\,e^{x^3+1}\Big]_0^1=\frac{1}{3}\left(e^{1^3+1}-e^{0^3+1}\right)=\frac{e}{3}\,(e-1).$

**3.** Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^3-6x^2+9x$, se pide determinar:
a) Los puntos en los que la fráfica de $f$ corta a los ejes de coordenadas.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$ .
c) El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función dada y el eje OX.

(2008, opción B)

***Solución:***

a) Para calcular los puntos de corte con el eje OX tenemos que resolver la ecuación: $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0 \Leftrightarrow x(x^2-6x+9)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ y } x=3\ .$$

A continuación hallamos $f(0)=0$ y $f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0$. Luego, los puntos de cortes son: $(0,0)$ y $(3,0)$. Para calcular los puntos de corte con el eje OY consideramos $x=0$ y calculamos $f(0)=0$, por lo que el punto de corte es $(0,0)$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento los hallaremos a través de los puntos extremos de la función (ver el capítulo 5). Para ello calculamos la primera dervidad de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ y } x = 3.$$

Volvemos a derivar la función para obtener la segunda derivada y así estudiar que tipo de punto extremo es cada uno de ellos.

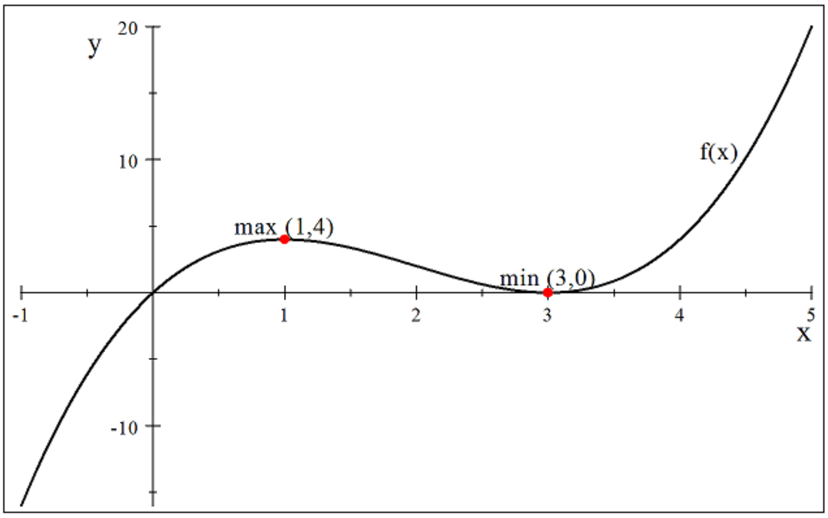
$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \;\text{ y } f''(3) = 6 > 0.$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x = 1$, es decir, en el punto $(1, 4)$ y un mínimo en $(3, 0)$. Luego, será creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$, y será decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

c) Por el primer apartado sabemos que los puntos de corte de la función con el eje OX son: $(0, 0)$ y $(3, 0)$. Luego, el área pedida es:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4}.$$

A continuación puede verse una representación gráfica de la función dada.




**4.** La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto $(0, 0)$.
- Tiene mínimo local en $(1, -1)$.

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes $a, b$ y $c$.

b) Hallar el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

(Modelo 2001, opción B)

***Solución:***

El apartado a) fue resuelto en la hoja de ejercicios 5, cálculo diferencial. Aquí resolvemos el apartado b).

Comenzamos buscando los puntos de corte de la función $g(x)$ con el eje OX en el intervalo $[3, 4]$. Así:

$$g(x) = x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2 \text{ y } x = -2.$$

Como ninguno de estos valores pertenece al intervalo $[3, 4]$, concluimos que la función $g(x)$ no tiene nungún punto de corte en dicho intervalo. Luego, el área pedida es:

$$\int_3^4 (x^3 - 4x)dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_3^4 = \frac{119}{4}.$$

**5.** Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} \quad -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Representar graficamente la función $f(x)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

(Septiembre 2009, opción A)

***Solución:***

Los apartadoa a) y b) fueron resueltos en la hoja de ejercicios 5, cálculo diferencial. Aquí resolvemos el apartado c). Comenzamos calculando los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje OX por tramos. Así:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = -12, \\ f(x) &= x^2 + 9 = 0, \text{ no tiene solución en la recta real,} \\ f(x) &= -x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 15. \end{aligned}$$

Luego, los puntos de corte son $(-12, 0)$ y $(15, 0)$. Por tanto, tendremos que calcular la siguiente integral definida:

$$\begin{aligned} \int_{-12}^{15} f(x)dx &= \int_{-12}^{-3} (2x + 24)dx + \int_{-3}^{2} (x^2 + 9)dx + \int_{2}^{15} (-x + 15)dx \\ &= \left. x^2 + 24x\right]_{-12}^{-3} + \left.\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{2} + \left.\frac{-x^2}{2} + 15x\right]_{2}^{15} \\ &= 81 + \frac{170}{3} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}. \end{aligned}$$

**6.** Se consideran las funciones reales de variable real definidas por

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x},\ x\neq 0 \ \text{ y } \ g(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4},\ x\neq 2.$$

Calcular las integrales definidas $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ y $\displaystyle\int_3^5 \left(x^2-4\right)g(x)dx$.

(2008, opción B)

***Solución:***

a) Observa que: $\dfrac{x^2+x+2}{x}=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{x}{x}+\dfrac{2}{x}=x+1+\dfrac{2}{x}$, luego:

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{x^2+x+2}{x}dx=\int_1^2\left(x+1+\frac{2}{x}\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}+x+2\ln x\right]_1^2=\frac{5}{2}+2\ln 2.$$

b) Sea $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$, $x\neq 2$, entonces:

$$\int_3^5\left(x^2-4\right)g(x)dx=\int_3^5\left(x^2+2\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+2x\right]_3^5=\frac{110}{3}.$$