Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 7, ejercicios de probabilidad, curso 2010–2011.

1. Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 2?

(Septiembre 2003, opción B)

Solución:

Definamos los sucesos $A =$"ser divisible por 2" y $B =$"ser divisible por 3". Claramente el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Y los sucesos son:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \text{ y } B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

La primera probabilidad que debemos calcular es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por la definición de los sucesos:

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ y como } A \cap B = \{6, 12, 18\}, \text{ entonces } P(A \cap B) = \frac{3}{20}.$$

Así:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}.$$

El suceso "ser divisible por 3 y no por 2" es: $A^c \cap B = \{3, 9, 15\}$, entonces $P(A^c \cap B) = \dfrac{3}{20}$.

2. Se consideran dos actividades de ocio: $A =$"ver televisión" y $B =$"visitar centros comerciales". En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0,46; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.

a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

(Septiembre 2008, opción A)

Solución:

Por el enunciado sabemos que:

$$P(A) = 0{,}46, \ \ P(B) = 0{,}33 \text{ y } P(A \cap B) = 0{,}15.$$

a) La probabilidad que nos piden es $P(A^c \cap B^c)$, y por las leyes de Morgan sabemos:

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0{,}46 + 0{,}33 - 0{,}15) = 0{,}36.$$

b) En este caso tenemos que calcular $P(A \cap B \mid A \cup B)$, utilizando la definición de la probabilidad condicionada tenemos:

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}36} = 0{,}234\,38.$$

3. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A^c \cup B^c)$ c) $P(A \mid B)$ d) $P(A^c \cap B)$

(Junio 2010, opción A)

Solución:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}8. \\ P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9. \\ P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25. \\ P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3. \end{aligned}$$

4. Un rosal no esta en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es de $0,25$. La probabilidad de no regar el rosal es de $\frac{2}{3}$. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

(2004, opción A)

Solución:

Definamos los sucesos R =“regar el rosal”, S =“secarse”. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades:

$$P(R^c) = \frac{2}{3},\ P(S \mid R) = \frac{1}{2},\ P(S^c \mid R) = \frac{1}{2} \text{ y } P(S^c \mid R^c) = \frac{1}{4}.$$

La probabilidad que debemos calcular es $P(R^c|S)$. Utilizando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(R^c \mid S) = \frac{P(S \mid R^c)P(R^c)}{P(S)}.$$

Así:

$$P(S \mid R^c) = 1 - P(S^c \mid R^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ahora para calcular $P(S)$ debemos utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(S) = P(S \mid R^c)P(R^c) + P(S \mid R)P(R) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

Entonces

$$P(R^c \mid S) = \frac{P(S \mid R^c)P(R^c)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

5. La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a $0,2$. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a $0,85$. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a $0,1$.

a) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

(2009, opción B)

Solución:

Definamos $A =$"sufrir un accidente" y $G =$"necesitar una grúa". Las probabilidades proporcionadas por el enunciado son:

$$P(A) = 0{,}2,\ P(G \mid A) = 0{,}85,\ \text{y}\ P(G \mid A^c) = 0{,}1.$$

a) Tenemos que calcular la probabilidad de necesitar una grúa, para ello debemos utilizar el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(G \mid A)P(A) + P(G \mid A^c)P(A^c) = 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}25.$$

b) En este caso, debemos utilizar el teorema de Bayes para obtener la probabilidad pedida:

$$P(A^c \mid G) = \frac{P(G \mid A^c)P(A^c)}{P(G)} = \frac{0{,}1 \cdot (1 - 0{,}2)}{0{,}25} = 0{,}32.$$