MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 6

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

CAPÍTULO 6

CÁLCULO INTEGRAL

En este capítulo, definiremos el concepto de integral de funciones de una variable. Al igual que en el tema de derivadas (capítulo 5), aprenderemos a utilizar reglas para calcular de una forma rápida y sencilla integrales, tanto indefinidas como definidas. Además, veremos una aplicación interesante de la integral definida para hallar áreas de regiones delimitadas por funciones.

6.1. INTEGRAL INDEFINIDA.

Sean dos funciones $F : \Re \longrightarrow \Re$ y $f : \Re \longrightarrow \Re$, se dice que la función F es la *integral indefinida* de f , y se denota por

$$\int f(x)dx = F(x) \ ,$$

si se verifica que $F' = f$. Recordemos que F' es la derivada primera de la función F . Se denomina *integrando* a la función f .

Debemos tener en cuenta que una función f tiene infinitas integrales, en el sentido de que las funciones $F(x) = x^2 - 5$ y $G(x) = x^2 + 24$, ambas son integrales de $f(x) = 2x$, ya que si derivamos F y G ($F'(x) = 2x = f(x)$ y $G'(x) = 2x = f(x)$) obtenemos la función f . Esto es debido a que F y G solamente difieren en una constante c, que recibe el nombre de *constante de integración*. Por tanto, la integral indefinida de f es el conjunto de todas las funciones cuya expresión se obtiene sumando a F una constante c, es decir,

$$\int f(x)dx = F(x) + c\ .$$

Ejemplo 1.

Calcular la integral indefinida de $f(x) = x^3$.
Solución:

$$\int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\ .$$

Luego, $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$. Calculando la primera derivada de $F(x)$ podremos saber si la integral es correcta.

$$F'(x) = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 = f(x).$$

Para poder calcular la integral indefinida de una función debemos aprender algunas reglas de integración, como las que se resumen en la siguiente tabla:

Suma	$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Resta	$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
Producto por una constante	$\int k \cdot g(x)dx = k \cdot \int g(x)dx$

Aunque existen diferentes métodos para hallar la integral indefinida de una función, tales como, la integración por partes, el cambio de variable, la integración de funciones racionales y la integración de funciones trigonométricas, aquí nos ocuparemos únicamente de las integrales inmediatas, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tipo	Función	Integral
Constante	$f(x) = a$	$\int a\ dx = ax + c$
Identidad	$f(x) = x$	$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c$
Potencial	$f(x) = g(x)^n \cdot g'(x)$	$\int g(x)^n \cdot g'(x)\ dx = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + c$
Exponencial	$f(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$\int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx = e^{g(x)} + c$
Logarítmica	$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + c$

Es interesante comparar esta tabla con la correspondiente a la de derivadas del capítulo 5.

Ejemplo 2.

- Tipo: Constante

Función	Integral
$f(x) = 5$	$\int 5\ dx = 5x + c$

- Tipo: Potencial

Función	Integral
$f(x) = x^3$	$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + c$
$f(x) = x\ (x^2-3)^5$	$\int x\ (x^2-3)^5 dx = \frac{1}{2} \int 2x\ (x^2-3)^5 dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2-3)^{5+1}}{5+1} + c$ $= \frac{(x^2-3)^6}{12} + c$
$f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^3}$	$\int \frac{x^2}{(x^3-1)^3} dx = \int x^2 (x^3-1)^{-3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3-1)^{-3} dx$ $= \frac{1}{3} \frac{(x^3-1)^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{(x^3-1)^{-2}}{6} = -\frac{1}{6(x^3-1)^2} + c$

- Tipo: Irracional

Función	Integral
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{1+1/3}}{1+1/3} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c$

- Tipo: Exponencial

Función	Integral
$f(x) = (2x+3) \cdot e^{x^2+3x-5}$	$\int (2x+3) \cdot e^{x^2+3x-5} dx = e^{x^2+3x-5} + c$
$f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+4}$	$\int x^2 \cdot e^{x^3+4} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \cdot e^{x^3+4} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+4} + c$

- Tipo: Logarítmica

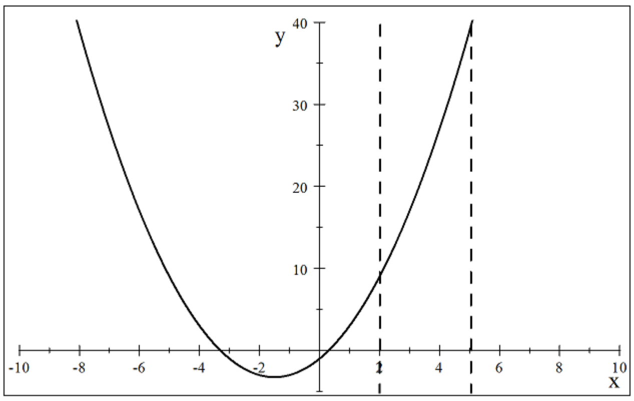
Función	Integral
$f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+7}$	$\int \dfrac{x^3}{x^4+7} dx = \dfrac{1}{4} \int \dfrac{4x^3}{x^4+7} dx = \ln\left(x^4+7\right) + c$
$f(x) = \dfrac{x}{6x^2+2}$	$\int \dfrac{x}{6x^2+2} dx = \dfrac{1}{12} \int \dfrac{12x}{6x^2+2} dx = \ln(6x^2+2) + c$

6.2. INTEGRAL DEFINIDA.

La integral definida difiere de la integral indefinida en que la primera se calcula en un intervalo $[a, b]$ de manera que el límite inferior de la integral es a y el límite superior es b , es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \ .$$

Dicha integral representa el áreal de la región del plano comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas.



Para calcular la integral definida de una función $f(x)$ utilizaremos la *Regla de Barrow*, de modo que si $F(x)$ verifica que $F' = f$, entonces se cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

También debemos de tener en cuenta las reglas de integración, que coinciden con las que vimos para la integral indefinida. Así:

Suma	$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
Resta	$\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
Producto por una constante	$\int_a^b k \cdot g(x)dx = k \cdot \int_a^b g(x)dx$

Ejemplo 3.

Calcular la integral definida $\int_0^2 (x^3 - 4x + 8)dx$.

Solución:

Primeramente calculamos la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 4x + 8)dx &= \int x^3 - 4\int xdx + \int 8dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 4\frac{x^{1+1}}{1+1} + 8x \\ &= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8x + c = F(x) + c\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8x$. A continuación, hallamos los valores de $F(2)$ y $F(0)$.

$$F(2) = \frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 = 12 \qquad \text{y} \qquad F(0) = \frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^2 + 8\cdot 0 = 0\ .$$

Luego, la integral pedida será:

$$\int_0^2 (x^3 - 4x + 8)dx = F(2) - F(0) = 12\ .$$

Algunas propiedades importantes de las integrales definidas son las siguientes:

- Signo de la integral:

  Si $f(x) > 0$ en el intervalo $[a,\, b]$, la integral definida es positiva, es decir, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0.$

  Si $f(x) < 0$ en el intervalo $[a,\, b]$, la integral definida es negativa, es decir, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx < 0.$

- Si $a = b$, entonces la integral se anula: $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.

- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,\, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

- Si $f(x)$ es continua en $[a,\, b]$, $[a,\, c]$ y $[c,\, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ejemplo 4.

Calcular la integral definida $\displaystyle\int_3^5 (-x^2 + 3x + 2)dx$.

Solución:

Primeramente calculamos la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int (-x^2 + 3x + 2)dx &= -\int x^2 + 3\int xdx + \int 2dx = -\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x \\ &= -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\,x^2 + 2x + c = F(x) + c\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$. A continuación, hallamos los valores de $F(5)$ y $F(3)$.

$$F(5) = -\frac{5^3}{3} + \frac{3}{2}5^2 + 2\cdot 5 = \frac{35}{6} \qquad \text{y} \qquad F(3) = -\frac{3^3}{3} + \frac{3}{2}3^2 + 2\cdot 3 = \frac{21}{2}\ .$$

Luego, la integral pedida será:

$$\int_3^5 (-x^2 + 3x + 2)dx = F(5) - F(3) = \frac{35}{6} - \frac{21}{2} = -\frac{14}{3} \ .$$

Como $f(x) = -x^2 + 3x + 2 < 0$, entonces la integral definida en el intervalo $[3,\, 5]$ es negativa.

6.3. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES: ÁREAS DE FUNCIONES.

Una aplicación interesante de las integrales definidas es que pueden utilizarse para calcular el área de una región delimitada por funciones. En realidad, es algo implícito en la propia definición de la misma. Veremos dos casos, en el primero hallaremos el área delimitada por la gráfica de una función dada y el eje de abscisas, y en el segundo el área delimitada por las gráficas de dos funciones dadas.

El área delimitada por la gráfica de una función dada y el eje de abscisas en el intervalo $[a,\, b]$ se define como:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx \ .$$

Para calcular el área delimitada por la gráfica de una función dada y el eje de abscisas lo más sencillo es seguir los siguientes pasos:

1. Hallar los puntos de corte de la función dada $f(x)$ y el eje de abscisas para obtener el intervalo $[a,\, b]$.

2. Calcular la integral indefinida de $f(x)$.

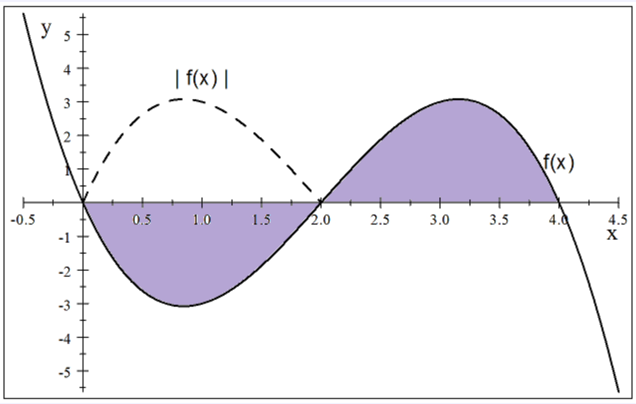
3. Aplicar la regla de Barrow para obtener el valor del área.

Ejemplo 5.

Calcular el área que delimitada por la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x$ y el eje de abscisas.

Solución:

En el siguiente gráfico podemos ver la representación de la función dada.



Realizaremos los pasos indicados anteriormente para solucionar el problema. Primero hallamos los puntos de corte de la función dada $f(x)$ y el eje de abscisas:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x = -x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \; .$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos que $x^2 - 6x + 8 = 0$ cuando $x = 2$ y $x = 4$. Por lo tanto, los intervalos de integración son: $[0,\ 2]$ y $[2,\ 4]$.

El segundo paso consiste en calcular la integral indefinida:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(-x^3 + 6x^2 - 8x\right) dx = -\int x^3 dx + 6\int x^2 dx - 8\int x dx \\ &= -\frac{x^{3+1}}{4} + 6\frac{x^{2+1}}{3} - 8\frac{x^{1+1}}{2} = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2 + c \; .\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2$. Finalmente, aplicamos la regla de Barrow para calcular las integrales definidas en los dos intervalos de integración.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \left(-x^3 + 6x^2 - 8x\right) dx = F(2) - F(0) = -4 - 0 = -4 \; , \\ \int_2^4 f(x)dx &= \int_2^4 \left(-x^3 + 6x^2 - 8x\right) dx = F(4) - F(2) = 0 - (-4) = 4 \; .\end{aligned}$$

Luego, el área pedida es:

$$\int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^4 \left|-x^3+6x^2-8x\right| dx = \int_0^2 \left(x^3-6x^2+8x\right) dx$$
$$+\int_2^4 \left(-x^3+6x^2-8x\right) dx = 4+4 = 8\ .$$

El área delimitada por la gráfica de dos funciones dadas f y g en el intervalo $[a,\, b]$ se define como:

$$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\ .$$

Para calcular el área delimitada por la gráfica de dos funciones dadas f y g realizaremos los siguientes pasos:

1. Hallar los puntos de corte de las funciones dadas $f(x)$ y $g(x)$ para obtener el intervalo $[a,\, b]$.
2. Calcular la integral indefinida de $|f(x)-g(x)|$.
3. Aplicar la regla de Barrow para obtener el valor del área.

Ejemplo 6.

Calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=x+1$.

Solución:

Comenzamos calculando los puntos de corte de las dos funciones para obtener los límites de integración.

$$f(x)=x^2-1=x+1=g(x) \Leftrightarrow x^2-1-x-1=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0\ .$$

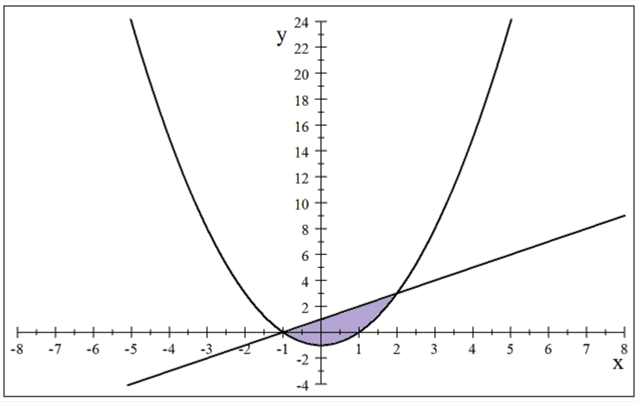
Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos que $x^2 - x - 2 = 0$ cuando $x = 2$ y $x = -1$. Por lo tanto, el intervalo de integración es $[-1,\ 2]$. Ahora, hallaremos la integral indefinida de $|f(x) - g(x)|$. Como $f(x) - g(x) < 0$, entonces $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$.

$$\int (g(x) - f(x))\, dx = \int \left(-x^2 + x + 2\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c = F(x) + c\ .$$

Finalmente aplicamos la regla de Barrow para obtener el área:

$$\int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = F(2) - F(-1) = \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = \frac{9}{2}\ .$$

En el siguiente gráfico podemos ver la representación de las funciones dadas.



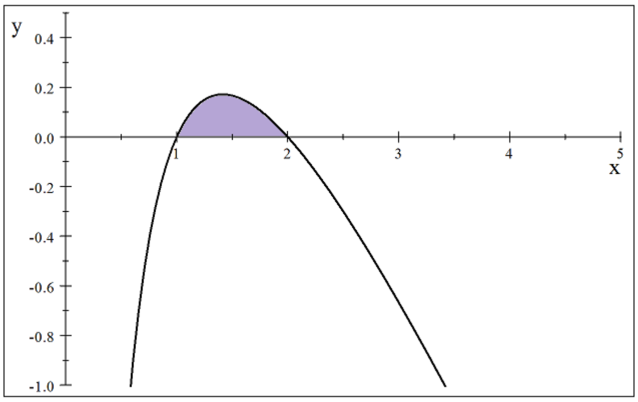
6.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2000, opción A). Dada la función definida en los números reales salvo en $x = 0$,

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}\ .$$

Calcular el área de la región plana acotada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje OX.

Solución:



Primero hallamos los puntos de corte de la función dada $f(x)$ y el eje de abscisas:

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} = \frac{3x - x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x \neq 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos que $3x - x^2 - 2 = 0$ cuando $x = 2$ y $x = 1$. Por lo tanto, el intervalo de integración es $[1, 2]$.

El segundo paso consiste en calcular la integral indefinida de $|f(x)|$, como $f(x) > 0$ en $[1, 2]$ entonces $|f(x)| = f(x)$. Así:

$$\int |f(x)|\, dx = \int \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x + c\ .$$

Por lo tanto, $F(x) = 3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x$. Finalmente, aplicamos la regla de Barrow para calcular el área pedida:

$$\int_1^2 |f(x)|\, dx = F(2) - F(1) = 4 - 2\ln 2 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln 2\ .$$

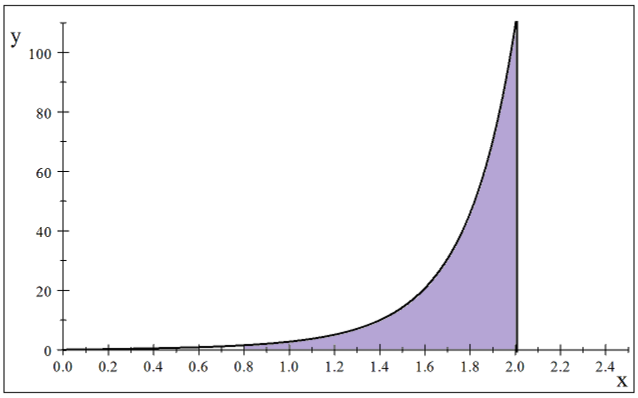
2. (2003, opción A). Se considera la función definida por:

$$f(x) = xe^{x^2}\ .$$

Calcular el área del recinto plano acotado por la gráfica de dicha función para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

Solución:

La representación gráfica del área que debemos calcular es la siguiente:



Como la función dada $f(x)$ solamente corta al eje OX en $x = 0$, entonces el área pedida está delimitada por $f(x)$ en el intervalo [0, 2].

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right) \ .$$