MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 1

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

CAPÍTULO 1

MATRICES Y DETERMINANTES

Las matrices tienen múltiples aplicaciones en la vida real, muestra de ello es su utilización en diferentes ciencias, tales como, Economía, Biología, Sociología, etc. Son una herramienta para la resolución de sistemas lineales, y también están intimamente ligadas con las aplicaciones lineales.

1.1. DEFINICIONES BÁSICAS.

Una *matriz de orden* $m \times n$ es todo conjunto de elementos dispuestos de modo ordenado en m filas y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

en el que cada **entrada**, a_{ij}, de la matriz es un número real.

Una *matriz cuadrada* es una matriz con $n = m$. Las matrices que tengan nulos los elementos que quedan a uno de los lados de la diagonal principal se denominan *matrices triangulares*. *Matriz diagonal* es la que tiene nulos todos los elementos que no estén en la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Supertriangular Subtriangular Diagonal

La *traza* de una matriz dada es la suma de la diagonal principal, es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

El *rango* de una matriz coincide con el número máximo de vectores-columna y con el máximo de vectores-fila linealmente independientes que hay en dicha matriz.

1.2. OPERACIONES CON MATRICES.

- **Suma de matrices:** Para sumar dos o más matrices todas ellas deben ser del mismo orden.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}.$$

Ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 0+4 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) & 1-0 \\ -2-4 & -1-(-2) \\ 3-5 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 1 \\ -2-4 & -1+2 \\ 3-5 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esta operación verifica las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A.$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C.$

3. $A + 0 = 0 + A = A$.
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

- **Producto de un número real por una matriz:**

$$kA = k \cdot [a_{ij}]_{mxn} = [k \cdot a_{ij}]_{mxn}.$$

Ejemplo 2.

$$K \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 2K \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & -4 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

El producto de un escalar por una matriz verifica las siguientes propiedades:

1. $(cd)A = c(dA)$.
2. $c(A + B) = cA + cB$.
3. $(c + d)A = cA + dA$.

- **Producto matricial:** está definido sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}\,.$$

Ejemplo 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x4}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$.
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$.
4. $c(AB) = (cA)B$.
5. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.3. MATRIZ TRASPUESTA Y MATRIZ INVERSA.

- **Trasposición de una matriz:** llamaremos matriz traspuesta de A a la matriz A^t cuyas filas son las columnas de A.

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) \Longrightarrow A^t_{n\times m} = (a_{ji}).$$

Ejemplo 4.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x3}.$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \text{ entonces } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

La trasposición de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
4. $(cA)^t = cA^t$.

- **Inversión de matrices:** dada una matriz cuadrada A se dice que B es la inversa de A si $AB = I = BA$. Observe que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

  Para calcular la matriz inversa A^{-1} de una matriz cuadrada dada A existen dos métodos, el método de los adjuntos donde $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A^t)$ y el método de Gauss que consiste en aplicar transformaciones elementales a las **filas** de la matriz A de forma que se transforme en la matriz identidad. Para ello, se considera la matriz $(A \mid I)$ y se realizan operaciones elementales por **filas** que consigan transformar la matriz A en la matriz I, de esta forma la matriz I se habrá transformado en la matriz A^{-1}. Es decir, se han de realizar operaciones por filas de forma que $(A \mid I) \sim ... \sim (I \mid A^{-1})$. También es posible obtener la matriz inversa de A mediante operaciones elementales por **columnas** de forma que $\binom{A}{I} \sim ... \sim \binom{I}{A^{-1}}$.

Ejemplo 5.

a) Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de los adjuntos.

Lo primero es calcular su determinante, como $\det(A) = 5$ entonces existe su matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & (-1)\cdot(-2) & 2 \\ (-1)\cdot 3 & 1 & (-1)\cdot(-1) \\ 1 & (-1)\cdot 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A continuación comprobamos que hemos realizado bien los cálculos, haciendo

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de signos es: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$.

b) Cáculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim^{F_1=F_1-3F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & | & -2 & -3 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{F_1=-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & 3 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los objetivos de las operaciones elementales realizadas son:

1. Se obtienen ceros por debajo de la diagonal principal (se triangulariza superiormente).
2. Se obtienen ceros por encima de la diagonal principal (se triangulariza inferiormente).
3. Se obtienen unos en la diagonal principal.

Por tanto, la inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vamos a comprobarlo: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las propiedades de las matrices inversas son las siguientes:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Solo admiten inversa las matrices cuadradas con determinante distinto de cero.

1.4. DETERMINANTES.

- **Determinante de una matriz cuadrada:**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ejemplo 6.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 2.$$

Los determinantes verifican las siguientes propiedades:

1. El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.
2. $\det(A) = \det(A^t)$.
3. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
4. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

5. Si una de las columnas o una de las filas de la matriz es nula, el determinante vale cero.

6. Si se intercambian entre sí dos columnas o filas de la matriz, el determinante cambia de signo.

7. Si la matriz tiene dos columas o filas iguales o proporcionales su determinante vale cero.

8. El determinante no cambia de valor al sumar a una columna o fila una combinación lineal de las demás.

9. **Si el determinante de una matriz es igual a cero entonces la matriz es singular, en caso contrario, es no-singular o invertible**.

Ejemplo 7.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{C_2=C_2-2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{C_3=C_3-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=_{C_4=C_4+C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} =_{C_3-C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=_{C_4=C_4+\frac{3}{2}C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 4 & -7/2 \end{vmatrix} =_{C_4=C_4+\frac{2}{3}C_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -5/6 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 3 \cdot (-5/6) = 5.$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =_{C_1=C_1+2C_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 14 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$=_{C_2=C_2+C_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 14 & 7 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =_{C_4=C_4+3C_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 5 & 14 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

$= (-1)\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 14 & 7 & 14 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-7) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-7)\cdot(16+24+24-12-24-32) = 28.$

- **Adjunto de una matriz:** $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ es el adjunto del lugar ij, donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima.

- **Rango de una matriz:** es el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida por filas. Si A es de orden mxn entonces $rg(A) \leq \text{mín}\{m,n\}$.

Ejemplo 8.

Calculo del rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Se busca un menor de orden dos distinto de cero entre las dos primeras columnas, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow r(A) \geq 2.$

A continuación, se toma la tercera columna para comprobar si existe algún menor de orden tres distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{la tercera columna es c.l. de las dos primeras.}$$

Veamos que pasa con la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{la cuarta columna es c.l. de las dos primeras.}$$

Por lo tanto, el rango de la matriz es 2.

1.5. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2008, opción A) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $AX = B$ para $a = 3$.

Solución:

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, luego lo que tenemos que hacer es calcular dicho determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1 - 1 - 2 = a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Por tanto, si $a = 2$ la matriz A no tendrá inversa, pero si $a \neq 2$ entonces existirá la inversa de A.

b) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. (2009, opción A) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real k .

a) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa.

b) Para $k = 2$, calcule, si existe, A^{-1}.

c) Para $k = 1$, calcule, $(A - 2A^t)^2$.

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz dada.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k = 0,\ k = 1.$$

Por tanto:

- Si $k = 0$ o $k = 1 \Rightarrow$ no existe A^{-1}.

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Rightarrow$ existe A^{-1}.

b) Si $k = 2$, existe A^{-1} y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

c) Si $k = 1$, definimos $B = A - 2A^t$, luego el resultado que nos piden será B^2.

$$B = A - 2A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$