MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 7

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

7. PROBABILIDAD **87**

7.1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. 87

7.2. SUCESOS. DEFINICIONES BÁSICAS. OPERACIONES CON SUCESOS. . . . 88

7.3. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD. 91

7.4. PROBABILIDAD Y SUCESOS INDEPENDIENTES. 93

7.5. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES. . . . 95

7.6. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN. 96

CAPÍTULO 7

PROBABILIDAD

La Teoría de Probabilidades al igual que la Estadística, la cual estudiaremos en el siguiente capítulo, son dos ramas de las Matemáticas que son aplicables a muchas otras ciencias, en especial a las Ciencias Sociales, tales como Sociología, Psicología, Economía, Finanzas, aunque también tienen aplicación a las Ciencias Biosanitarias e Ingenierías, de ahí su propiedad de transversalidad. En este capítulo nos centraremos en el estudio de la Probabilidad de sucesos.

7.1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS.

Un experimento es *determinista* cuando existe un conjunto de circunstancias que, antes de su ejecución, determinan completamente su resultado. Tal es el caso de:

- Tirar una piedra desde una ventana, sabemos de antemano que caerá.
- Colocar una botella de agua en el frigorífico, sabemos que el agua se enfriará.
- Dar una patada a un balón, sabemos que el balón se moverá.

Sin embargo, existen otros experimentos en los cuales no se puede predecir el resultado antes de realizarlo, como por ejemplo, lanzar un dado y saber que número va a salir, jugar a la lotería y predecir el número premiado. Este tipo de experimentos son aleatorios. Luego, diremos que un experimento es *aleatorio* si no podemos predecir con seguridad su resultado de antemano. La Teoría de la Probabilidades es la ciencia que estudia los fenómenos aleatorios.

7.2. SUCESOS. DEFINICIONES BÁSICAS. OPERACIONES CON SUCESOS.

El *espacio muestral* es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio, lo denotamos por E. A cada elemento que forma parte del espacio muestral se le denomino *suceso elemental*. Mientras que un *suceso compuesto* es un conjunto de sucesos elementales.

Ejemplo 1.

Consideremos el experimento de lanzar un dado y observar la cara que queda hacia arriba. ¿Cuál es el espacio muestral? Indique un suceso elemental y un suceso compuesto.

Solución:

Claramente hay 6 resultados posibles, los cuales son los 6 sucesos elementales del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Un suceso elemental podría ser por ejemplo, "sacar un cuatro", luego, $A = \{4\}$, y como suceso compuesto podemos considerar "obtener un número par", así, $B = \{2, 4, 6\}$.

Además, de los sucesos elemental y compuesto, existen otro tipo de sucesos que son:

- *Suceso seguro*: es el que ocurre siempre, es decir E.
- *Suceso imposible*: es el que no se verifica nunca, es decir, conjunto vacío).
- *Suceso complementario* de A: es el que ocurre cuando no ocurre A ($\overline{A}$ o A^c).
- Dos *sucesos*, A y B, son *incompatibles* o disjuntos o excluyentes: cuando no tienen elementos comunes.

Ejemplo 2.

Continuando con el experimento del lanzamiento de un dado, si $A = \{4\}$, su complementario será $A^c = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ y el suceso complementario de B es $B^c = \{1, 3, 5\}$. Claramente A y A^c son incompatibles, ya que no tienen elementos comunes, al igual que B y B^c
Un suceso imposible sería, por ejemplo, "obtener un número negativo".

Debido a que los sucesos son conjuntos de elementos del espacio muestral, podemos definir las operaciones básicas de conjuntos, tales como:

- Intersección de sucesos: si A y B son dos sucesos del espacio muestral E, entonces la intersección $A \cap B$, es el conjunto de todos los sucesos del espacio muestral que están en A y en B.

- Unión de sucesos: si A y B son dos sucesos del espacio muestral E, entonces la unión $A \cup B$, es el conjunto de todos los sucesos del espacio muestral que pertenecen cualquiera de los dos sucesos, A o B.

- Diferencia de sucesos: si A y B son dos sucesos del espacio muestral E, entonces la diferencia, $A \backslash B$ o $A - B$, es el suceso que ocurre cuando ocurre A y B no ocurre.

Ejemplo 3.

a) Continuando con el experimento del lanzamiento de un dado, consideremos los sucesos "obtener un número entre 2 y 4 (inclusive)" y "obtener un número par". Así, $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Entonces

$$A \cap B = \{2, 4\}, \;\; A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}, \;\; A - B = \{3\} \text{ y } B - A = \{6\}.$$

b) En una urna tenemos 10 bolas numeradas del 1 al 10. Sacamos una bola y apuntamos su número. Sean los sucesos "sacar un número primo" y "sacar un número entre 3 y 7 (inclusive)". Se pide:

1. Describir el espacio muestral y los sucesos dados.
2. Calcular $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $B - A$.
3. ¿Son A y B incompatibles?
4. Calcular A^c y B^c.

Solución:

1. El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Y los sucesos dados son: $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $A \cap B = \{3, 5, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A - B = \{1, 2\}$ y $B - A = \{4, 6\}$.
3. No, para que fuesen incompatibles no deberían tener ningún elemento común, es decir, $A \cap B = \phi$.
4. $A^c = E - A = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ y $B^c = E - B = \{1, 2, , 8, 9, 10\}$.

Las operaciones con sucesos verifican unas propiedades que resumimos en la siguiente tabla:

	Intersección	Unión
Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotencia	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$	$A \cup \phi = A$
Absorción	$A \cap \phi = A$	$A \cap E = E$
Complementación	$A \cap A^c = \phi$	$A \cup A^c = E$
Leyes de Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

7.3. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD.

La probabilidad mide la incertidumbre sobre el resultado de un experimento aleatorio. Existen diferentes maneras de asignar probabilidades. La más sencilla es la probabilidad clásica o *Regla de Laplace*: si un experimento tienen un número finito de resultados posibles y todos los sucesos elementales que lo componen tienen la misma oportunidad de ocurrir, para cualquier suceso A se define su probabilidad como:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}.$$

Ejemplo 4.

En el experimento del lanzamiento de un dado, calcular la probabilidad de "obtener un número primo".

Solución:

Como ya vimos el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y el suceso "obtener un número primo" es $A = \{1, 2, 3, 5\}$, por tanto, siguiendo la regla de Laplace, la probabilidad del suceso A es $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Pero, ¿qué ocurre cuando los sucesos elementales no son equiprobables? Pensemos en una urna con 6 bolas negras y 5 blancas, y consideramos el experimento de sacar una bola de dicha urna. Claramente el espacio muestral es $E = \{N, B\}$, donde N significa "obtener una bola negra" y B "obtener una bola blanca". Mediante la regla de Laplace tendremos que $P(N) = \frac{1}{2} = P(B)$, lo cual no tiene mucho sentido, pues hay más bolas negras que blancas. En un caso como éste, en el que los sucesos elementales no son equiprobables, podemos utilizar la siguiente probabilidad de un suceso A:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos del conjunto } A}{\text{número total de elementos}}.$$

Esta manera de definir una probabilidad es correcta, ya que verifica todas y cada una de las condiciones necesarias para ser una probabilidad, las cuales detallamos en la siguiente definición:

Una *probabilidad* es una función P que asigna a cada suceso A asociado a un experimento un valor real tal que verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(E) = 1$.
3. Si A y B son dos sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \phi$, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ejemplo 5.

En el experimento de la urna, calcular la probabilidad de los sucesos N y B.

Solución:
Ya vimos que el espacio muestral es $E = \{N, B\}$, y las probabilidades de los sucesos son ahora:
$$P(N) = \frac{6}{11} \text{ y } P(B) = \frac{5}{11}.$$
Observa que $P(N) + P(B) = \frac{6}{11} + \frac{5}{11} = 1$.

Como consecuencia de la definición de probabilidad se tienen las siguientes propiedades:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(\phi) = 0$.
- Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- Si A y B son dos sucesos cualesquiera, se tiene que:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{y} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

7.4. PROBABILIDAD Y SUCESOS INDEPENDIENTES.

Aunque no lo hemos dicho hasta ahora, la probabilidad, $P(A)$, de un suceso A definida en la sección anterior recibe el nombre de *probabilidad marginal* de dicho suceso. Y dados dos sucesos A y B, la probabilidad de su intersección, $P(A \cap B)$, se denomina *probabilidad conjunta*. Cuando estamos interesados en calcular la probabilidad de que ocurra un suceso A, dado que ha ocurrido otro suceso B, la probabilidad que deseamos obtener se llama *probabilidad condicional* y se define como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{probabilidad conjunta}}{\text{probabilidad marginal de } B},$$

siempre que $P(B) > 0$.

Observa que el suceso complementario del suceso "A condicionado a B", $A \mid B$, es $A^c \mid B$, y por tanto, $P(A \mid B) + P(A^c \mid B) = 1$. Otra consecuencia importantes es que si A y B son incompatibles, entonces $P(A \mid B) = 0$.

Ejemplo 6.

Considerando de nuevo el lanzamiento de un dado, donde $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcular la probabilidad de "obtener un dos" sabiendo que el resultado ha sido par.

Solución:

Definimos el suceso "obtener un dos", $A = \{2\}$ y el suceso "obtener un número par", $B = \{2, 4, 6\}$. Claramente, $A \cap B = \{2\}$. Entonces la probabilidad pedida es:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

A partir de la definición de probabilidad condicionada, podemos calcular la probabilidad conjunta o probabilidad de la intersección de dos sucesos, así:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B), \text{ siempre que } P(B) > 0.$$

Esta expresión es la *Ley de la multiplicación* que también puede aplicarse a tres sucesos, siempre que $P(A \cap B) > 0$,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B).$$

Dados dos sucesos cualesquiera A y B, la ocurrencia de uno de ellos puede o no tener efecto en la ocurrencia del otro. Cuando la presencia de uno no tienen efectos sobre el otro, diremos que los sucesos son independientes, y en tal caso, se verifica que

$$P(A|B) = P(A) \text{ y } P(B \mid A) = P(B).$$

En caso contrario, se dice que los sucesos son dependientes. Como consecuencia, dos sucesos A y B son independientes cuando

$$P(A \cap B = P(A)P(B).$$

Ejemplo 7.

a) Calcular la probabilidad de que al extraer 3 cartas, con reemplazamiento, de una baraja española, sean todas copas.

Solución:

La baraja española está formada por 40 cartas, y por lo tanto, el espacio muestral tendrá 40 elementos, uno por cada carta. Sacar una carta con reemplazamiento, significa que cada vez que se saca una carta de la baraja esta se devuelve al taco de cartas, por lo que los sucesos son independientes. Si denotamos por C_i, $i = 1, 2, 3$, sacar una copa en la i-ésima extracción, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= P(C_1)P(C_2 \mid C_1)P(C_3 \mid C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2)P(C_3) \\ &= \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

b) Calcular la probabilidad de que al extraer 3 cartas, sin reemplazamiento, de una baraja española, sean todas copas.

Solución:
Sacar una carta sin reemplazamiento, significa que cada vez que se saca una carta de la baraja esta no se devuelve al taco de cartas, por lo que los sucesos no son independientes. Como antes, denotamos por C_i, $i = 1, 2, 3$, sacar una copa en la i-ésima extracción, la probabilidad pedida es:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1)P(C_2 \mid C_1)P(C_3 \mid C_1 \cap C_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{1}{64} = \frac{3}{247}.$$

7.5. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES.

Teorema de la probabilidad total: Dados los sucesos A_1, A_2,...,A_n tales que $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, entonces la probabilidad de un suceso B cualquiera viene dada por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Ejemplo 8.

Tenemos 3 urnas. La primera contiene 4 bolas blancas y 4 negras, la segunda 3 blancas y 1 negra, y la tercera 2 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y después se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Solución:
Denotemos por N al suceso “la bola extraída es negra”, y por U_i, $i = 1, 2, 3$, al suceso “la urna elegida es la i-ésima”. Entonces, por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad buscada es:

$$P(N) = P(U_1)P(N \mid U_1)+P(U_2)P(N \mid U_2)+P(U_2)P(N \mid U_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{17}{36}.$$

Teorema de Bayes: Dados los sucesos A_1, A_2,...,A_n tales que $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ y dado un suceso B cualquiera con $P(B) > 0$, entonces se verifica:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 9.

Considerando el enunciado del ejemplo anterior, calcular la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la primera urna, sabiendo que ha sido negra.

Solución:

En este caso, debemos utilizar el teorema de Bayes, y así:

$$P(U_1 \mid N) = \frac{P(U_1 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(U_1)P(N \mid U_1)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{36}} = \frac{6}{17}\,.$$

7.6. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (Junio 2010, opción A). Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcular las siguientes probabilidades: $P(A \cup B)$, $P(A^c \cup B^c)$, $P(A|B)$ y $P(A^c \cap B)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}8\ . \\
P(A^c \cup B^c) &= P\big((A \cap B)^c\big) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9\ . \\
P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25\ . \\
P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3\ .
\end{aligned}$$

2. (Septiembre 2000, opción B). Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0,3; de que se remita al bufete B es 0,5 y de que se remita al bufete C es 0,2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0,6; para el bufete B esta probabilidad es 0,8 y para el bufete C es 0,7.

a) Calcular la probabilidad de que la empresa gane un caso.

b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determinar la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

Solución:

a) Definamos el suceso "ganar un caso" por G. Entonces, utilizando el teorema de la probabilidad total tenemos la probabilidad pedida:

$$P(G) = P(A)P(G \mid A)+P(B)P(G \mid B)+P(C)P(G \mid C) = 0{,}3 \cdot 0{,}6+0{,}5 \cdot 0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}72 \ .$$

b) En este caso, debemos hacer uso del teorema de Bayes, así:

$$P(A \mid G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P(G \mid A)}{P(G)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}72} = 0{,}25 \ .$$