MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 2

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **21**

2.1. ESTUDIO DE LA COMPATIBILIDAD. 22

2.2. CÁLCULO DE LAS SOLUCIONES. 24

2.3. SISTEMAS HOMOGÉNEOS. 28

2.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN. 28

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,,$$

que deben verificarse simultáneamente. Todo sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

puede ser escrito de forma matricial como $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \qquad \text{y} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

son la matriz de coeficientes y el vector de incógnitas, respectivamente. Se llama matriz *matriz ampliada* a la matriz $(A|b)$ donde

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}.$$

es el vector de términos indepencientes.

Ejemplo 1.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & = 3 \end{array}\right\}.$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El estudio de cualquier sistema lineal, sea cual sea el número de incógnitas y de ecuaciones, comprende dos cuestiones:

1^a.- La compatibilidad del sistema, es decir, averiguar si existe solución y, en caso afirmativo, si es o no única.

2^a.- El cálculo de las soluciones, en caso de que existan.

2.1. ESTUDIO DE LA COMPATIBILIDAD.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que tengan. De acuerdo con ello se pueden presentar los siguientes casos:

1. **Sistema incompatible**: si no tiene ninguna solución.

2. **Sistema compatible:** si tiene alguna solución, en este caso además puede distinguirse entre:

a) Sistema compatible **determinado** cuando tiene un número finito de soluciones.

b) Sistema compatible **indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

Para averiguar el número de soluciones de un sistema dado se debe comparar el rango de la matriz de coeficientes A con el de la matriz ampliada $A|b$ mediante el siguiente teorema.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Si $rg(A) \neq rg(A|b) \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

Si $rg(A) = rg(A|b) = n \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

Si $rg(A) = rg(A|b) = r < n \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Ejemplo 2.

Para estudiar el sistema lineal siguiente

$$\left.\begin{array}{ccccccl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & = 3 \end{array}\right\},$$

tenemos que calcular el rango de la matriz A.

Comenzamos calculando el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, luego $rg(A) \geq 2$.

A continuación hallamos el determinante de la matriz A utilizando la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 3 - 6 + 6 = 0,$$

por tanto $rg(A) = 2$.

Para calcular el rango de la matriz ampliada, hallamos el determinante formado por las dos primeras columnas de A del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12+3-6-12+6-3 = 0 \implies rg(A|b) = 2.$$

Por tanto, podemos concluir que el sistema es compatible indeterminado ya que

$$rg(A) = \ rg(A|b) = 2 < 3.$$

Luego, tendrá infinitas soluciones.

2.2. CÁLCULO DE LAS SOLUCIONES.

Al ser todo sistema lineal una ecuación matricial de la forma $Ax = b$, el cálculo de las soluciones está ligado a la inversión matricial. Conviene distinguir dos tipos de sistemas:

a) Sistemas de Cramer.

b) Sistemas que no son de Cramer.

a) Sistemas de Cramer.

Son aquellos cuya matriz de coeficientes A es regular, es decir, es una matriz **cuadrada** con determinante distinto de cero. Para resolver estos sistemas podemos utilizar varios métodos.

1. El método de la matriz inversa, es decir, $x = A^{-1}b$.

2. El método o *Regla de Cramer:* $x_i = \dfrac{|c_1 c_2 .. b ... c_n|}{|A|}$, $i = 1, 2, ..., n$.

3. El método de Gauss que consiste en transformar un sistema en otro equivalente que sea escalonado.

Ejemplo 3.

Para resolver el sistema lineal siguiente

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z &= 9\\ -x+3y &= -4\\ 2x-5y+5z &= 17 \end{aligned}\right\},$$

a) mediante la *Regla de Cramer* debemos calcular:

$$x = \frac{|b\ c_2\ c_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 & 3\\ -4 & 3 & 0\\ 17 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y = \frac{|c_1\ b\ c_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3\\ -1 & -4 & 0\\ 2 & 17 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$z = \frac{|c_1\ c_2\ b|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9\\ -1 & 3 & -4\\ 2 & -5 & 17 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

b) mediante el *método de Gauss* debemos calcular la forma escalonada de la matriz ampliada $A|b$ utilizando operaciones elementales.

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9\\ -1 & 3 & 0 & | & -4\\ 2 & -5 & 5 & | & 17 \end{pmatrix} \sim^{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9\\ 0 & 1 & 3 & | & 5\\ 2 & -5 & 5 & | & 17 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{F_3=F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9\\ 0 & 1 & 3 & | & 5\\ 0 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim^{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9\\ 0 & 1 & 3 & | & 5\\ 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema dado queda reducido al siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}\right\} .$$

Ahora empleamos la sustitución hacia atrás para calcular las incógnitas obteniendo:

$$x = 1,\ y = -1 \text{ y } z = 2.$$

b) Sistemas que no son de Cramer.

Son aquellos en los que la matriz de coeficientes es no regular, es decir, es no cuadrada o siendo cuadrada tiene determinante cero. Evidentemente, la matriz de coeficientes no admite inversa.

Para calcular las soluciones de estos sitemas hay que averiguar si existe redundancia y si existen variables libres.

Existe *redundancia* cuando alguna ecuación es combinación lineal de las restantes, esto se detecta viendo si el rango (r) de la matriz ampliada es menor que el número de ecuaciones (m), es decir, si $r < m \Longrightarrow$ hay $m - r$ ecuaciones redundantes. Las $m - r$ ecuaciones a suprimir son las que no intervengan en un menor de orden r distinto de cero.

Existen *variables libres* cuando los vectores columna de la matriz de coeficientes no sean linealmente independientes, es decir, si $r < n \Longrightarrow$ hay $n - r$ variables libres. Las $n - r$ variables libres son las asociadas a los vectores-columna que no intervengan en un menor de orden r distinto de cero.

Suprimida la redundancia y pasando al segundo miembro las variables libres, se obtiene un sistema de Cramer.

Ejemplo 4.

Para resolver el sistema lineal siguiente

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} ,$$

observe que:

Como $rg(A|b) = 2$, existe $m - r = 3 - 2 = 1$ ecuación redundante, la tercera.

Como $rg(A) = 2$, existe $n - r = 3 - 2 = 1$ variable libre, x_3.

Así, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 = -1 + x_3 \end{array}\right\}.$$

Si resolvemos directamente calculando la matriz inversa de A tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det(A) = 4 - 1 = 3 \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, el vector de incógnitas será $x = A^{-1}b$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ -1 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ -1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x_3}{3} \\ \frac{x_3}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo mediante la *Regla de Cramer:*

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{|b\ c_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 - x_3 & -1 \\ -1 + x_3 & 2 \end{vmatrix}}{3} &= \frac{1}{3}\left(2(2 - x_3) - (-1)(-1 + x_3)\right) \\ &= \frac{1}{3}(4 - 2x_3 - 1 + x_3) = \frac{1}{3}(3 - x_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{|c_1\ \ b|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 - x_3 \\ -1 & -1 + x_3 \end{vmatrix}}{3} &= \frac{1}{3}\left(2(-1 + x_3) - (-1)(2 - x_3)\right) \\ &= \frac{1}{3}(-2 + 2x_3 + 2 - x_3) = \frac{1}{3}x_3 \ . \end{aligned}$$

2.3. SISTEMAS HOMOGÉNEOS.

Un *sistema homogéneo*, m ecuaciones y n variables, es aquel que tiene nulos todos los términos independientes, es decir, su expresión matricial es: $AX = 0$.

Al ser nulos los términos independientes, coinciden los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, por lo que existe compatibilidad. Luego, por tanto,

Si $rg(A) = n \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

Si $rg(A) < n \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2009, opción B) Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas,mantas y edredones ha comprado el hotel?

Solución:

Escribimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z & = 200 \\ 16x+50y+80z & = 7500 \\ x-y-z & = 0 \end{array}\right\},$$

donde x es el número de almohadas, y el número de mantas y z el número de edredones.

Entonces, la matriz de coeficientes es

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 50 & 80 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante es $|A| = 60 \neq 0$, por tanto $rg(A) = 3$ y el sistema es compatible determinado, luego tiene solución única. Podemos resolver mediante la regla de Cramer:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{|b\ c_2\ c_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 7500 & 50 & 80 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{60} = \frac{6000}{60} = 100, \\
y &= \frac{|c_1\ b\ c_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 16 & 7500 & 80 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{60} = \frac{4200}{60} = 70, \\
z &= \frac{|c_1\ c_2\ b|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 16 & 50 & 7500 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{60} = \frac{1800}{60} = 30.
\end{aligned}
$$

2. (2009, opción A) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$
\left.\begin{aligned}
x + y + kz &= 4 \\
2x - y + 2z &= 5 \\
-x + 3y - z &= 0
\end{aligned}\right\}.
$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

La matriz de coeficientes es

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante es $|A| = 5k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Si $k \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, luego tiene solución única.

Si $k = 1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$. Por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$. Veamos cual es el rango de la matriz ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, luego $rg(A|b) = 2$.

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.

Observe que:

Como $rg(A|b) = 2$, existe $m - r = 3 - 2 = 1$ ecuación redundante, la tercera.

Como $rg(A) = 2$, existe $n - r = 3 - 2 = 1$ variable libre, z.

Así, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 - z \\ 2x - y &= 5 - 2z \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos vistos obtenemos

$$x = 3 - a,\ y = 1 \text{ y } z = a.$$

c) Si $k = 0$, entonces el sistema es

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y + 2z &= 5 \\ -x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Por el apartado a) sabemos que es compatible determinado, luego tiene solución única. Podemos calcular la inversa de A directamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

y entonces la solución del sistema es:

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$