Optimización combinatoria
Flujo en redes

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Esquema

- Optimización combinatoria: definición y formulación de PE
- El problema de la mochila; desigualdades válidas
- El problema de asignación
- La propiedad de integralidad
- El problema del transporte
- Problemas de flujo en redes
- El problema del flujo de coste mínimo
- El problema de la ruta más corta
- El problema del flujo máximo

Optimización combinatoria (OC): definición

- Una amplia variedad de problemas de interés en aplicaciones se pueden representar de la siguiente forma

- Tenemos un **conjunto finito** $\boxed{E = \{1, \ldots, n\}}$

- A cada **elemento** $\boxed{e \in E}$ le corresponde un **coste**: $\boxed{c_e \text{ €}}$

- Dada: **familia** $\boxed{\mathscr{F} \subseteq 2^E}$ de **subconjuntos factibles** de $\boxed{E}$

- **Problema de optimización combinatoria (OC):** encontrar un subconjunto factible $\boxed{F^* \in \mathscr{F}}$ de coste mínimo:

$$\boxed{\text{(PC)} \quad z^* = \min \left\{ \sum_{j \in F} c_e : F \in \mathscr{F} \right\}}$$

Formulación de programación entera

- Dado un problema de OC

$$\boxed{\text{(PC)} \quad z^* = \min \left\{ \sum_{e \in F} c_e : F \in \mathscr{F} \right\}}$$

el enfoque moderno de resolución se basa en formularlo como un **programa entero binario**

- Asociamos a cada $\boxed{F \in \mathscr{F}}$ su **vector de incidencia**

$$\boxed{\mathbf{x}^F \triangleq (x_e^F)_{e \in E}, \qquad \text{con } x_e^F = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

- El **conjunto de vectores de incidencia factibles** es:

$$\boxed{S \triangleq \left\{ \mathbf{x}^F : F \in \mathscr{F} \right\} \subseteq \{0,1\}^E}$$

Formulación de programación entera

- Definimos **variables de decisión binarias:** para $\boxed{e \in E}$,

$$\boxed{x_e = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona el elemento } e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

- Reformulamos $\boxed{\text{(PC)}}$ como el **programa entero binario**

$$\boxed{\text{(PE)} \quad z^* = \min \left\{ \sum_{e \in E} c_e x_e : \mathbf{x} \in S \right\}}$$

- Buscaremos representar el conjunto de soluciones factibles $\boxed{S}$ mediante **restricciones lineales**

Ej: el problema de la mochila

- Propuestas de proyectos: $\boxed{E = \{1, \ldots, n\}}$
- Presupuesto total: $\boxed{b\,€}$
- Retorno esperado del proyecto $\boxed{e}$: $\boxed{c_e\,€}$
- Inversión requerida por el proyecto $\boxed{e}$: $\boxed{a_e\,€}$
- **Problema:** seleccionar un conjunto de proyectos que maximice el retorno sin superar el presupuesto

Ej: Formulación de OC

- **Familia de subconjuntos factibles de proyectos:**

$$\boxed{\mathscr{F} = \left\{ F \in 2^E : \sum_{e \in F} a_e \leq b \right\}}$$

- **Formulación de OC:**

$$\boxed{(\mathsf{PC}) \qquad z^* = \max \left\{ \sum_{e \in F} c_e : F \in \mathscr{F} \right\}}$$

Ej: formulación de PE

- **Variables de decisión:**

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona el proyecto } e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Objetivo:** $\boxed{\max \sum_{e=1}^{n} c_e x_e}$

- **Restricciones:** (¡1 restricción!)

presupuesto: $\sum_{e=1}^{n} a_e x_e \le b$

variables binarias: $x_e \in \{0, 1\}, \quad e = 1, \ldots, n$

Ej: Problema de la mochila, con $\boxed{n=5}$

- Formulación de PE:

$$
\begin{aligned}
\text{(PE)} \quad & z^* = \max 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 8x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\
& x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E
\end{aligned}
$$

- Relajación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{(PL)} \quad & z^{\text{PL}} = \max 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 8x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\
& 0 \leq x_e \leq 1, \quad e \in E
\end{aligned}
$$

Ej: resolviendo la relajación lineal

- Relajación lineal:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PL}) \quad z^{\mathsf{PL}} = \max\, & 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 8x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\
& 0 \leq x_e \leq 1, \quad e \in E
\end{aligned}
$$

- Solución de $\boxed{(\mathsf{PL})}$:

$$\boxed{z^{\mathsf{PL}} = 18.63, \text{ con } \mathbf{x}^{\mathsf{PL}} = (0.34, 1, 1, 0, 1)^{\mathsf{T}}}$$

- ¿Cómo **reforzar** la formulación? ¿Qué **desigualdades válidas** podemos añadir?

Ej: encontrando desigualdades válidas

- A la vista de las restricciones

$$\boxed{\begin{array}{r} 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\ x_e \in \{0,1\} \end{array}}$$

es claro que las siguientes son **desigualdad válidas**:

$$\boxed{\mathsf{D}_{\{1,2,3\}} : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \quad \mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}} : x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3}$$

¿Por qué?

- Comprobamos si son violadas por la solución de $\boxed{\text{(PL)}}$:

$$\boxed{\begin{array}{r} \mathsf{D}_{\{1,2,3\}} : x_1^{\mathsf{PL}} + x_2^{\mathsf{PL}} + x_3^{\mathsf{PL}} = 2.34 > 2 : \ \textbf{sí} \\ \mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}} : x_2^{\mathsf{PL}} + x_3^{\mathsf{PL}} + x_4^{\mathsf{PL}} + x_5^{\mathsf{PL}} = 3 \leq 3 : \ \textbf{no} \end{array}}$$

- Reforzaremos las formulaciones $\boxed{\text{(PE)}}$, $\boxed{\text{(PL)}}$ con $\boxed{\mathsf{D}_{\{1,2,3\}}}$

Ej: reforzando la formulación

- Reforzamos la formulación $\boxed{\text{(PE)}}$ añadiendo la **desigualdad válida violada** $\boxed{(\mathsf{D}_{1,2,3})}$: obtenemos la **formulación reforzada** $\boxed{(\mathsf{PE}')}$, con relajación lineal

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathsf{PL}') \qquad z^{\mathsf{PL}'} &= \max 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 8x_5 \\ &\text{sujeto a} \\ &79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\ \mathsf{D}_{\{1,2,3\}}: &\, x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ &0 \leq x_e \leq 1 \end{aligned}}$$

- Solución de $\boxed{(\mathsf{PL}')}$:

$$\boxed{z^{\mathsf{PL}'} = 18.6 < 18.63 = z^{\mathsf{PL}}, \text{ con } \mathbf{x}^{\mathsf{PL}'} = (0, 1, 1, 0.6, 1)^{\mathsf{T}}}$$

Ej: reforzando la formulación

- ¿Viola $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{LP}'}}$ la desigualdad válida $\boxed{\mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}}}$?

$$\boxed{\mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}} : x_2^{\mathsf{PL}'} + x_3^{\mathsf{PL}'} + x_4^{\mathsf{PL}'} + x_5^{\mathsf{PL}'} = 3.6 > 3 : \ \textbf{sí}}$$

- Reforzamos las formulaciones $\boxed{(\mathsf{PE}')}$, $\boxed{(\mathsf{PL}')}$ con $\boxed{\mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}}}$: obtenemos la formulación entera $\boxed{(\mathsf{PE}'')}$, con relajación lineal $\boxed{(\mathsf{PL}'')}$

Ej: reforzando la formulación

- Reforzamos $\boxed{(\mathsf{PE}')}$, $\boxed{(\mathsf{PL}')}$ con $\boxed{\mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}}}$: obtenemos la formulación entera $\boxed{(\mathsf{PE}'')}$, con relajación lineal $\boxed{(\mathsf{PL}'')}$:

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathsf{PL}'') \quad z^{\mathsf{PL}''} &= \max 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 8x_5 \\ &\text{sujeto a} \\ &79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \\ \mathsf{D}_{\{1,2,3\}}: &\, x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ \mathsf{D}_{\{2,3,4,5\}}: &\, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ &0 \leq x_e \leq 1 \end{aligned}}$$

- Solución de $\boxed{(\mathsf{PL}'')}$:

$$\boxed{z^{\mathsf{PL}''} = 18 < z^{\mathsf{LP}'} = 18.6 < 18.63 = z^{\mathsf{LP}}, \text{ con } \mathbf{x}^{\mathsf{LP}''} = (0,1,1,0,1)^{\mathsf{T}}}$$

- Se sigue que

$$\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{LP}''} = (0,1,1,0,1)^{\mathsf{T}}}$$

es la solución entera buscada. ¿Por qué?

El problema de asignación

- Hay $\boxed{n}$ personas disponibles para realizar $\boxed{n}$ tareas

- Cada persona ha de ser asignada a una tarea, y viceversa

- Coste de asignar la persona $\boxed{i}$ a la tarea $\boxed{j}$: $\boxed{c_{ij}\text{€}}$

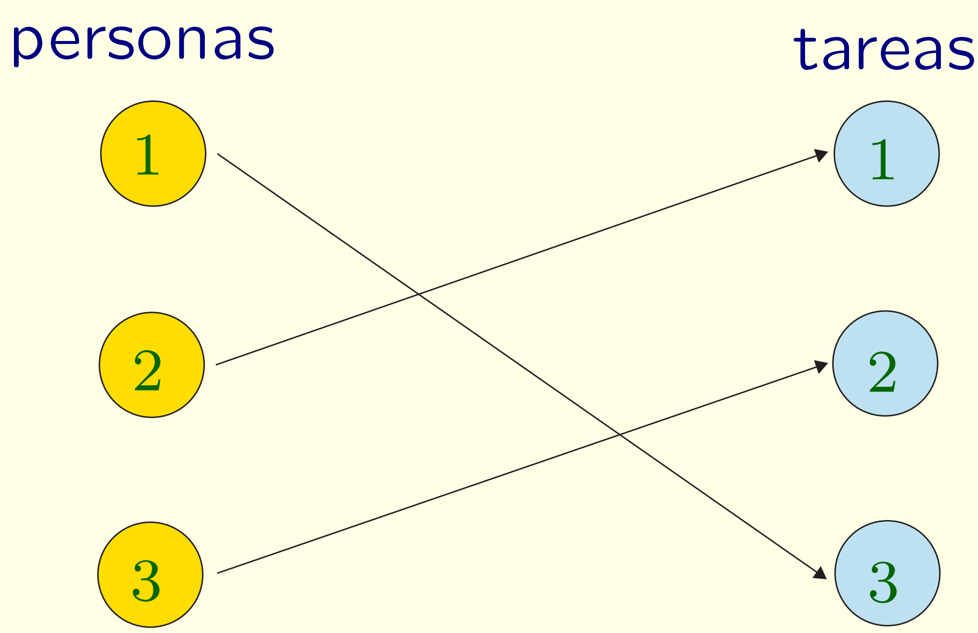
- **Problema:** encontrar una asignación con coste mínimo

Representación gráfica (grafo)

- Muchos problemas de OC se representan mediante **grafos**

- **Grafo** $\boxed{G = (N, E)}$: conjunto de **nodos** $\boxed{N}$, y conjunto de **arcos** $\boxed{E \subset N \times N}$

- Ejemplo de asignación:



Formulación de OC

- Conjunto de **nodos**: $\boxed{N = \{1, \ldots, n\}}$

- Representamos una **asignación individual** por un **arco orientado** $\boxed{e = (i, j)}$: persona $\boxed{i \rightarrow \text{ tarea } j}$

- Conjunto de elementos (**arcos**) de interés:

$$\boxed{E \triangleq \{e = (i, j) \in N \times N : \quad 1 \leq i, j \leq n\}}$$

- **Coste** del elemento/asignación individual $\boxed{e = (i, j)}$: $\boxed{c_{ij} \text{ €}}$

- **Familia de subconjuntos factibles:**

$$\boxed{\mathscr{F} \triangleq \left\{F \in 2^E : \text{ los arcos } (i, j) \in F \text{ dan una asignación válida}\right\}}$$

Familia $\boxed{\mathscr{F}}$

- **Familia de subconjuntos factibles:**

$$\boxed{\mathscr{F} \triangleq \left\{ F \in 2^E : \text{ los arcos } (i,j) \in F \text{ dan una asignación válida} \right\}}$$

- De forma más explícita:

$$\boxed{\mathscr{F} = \{F = \{(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (n, j_n)\} : (j_1, \ldots, j_n) \in \Pi_n\},}$$

donde $\boxed{\Pi_n}$ es el conjunto de permutaciones de $\boxed{N \triangleq \{1, \ldots, n\}}$

- Número de subconjuntos factibles: $\boxed{|\mathscr{F}| = n!}$ (ej: $\boxed{70! \approx 1.2 \times 10^{100}}$)

- No podemos resolver el problema por enumeración completa, salvo para valores pequeños de $\boxed{n}$

- Ejemplo de: **explosión combinatoria**

Formulación de PE

- **Variables de decisión:** ($\boxed{n^2}$ variables)

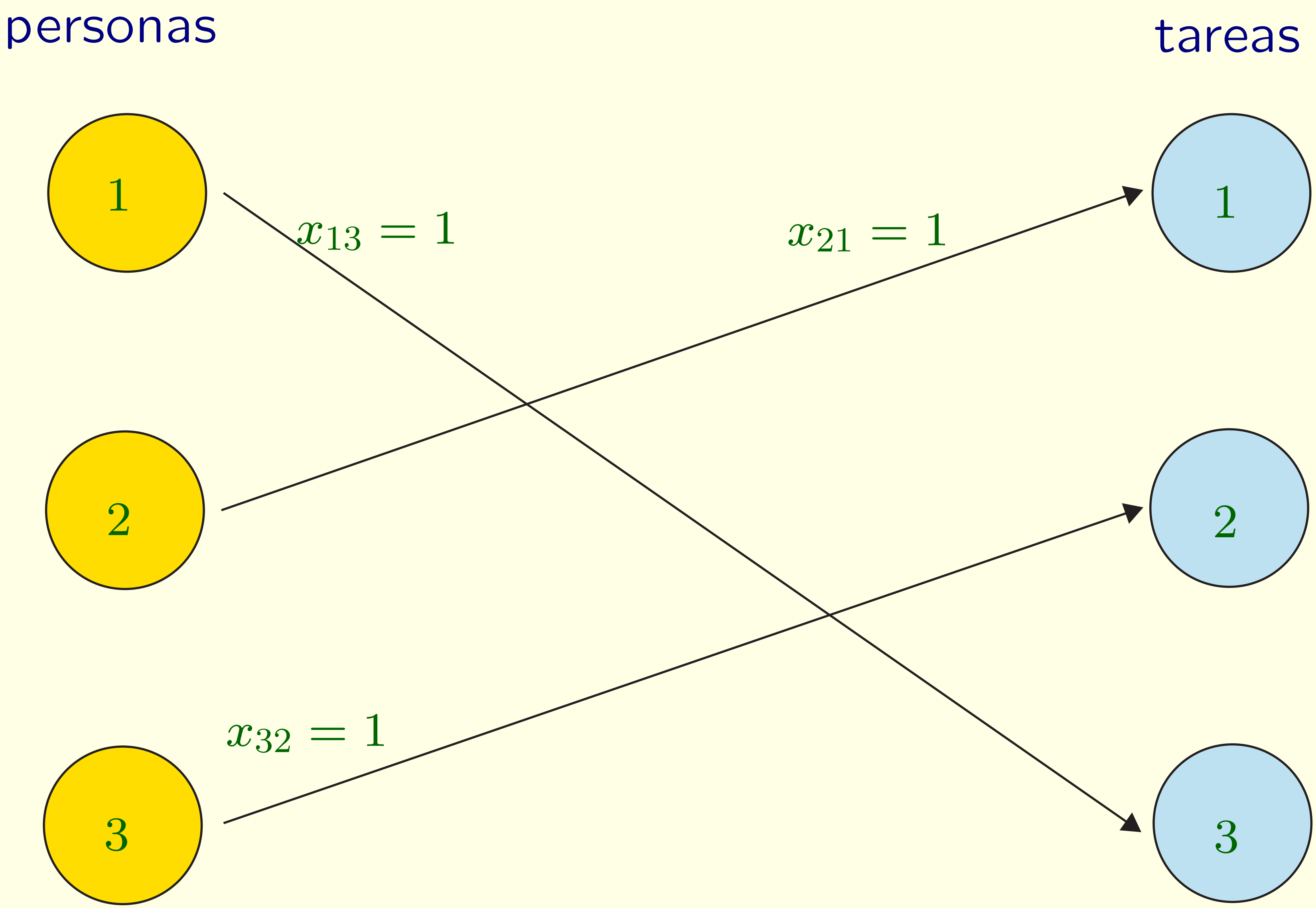
$$\boxed{x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la persona } i \text{ a la tarea } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

- **Objetivo:** $\boxed{\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}$

- **Restricciones:** ($\boxed{2n}$ restricciones)

$$\boxed{\begin{array}{rll} * \text{la persona } i \text{ a una tarea:} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & i = 1, \ldots, n \\ * \text{una persona a la tarea } j\text{:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, & \end{array}}$$

Ej: representación gráfica



Integralidad: Formulación completa de PL

- La relajación de PL es:

$$z^{\mathsf{PL}} = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- Esta formulación tiene la propiedad de **integralidad**: la solución de la relajación lineal es entera
- Tenemos una formulación **completa**

Problemas de flujo en redes

- Clase de modelos de OC **muy importante en aplicaciones**

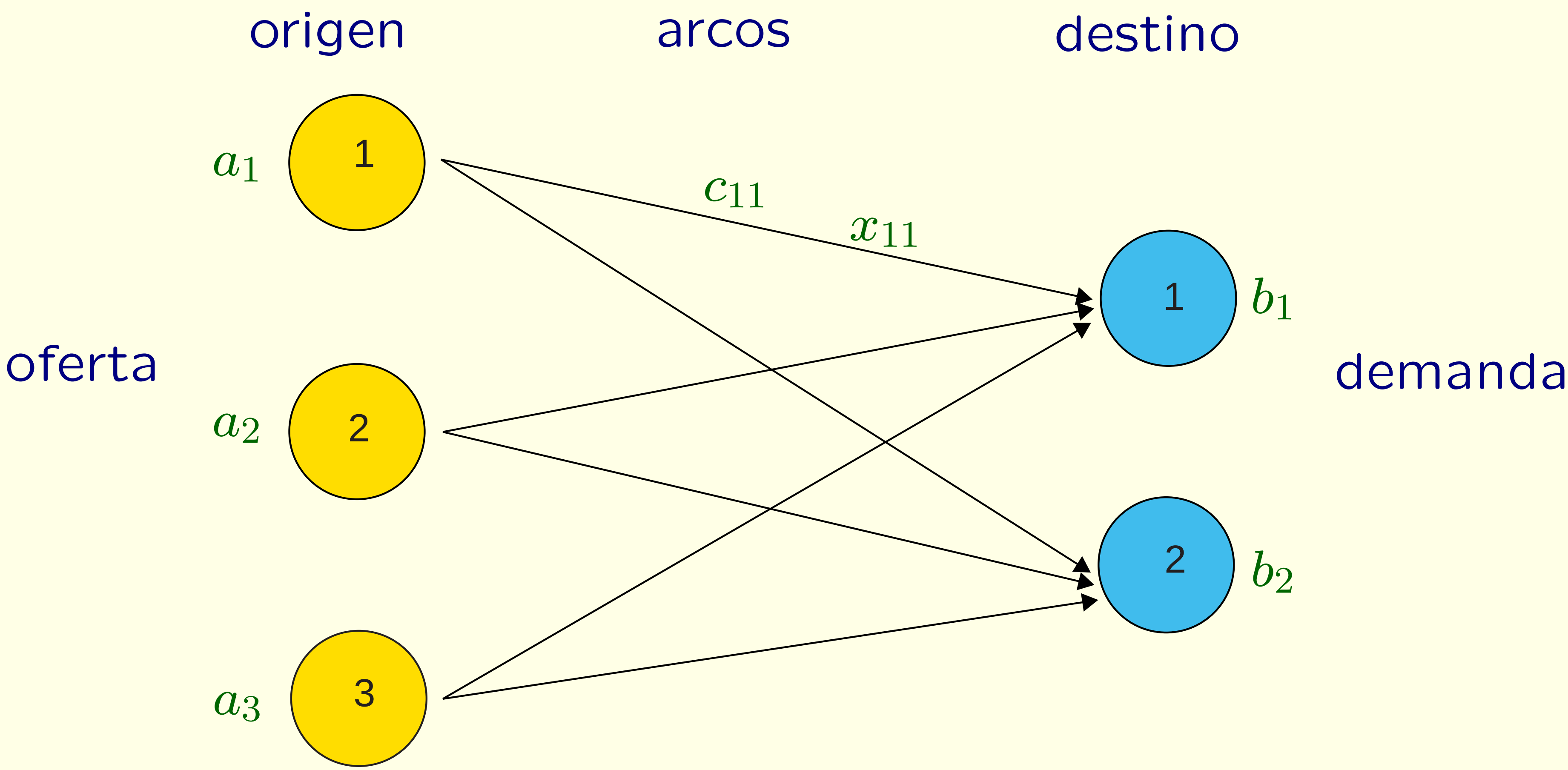
- Modelos para el **transporte de productos** a través de una **red de distribución**

- Los **problemas clásicos de flujo en redes se pueden resolver como programas lineales**: tiene la propiedad de **integralidad**

El problema del transporte (PT)

- **Nodos origen:** $\boxed{M = \{1, \dots, m\}}$ (e.g. fábricas)
- **Nodos destino:** $\boxed{N = \{1, \dots, n\}}$ (e.g. tiendas)
- $\boxed{a_i}$: **oferta** (# de unidades) en el origen $\boxed{i \in M}$
- $\boxed{b_j}$: **demanda** (# de unidades) en el destino $\boxed{j \in N}$
- Suponemos que $\boxed{\sum_i a_i \geq \sum_j b_j}$. ¿Por qué?
- $\boxed{c_{ij}\,€}$: **coste de transporte/unidad** en el **arco** $\boxed{(i, j)}$
- **Conjunto de arcos:** $\boxed{E = M \times N}$
- **Problema:** Encontrar un plan de transporte de coste mínimo

PT: Representación gráfica



PT: formulación de programación entera

- **Variables de decisión:** ($\boxed{mn}$ variables)

$$\boxed{x_{ij} = \#\text{ de unidades transportadas del origen } i \text{ al destino } j}$$

- **Objectivo:** $$\boxed{z^* = \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}}$$

- **Restricciones:** ($\boxed{m + n}$ restricciones)

  * Oferta en el origen $\boxed{i}$: $$\boxed{\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in M}$$

  * Demanda en el destino $\boxed{j}$: $$\boxed{\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in N}$$

  * No-negatividad & integralidad: $\boxed{x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E}$ y entera

PT: propiedad de integralidad

- El problema del transporte tiene la **propiedad de integralidad**

- **Proposición:** Si las ofertas $\boxed{a_i}$ y las demandas $\boxed{b_j}$ son enteras, entonces la solución óptima de la relajación lineal del problema del transporte es entera

- La formulación dada es **completa**

Problema: flujo de coste mínimo (PFCM)

- Encontrar un plan de transporte de coste mínimo para un producto en una red de suministro: **grafo** $\boxed{G = (N, E)}$

- $\boxed{N}$: conjunto de **nodos**; $\boxed{E \subseteq N \times N}$: conjunto de **arcos**

  - $\boxed{c_{ij}}$: coste (€) por unidad transportada por el arco $\boxed{(i, j)}$

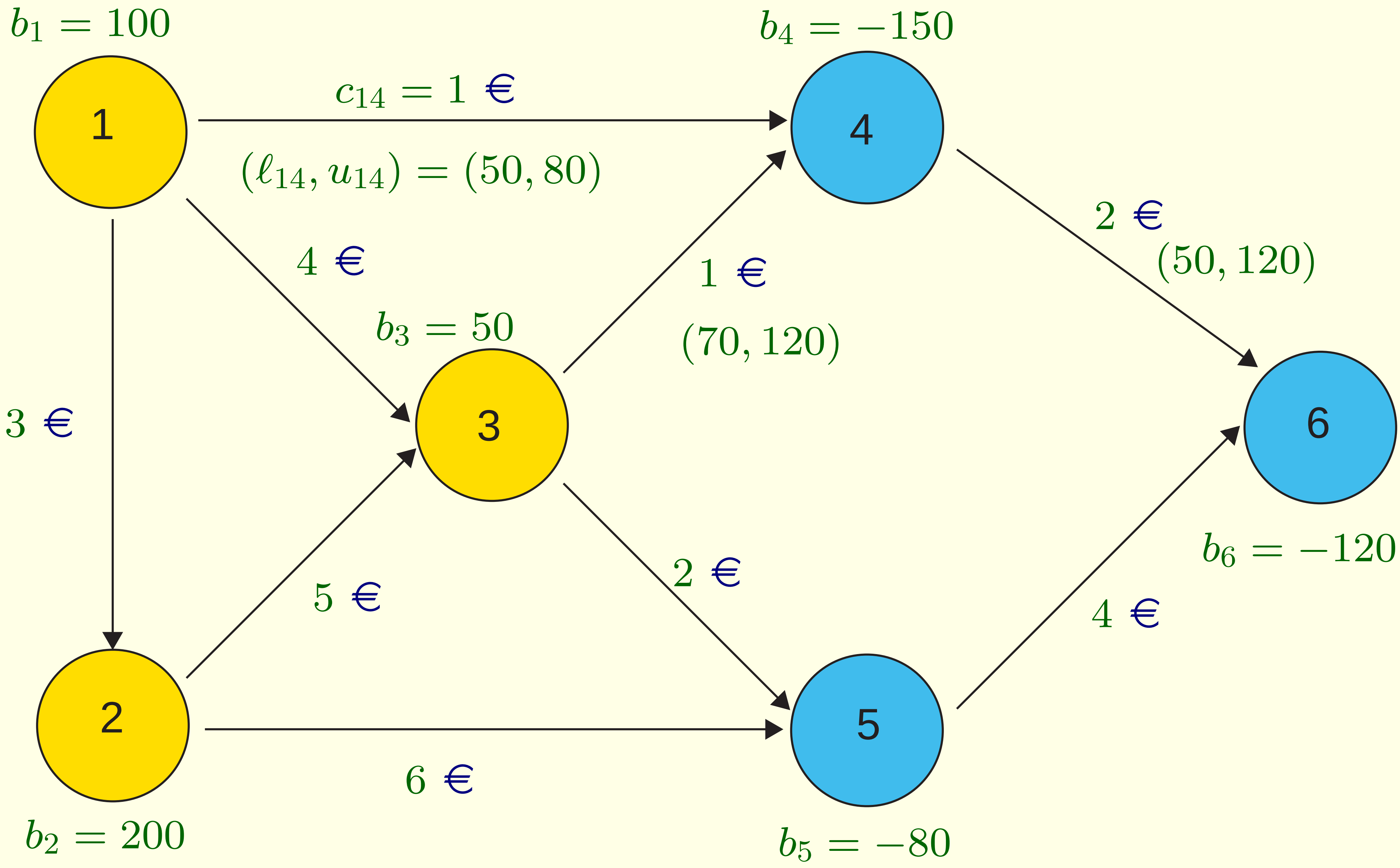
  - $\boxed{b_i}$: **oferta neta** en el nodo $\boxed{i}$; es:

$$\boxed{\begin{cases} > 0 & \text{en nodos origen (oferta: } b_i\text{)} \\ = 0 & \text{en nodos intermedios} \\ < 0 & \text{en nodos destino (demanda: } -b_i\text{)} \end{cases}}$$

  - Suponemos que: demanda total = oferta total, es decir: $\boxed{\sum_{i \in N} b_i = 0}$

- $\boxed{\ell_{ij}}$: límite inferior en el **flujo** por el arco $\boxed{(i,j)}$
- $\boxed{u_{ij}}$: límite superior en el flujo por el arco $\boxed{(i,j)}$

PFCM: representación gráfica



PFCM: formulación de programación entera

- **Variables de decision:**

$x_{ij} =$ # de unidades (flujo) transportadas por el arco $(i,j) \in E$

- **Objectivo:** $z^* = \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

- **Restricciones:**

  * Capacidad superior (flujo/arco): $x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i,j) \in E$

  * Capacidad inferior (flujo/arco): $x_{ij} \geq \ell_{ij}, \quad (i,j) \in E$

  * Balance de flujo: $$\sum_{j:\,(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:\,(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i \in N$$

  * No negatividad e integralidad: $x_{ij} \geq 0$ y entera

PFCM: ecuaciones de balance del flujo

- Restricciones fundamentales
- Dado un nodo $\boxed{i \in N}$:
  - **flujo hacia fuera** del nodo $\boxed{i}$: $\boxed{\displaystyle\sum_{j:\,(i,j)\in E} x_{ij}}$
  - **flujo hacia dentro** del nodo $\boxed{i}$: $\boxed{\displaystyle\sum_{j:\,(j,i)E} x_{ji}}$
  - oferta neta del noto $\boxed{i}$: $\boxed{b_i}$
- Ecuación de balance del flujo para el nodo $\boxed{i}$:

flujo hacia fuera - flujo hacia dentro = oferta neta, i.e.

$$\boxed{\sum_{j:\,(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:\,(j,i)\in E} x_{ji} = b_i}$$

PFCM: propiedad de integralidad

- El PFCM tiene la **propiedad de integralidad**

- **Proposición:** Si las ofertas netas $\boxed{b_i}$ y las capacidades $\boxed{\ell_{ij}, u_{ij}}$, son enteras, entonces la solución óptima de la relajación lineal del PFCM es entera

- La formulación dada es **completa**

PFCM: formulación de PE (ejemplo)

$$z^* = \min c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{23}x_{23} + c_{25}x_{25}$$
$$+ c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} + c_{46}x_{46} + c_{56}x_{56}$$

sujeto a

nodo $1: x_{12} + x_{13} + x_{14} = b_1$

nodo $2: x_{23} + x_{25} - x_{12} = b_2$

nodo $3: x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} = b_3$

nodo $4: x_{46} - x_{14} - x_{34} = b_4$

nodo $5: x_{56} - x_{23} - x_{35} = b_5$

$x_{ij} \leq u_{ij}$

$x_{ij} \geq \ell_{ij}$

$x_{ij} \geq 0$ y entera

PFCM: formulación con vectores/matrices

- Representamos las ecuaciones de balance del flujo (EBF) vía la **matriz de incidencia nodo-arco** $\boxed{\mathbf{A} = (a_{ie})_{i \in N, e \in E}}$:

$$\boxed{a_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{si } e = (i,j) \text{ para algún nodo } j \\ -1 & \text{si } e = (j,i) \text{ para algún nodo } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

- Escribiendo como vectores columna $\boxed{\mathbf{x} = (x_{ij})_{(i,j) \in E}}$, $\boxed{\mathbf{b} = (b_i)_{i \in N}}$, las EBF son: $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$

- Escribimos también como vectores columna

$$\boxed{\mathbf{c} = (c_{ij})_{(i,j) \in E}, \boldsymbol{\ell} = (\ell_{ij})_{(i,j) \in E}, \mathbf{u} = (u_{ij})_{(i,j) \in E}}$$

Matriz de incidencia nodo-arco (ejemplo)

- Matriz $\boxed{\mathbf{A}}$:

nodo\arco	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	-1	0	-1	0	1	1	0	0
4	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Algoritmos generales o especializados

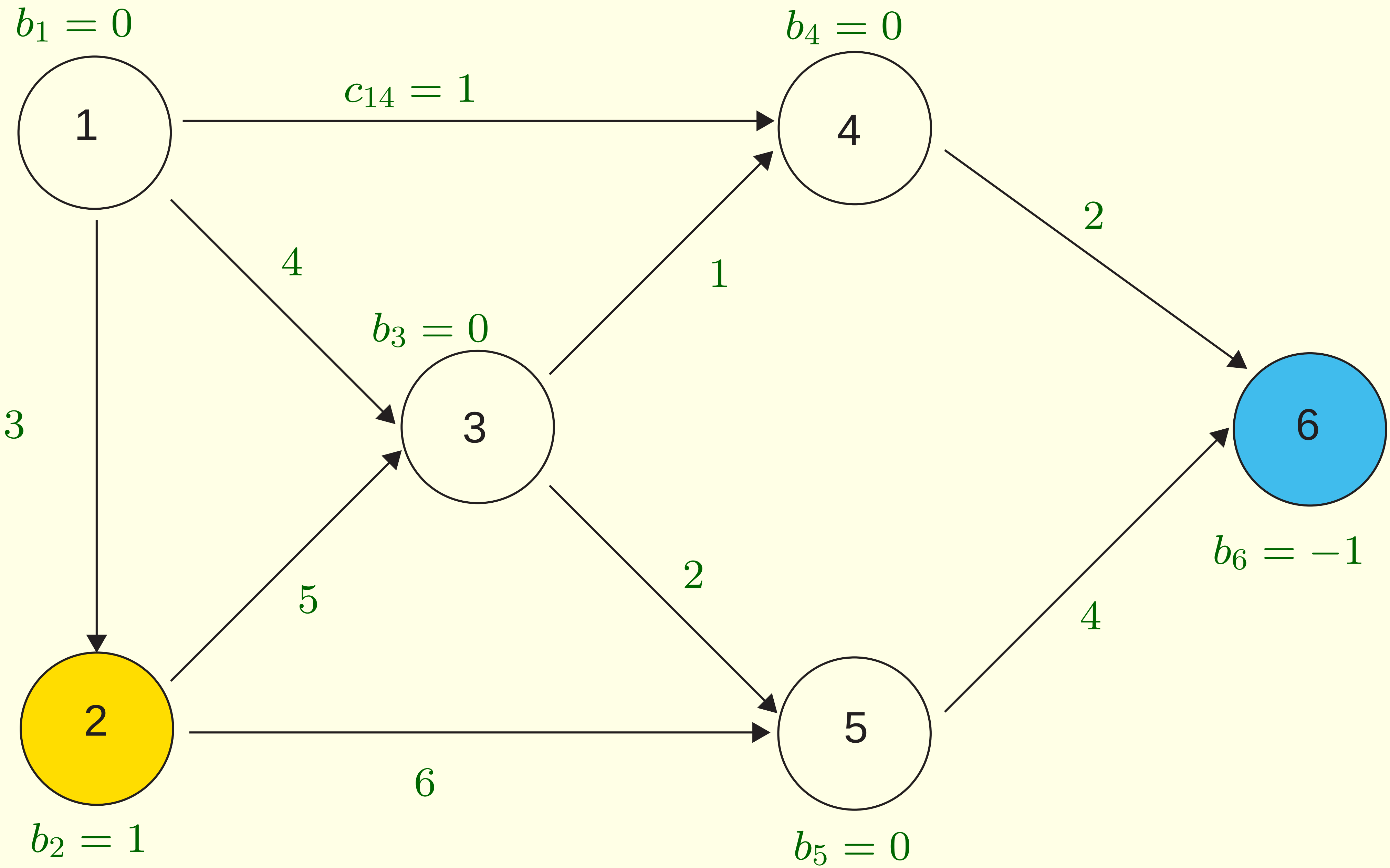
- Como el PFCM se puede formular como un programa lineal, podemos resolverlo con **algoritmos generales para PL**: **Símplex**

- Al aplicar, e.g., el método Símplex, se explota la **estructura especial** para desarrollar **algoritmos especializados**, que son **más eficientes**

El problema de la ruta más corta (PRC)

- Dada: una **red de transporte**: **grafo** $\boxed{G = (N, E)}$
- $\boxed{c_{ij} =}$ distancia correspondiente al **arco** $\boxed{e = (i, j) \in E}$
- $\boxed{|N| = n}$ **nodos**; nodo $\boxed{s}$: **origen**; nodo $\boxed{t}$: **destino**
- **Problema:** ¿Cuál es la ruta más corta (o rápida) para ir del origen al destino?
- Es un caso especial del PFCM
- Definimos $\boxed{\mathbf{b}}$: $\boxed{b_s = 1}$, $\boxed{b_t = -1}$, $\boxed{b_i = 0}$ para $\boxed{i \in N \setminus \{s, t\}}$
- Los parámetros $\boxed{\mathbf{u}}$, $\boxed{\boldsymbol{\ell}}$ del PFCM no son necesarios
- La **propiedad de integralidad** garantiza que la solución de la relajación lineal tendrá $\boxed{x_{ij}^* \in \{0, 1\}}$, dando una ruta óptima

PRMC: representación gráfica



El problema del flujo máximo (PFM)

- **Red de transporte** (grafo) $\boxed{G = (N, E)}$

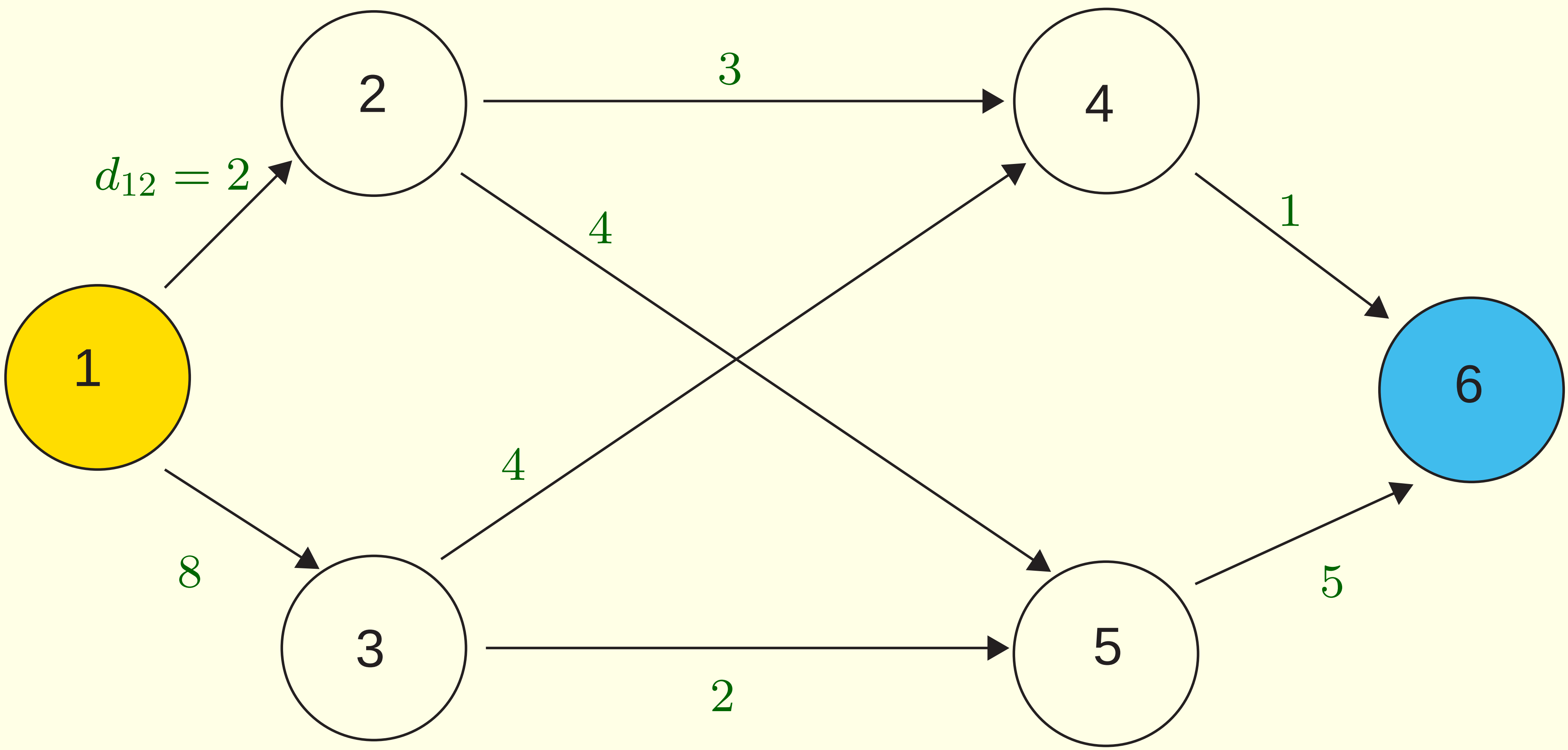
- Nodo **origen**: $\boxed{s}$; nodo **destino**: $\boxed{t}$

- $\boxed{d_{ij}}$: **capacidad** máxima de transporte por el arco $\boxed{(i, j) \in E}$

- **Problema:** encontrar el plan de transporte que maximiza el flujo transportado de $\boxed{s}$ a $\boxed{t}$

- El flujo máximo es la **capacidad de la red**

PFM: representación gráfica (ejemplo)



PFM: formulación de programación entera

- **Variables de decisión:** $\boxed{x_{ij} =}$ flujo en el arco $\boxed{(i,j) \in E}$

- **Objetivo:** $\boxed{z^* = \max \sum_{j \in N:\, (s,j) \in E} x_{sj}}$ (flujo fuera de $\boxed{s}$)

- **Restricciones:**

  - Capacidad: $\boxed{x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i,j) \in E}$

  - Balance del flujo:

$$\boxed{\sum_{j \in N:\, (i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j \in N:\, (j,i) \in E} x_{ji} = 0, \quad i \in N \setminus \{s,t\}}$$

  - $\boxed{x_{ij} \geq 0 \text{ y entera}, \quad (i,j) \in E}$

PFM: propiedad de integralidad

- El PFM tiene la **propiedad de integralidad**

- **Proposición:** Si las capacidades $\boxed{d_{ij}}$ son enteras, entonces la solución óptima de la relajación lineal del PFM es entera

- La formulación dada es **completa**