# Programación entera: Ejemplos, resolución gráfica, relajaciones lineales

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

# Esquema

- Programación entera: definición, motivación, ejemplos
- Resolución gráfica
- Relajaciones de programación lineal
- Formulaciones reforzadas y formulaciones completas
- Brecha de integralidad y test de optimalidad

# ¿Qué es un programa entero?

- Consideremos un **programa lineal**, p. ej.

$$
\boxed{\begin{aligned}
(\mathsf{PL}) \quad z^{\mathsf{PL}} = \max\, & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
& \text{sujeto a} \\
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}}
$$

- Supongamos que los valores de interés de las **variables de decisión** $\boxed{x_j}$ son **enteros**

- Ej: $\boxed{x_j =}$ número de automóviles del modelo $\boxed{j}$ producidos

# ¿Qué es un programa entero?

- Añadiendo **restricciones de integralidad** en las variables $\boxed{x_j}$, obtenemos un **programa (lineal) entero**:

$$\begin{array}{lll} \text{(PE)} & z^{\text{PE}} = \max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\ & \quad\text{sujeto a} & \\ & \quad a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & \quad \boxed{x_j \ge 0 \text{ y entera}}, & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- Si los valores de interés de las variables $\boxed{x_j}$ son **binarios** (0 ó 1), obtenemos un **programa entero binario**:

$$\boxed{x_j \in \{0, 1\}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

# Relajaciones de programación lineal

- Dada una **formulación de programación entera**,

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{PE}) & z^{\mathsf{PE}} = \max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\
& \text{sujeto a} & \\
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\
& \boxed{x_j \geq 0 \text{ y entero}}, & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

obtenemos su **relajación de programación lineal (PL)**:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{PL}) & z^{\mathsf{PL}} = \max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\
& \text{sujeto a} & \\
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n &
\end{array}
$$

- **Relación entre valores óptimos:** $\boxed{z^{\mathsf{PE}} \leq z^{\mathsf{PL}}}$ ¿Por qué?

# Ej: selección óptima de proyectos

- Problema de **selección óptima de proyectos**:

| Proyecto | Gastos/año (M €) 1 | 2 | 3 | Retorno |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 8 | 20 |
| 2 | 4 | 7 | 10 | 40 |
| 3 | 3 | 9 | 2 | 20 |
| 4 | 7 | 4 | 1 | 15 |
| 5 | 8 | 6 | 10 | 30 |
| Presupuesto | 25 | 25 | 25 | |

- Seleccionar un conjunto de proyectos que maximice el retorno total, sujeto a las restricciones presupuestarias

# Ej: formulación de programación entera

- **Variables de decisión**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona el proyecto } j; \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- Sólo los **valores binarios** de las $\boxed{x_j}$ tienen sentido

- **Objetivo**: $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = \max 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5}$

- **Restricciones:**

$$\begin{array}{rcll} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 & \leq & 25 & \text{(presupuesto año 1)} \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 & \leq & 25 & \text{(presupuesto año 2)} \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 & \leq & 25 & \text{(presupuesto año 3)} \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 5 & & & \text{(variables binarias)} \end{array}$$

# Ej: relajación de programación lineal

- **Relajación de programación lineal:**

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PL}) \quad z^{\mathsf{PL}} = \max\, & 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25 \\
& x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25 \\
& 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25 \\
& \boxed{0 \leq x_j \leq 1}, \quad j = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

- **Solución óptima lineal:** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL}} = (0.5789,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0.7368)^{\mathsf{T}}}$, $\boxed{Z^{\mathsf{PL}} = 108.68}$,
- **Solución lineal redondeada:** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{RPL}} = (1, 1, 1, 1, 1)^{\mathsf{T}}}$ (**¡no es factible para (PE)!**)

# Ej: solución óptima entera

- **Formulación de programación entera:**

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PE}) \quad z^{\mathsf{PE}} = \max\, & 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25 \\
& x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25 \\
& 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25 \\
& x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

- **Solución óptima entera:** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PE}} = (1,1,1,1,0)^{\mathsf{T}}}$, $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = 95}$,

- **Observación:** $\boxed{z^{\mathsf{PE}} < z^{\mathsf{PL}}}$

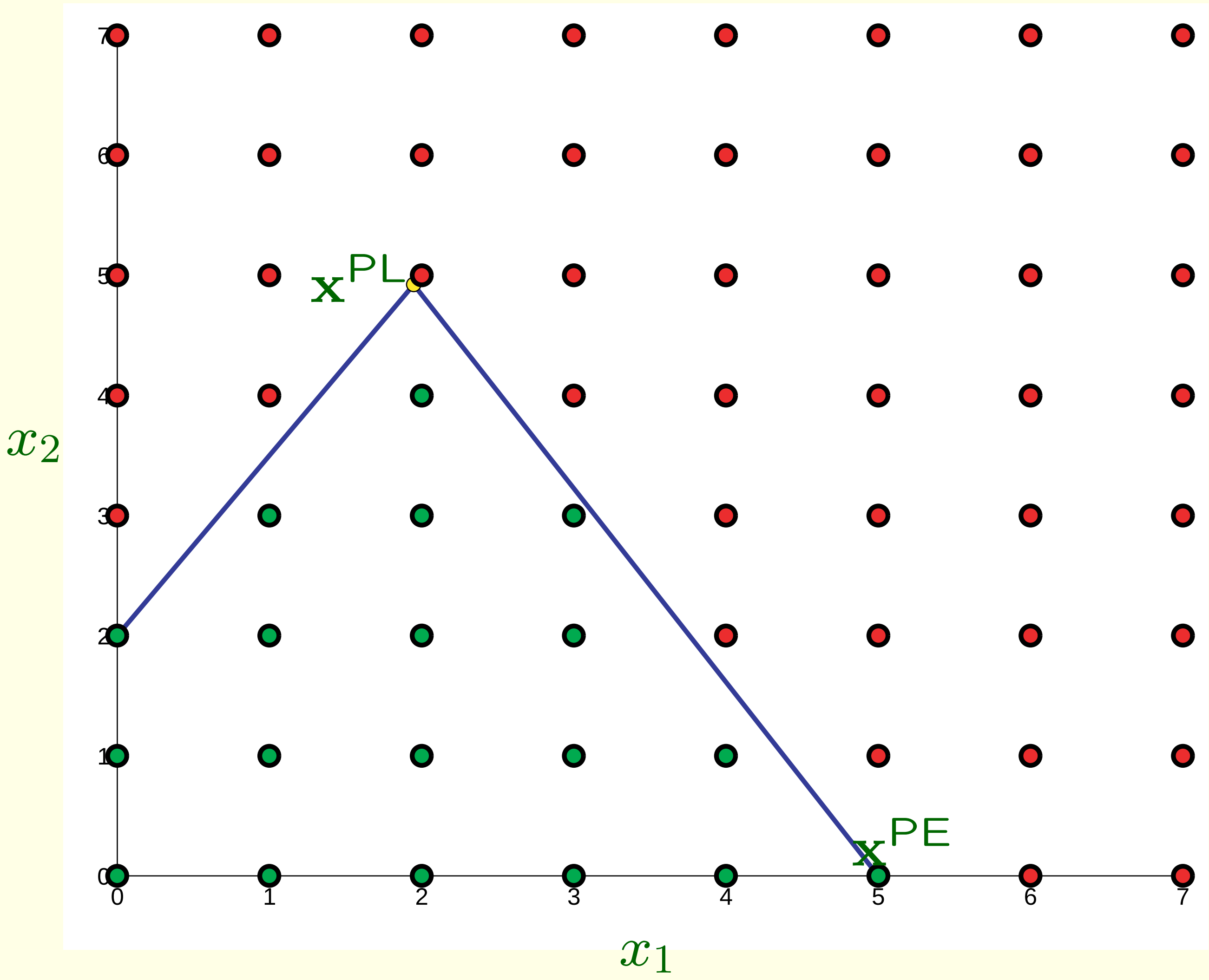
# Ej. 2: programa entero y relajación lineal

- Consideremos la siguiente **formulación de un programa entero** y su **relajación lineal**:

| | |
|---|---|
| (PE) $z^{\text{PE}} = \max x_1 + 0.64x_2$ <br> sujeto a <br> $50x_1 + 31x_2 \leq 250$ <br> $-3x_1 + 2x_2 \leq 4$ <br> $x_1, x_2 \geq 0$ y enteros | (PL) $z^{\text{PL}} = \max x_1 + 0.64x_2$ <br> sujeto a <br> $50x_1 + 31x_2 \leq 250$ <br> $-3x_1 + 2x_2 \leq 4$ <br> $x_1, x_2 \geq 0$ |

- Resolveremos ambos gráficamente

# Ej: resolución gráfica



# Ej: Soluciones óptimas: entera y lineal

- **Solución óptima entera:** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PE}} = (5,0)^{\mathsf{T}}}$, $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = 5}$,

- **Solución óptima lineal:**

$\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL}} = (\frac{376}{193}, \frac{950}{193})^{\mathsf{T}} = (1.9482,\ 4.9223)^{\mathsf{T}}}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL}} = 5.0984}$,

- Redondeando $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL}}}$, obtenemos: $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{RPL}} = (2,5)}$: ¡**no es factible para (PE)**!

# Formulaciones enteras reforzadas

- Consideremos el programa entero y su relajación lineal:

| | |
|---|---|
| (PE) $\quad z^{\mathsf{PE}} = \max \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ <br> sujeto a <br> $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ <br> $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y entero | (PL) $\quad z^{\mathsf{PL}} = \max \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ <br> sujeto a <br> $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ <br> $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ |

- A menudo, se intenta **reforzar la formulación (PE)** con **desigualdades válidas**

$$e_{i1}x_1 + \cdots + e_{in}x_n \leq f_i, \quad i = 1, \ldots, p, \quad \text{ó} \quad \mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{f},$$

manteniendo **el mismo conjunto factible entero**:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\right\}$$

# Formulaciones enteras reforzadas

- La **región factible lineal** ha de reducirse:

$$\boxed{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}}$$

- **Formulación reforzada** $\boxed{(\mathsf{PE}')}$, con **relajación** $\boxed{(\mathsf{PL}')}$:

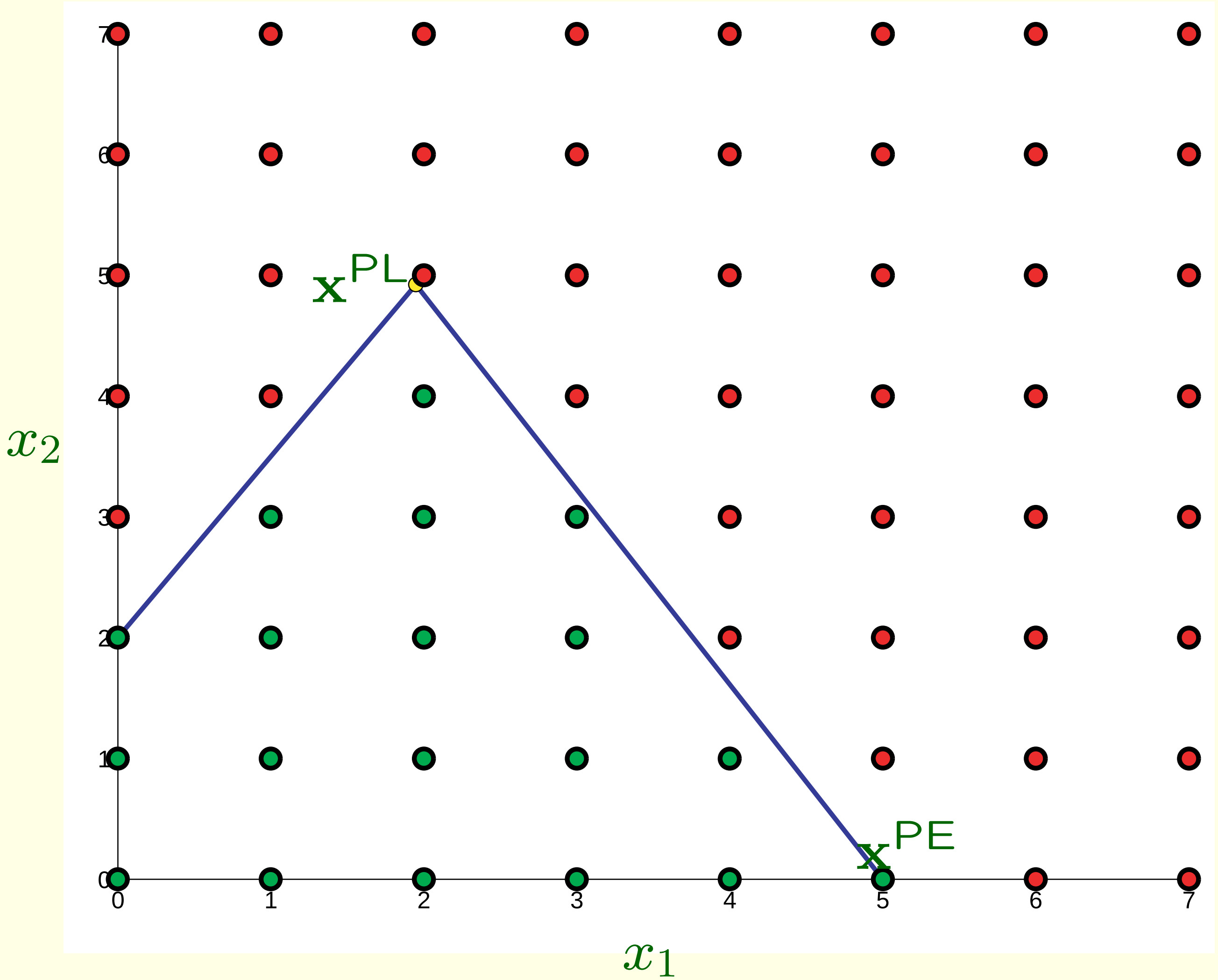
| | |
|---|---|
| $(\mathsf{PE}') \quad z^{\mathsf{PE}'} = \max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ | $(\mathsf{PL}') \quad z^{\mathsf{PL}'} = \max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ |
| sujeto a | sujeto a |
| $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ | $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ |
| $\mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}$ | $\mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}$ |
| $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y entero | $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ |

- **Relaciones entre valores:** $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = z^{\mathsf{PE}'} \leq z^{\mathsf{PL}'} \leq z^{\mathsf{PL}}}$
- La formul. $\boxed{(\mathsf{PE}')}$ es **más fuerte** que $\boxed{(\mathsf{PE})}$ si $\boxed{z^{\mathsf{PL}'} < z^{\mathsf{PL}}}$

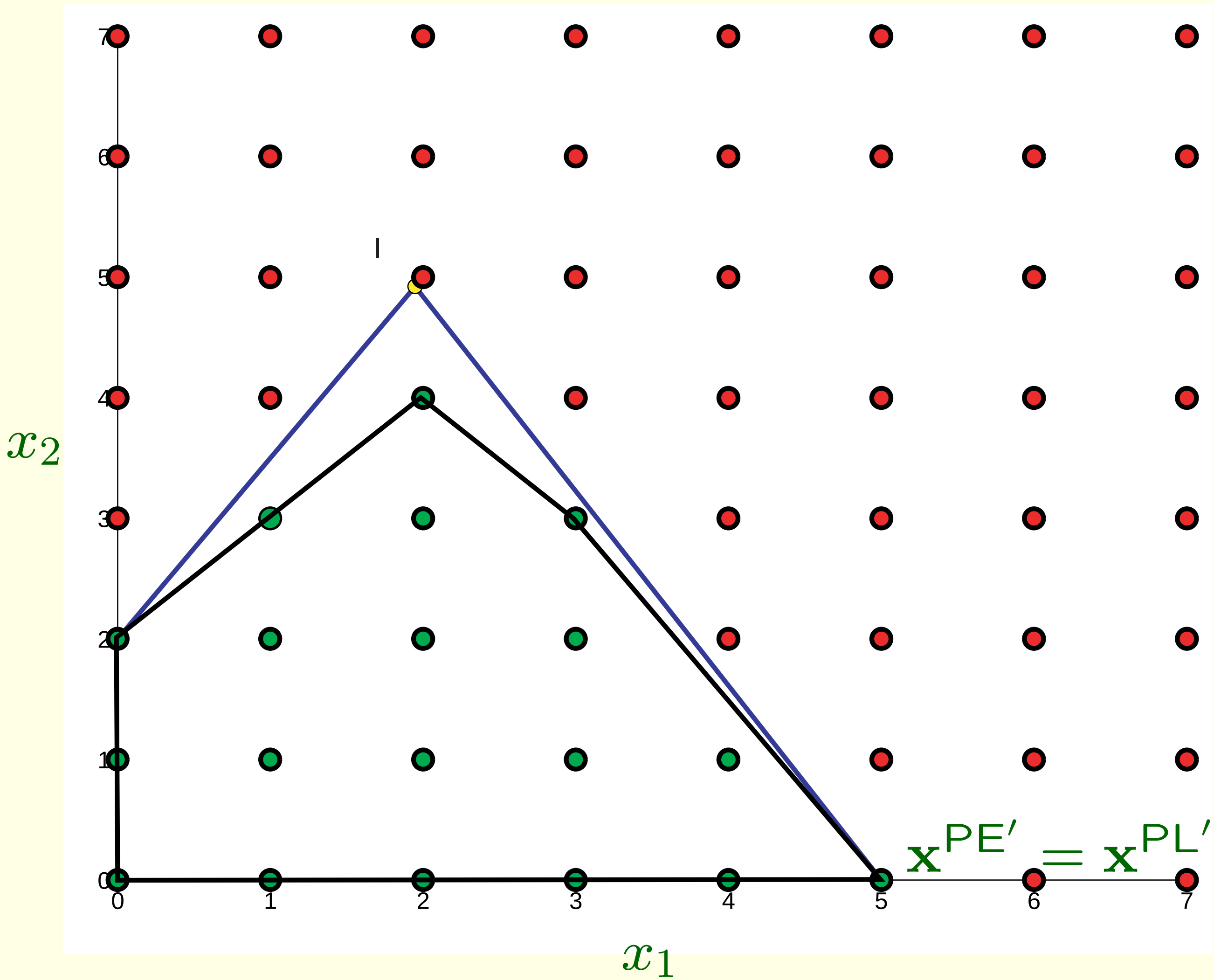
# Formulaciones enteras completas

- Una **formulación entera** $\boxed{\text{(PE)}}$ es **completa** si $\boxed{z^{\text{PE}} = z^{\text{PL}}}$
- Si tenemos una formulación completa de un programa entero, lo podemos resolver como un programa lineal
- ¿Existe siempre una formulación entera completa?
- ¡Sí! Aunque puede ser impracticable obtenerla, debido al gran número de desigualdades válidas necesarias
- Nos conformamos con obtener **formulaciones enteras reforzadas**: proporcionan tiempos más rápidos de resolución
- Obtendremos la **formulación completa** en el ejemplo

# Ej: formulación (PE)



# Ej. 2: formulación completa $(\mathbf{PE}')$



# Ej: formulación completa $\boxed{(\mathsf{PE}')}$

| | |
|---|---|
| $(\mathsf{PE}')\ z^{\mathsf{PE}'} = \max x_1 + 0.64x_2$ | $(\mathsf{PL}')\ z^{\mathsf{PL}'} = \max x_1 + 0.64x_2$ |
| sujeto a | sujeto a |
| $50x_1 + 31x_2 \leq 250$ | $50x_1 + 31x_2 \leq 250$ |
| $-3x_1 + 2x_2 \leq 4$ | $-3x_1 + 2x_2 \leq 4$ |
| $-x_1 + x_2 \leq 2$ | $-x_1 + x_2 \leq 2$ |
| $x_1 + x_2 \leq 6$ | $x_1 + x_2 \leq 6$ |
| $3x_1 + 2x_2 \leq 15$ | $3x_1 + 2x_2 \leq 15$ |
| $x_1, x_2 \geq 0$ y enteras | $x_1, x_2 \geq 0$ |

- Tenemos que: $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = z^{\mathsf{PE}'} = z^{\mathsf{PL}'} < z^{\mathsf{PL}}}$
- Observación: La **región factible lineal** es la **envoltura convexa de los puntos enteros factibles**

# Brecha de integralidad de una relajación

- Consideremos la **formulación entera**

$$\boxed{(\mathsf{PE}) \quad z^{\mathsf{PE}} = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ y entero}\right\}}$$

y su **relajación lineal**

$$\boxed{(\mathsf{PL}) \quad z^{\mathsf{PL}} = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}}$$

- **Def:** La **brecha de integralidad de la relajación** $\boxed{(\mathsf{PL})}$ es: $\boxed{z^{\mathsf{PL}} - z^{\mathsf{PE}} \geq 0}$

# Calidad de soluciones y test de optimalidad

- Supongamos que tenemos una **solución entera factible** $\boxed{\mathbf{x}^*}$, con valor $\boxed{z^* > 0}$, de un programa entero $\boxed{(PE)}$ con relajación $\boxed{(PL)}$. ¿Cómo podemos saber si es óptima? ¿Y estimar su grado de suboptimalidad?
- Utilizaremos la **brecha de integralidad** $\boxed{z^{\mathsf{PL}} - z^{\mathsf{PE}}}$. Como

$$\boxed{0 < z^* \leq z^{\mathsf{PE}} \leq z^{\mathsf{PL}}}$$

**acotamos por arriba** la **brecha relativa de suboptimalidad** de $\boxed{\mathbf{x}^*}$: $\boxed{\dfrac{z^{\mathsf{PE}} - z^*}{z^{\mathsf{PE}}} \leq \dfrac{z^{\mathsf{PL}} - z^*}{z^*}}$

- **Test de optimalidad en programación entera:** si $\boxed{z^* = z^{\mathsf{PL}}}$, entonces $\boxed{\mathbf{x}^*}$ es óptima entera ($\boxed{z^* = z^{\mathsf{PE}}}$)
- ¿Y si $\boxed{z^* < z^{\mathsf{PL}}}$? Puede que $\boxed{\mathbf{x}^*}$ sea óptima o no. Para saberlo, necesitamos una **formulación más fuerte**

# Criterio de parada

- A menudo, el tiempo de solución de los programas enteros que aparecen en aplicaciones es demasiado grande
- En lugar de esperar a que se encuentre la solución óptima, se utiliza un **criterio de parada** más realista
- **Criterio de parada**: Parar cuando se encuentre una solución factible entera $\boxed{\mathbf{x}^*}$ con valor $\boxed{z^* > 0}$ y una relajación lineal con valor $\boxed{z^{\mathsf{PL}}}$ que cumplan $\boxed{\dfrac{z^{\mathsf{PL}} - z^*}{z^*} \leq \epsilon,}$ donde $\boxed{0 < \epsilon < 1}$ es un **parámetro de tolerancia** dado; o bien parar cuando el **número de iteraciones** alcance un valor máximo dado
- En el menú de Opciones del Solver podemos cambiar ambos parámetros (Tolerancia, en porcentaje), y Número máximo de iteraciones

# Calidad de soluciones (ejemplo)

- Consideremos el modelo de selección de proyectos
- **Solución factible**: $\boxed{\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 0, 1)^{\mathsf{T}}}$, con $\boxed{z^* = 70\,\text{M €}}$
- Si no conociéramos el valor óptimo entero, $\boxed{z^{\mathsf{PE}}}$, ¿cómo podríamos acotar por arriba, i.e. dar una cota superior en la **brecha relativa de suboptimalidad** $\boxed{\dfrac{z^{\mathsf{PE}} - z^*}{z^{\mathsf{PE}}}}$?
- Resolvemos la **relajación lineal**, con valor $\boxed{z^{\mathsf{PL}} \approx 108.68}$
- La **cota superior** es: $\boxed{\dfrac{z^{\mathsf{PL}} - z^*}{z^*} = \dfrac{108.68 - 70}{70} \approx 0,55}$
- **Brecha relativa de suboptimalidad** de $\boxed{\mathbf{x}^*}$: $\boxed{\leq 55\%}$

# Programas enteros mixtos (ejemplo)

- Un **programa entero mixto** tiene algunas variables enteras y otras continuas (como en programación lineal)

- Ejemplo:

$$z^{\mathsf{PEM}} = \max -x_0 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j$$

sujeto a

$$x_0 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j \leq n$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

$x_0 \geq 0$ (esta variable es continua)

# Ej: Asignación de tripulaciones a vuelos

- ¿Cómo asignan las compañías aéreas tripulaciones a vuelos?
- Conjunto de vuelos: $\boxed{\{1, \ldots, m\}}$. Ej: A 7:15am$\rightarrow$ B 8:30am
- Conjunto de asignaciones factibles de tripulaciones: $\boxed{M_1, M_2, \ldots, M_n \subset \{1, \ldots, m\}}$. Ej: A 7:15am$\rightarrow$ B 8:30am, B 9:00am$\rightarrow$C 11:00am, C 12:00$\rightarrow$ A 2:30pm.
- Datos: matriz de incidencia $\boxed{\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}}$, con

$$\boxed{a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la asignación } j \text{ cubre el vuelo } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$$

- Coste de la asignación $\boxed{j}$: $\boxed{c_j \text{ €}}$

- **Problema:** Encontrar un conjunto de asignaciones que cubra todos los vuelos a coste mínimo

# Ej: Formulación de PE Binaria

- **Variables de decisión:**

$$\boxed{x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona la asignación } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$$

- **Objetivo:** $\boxed{z^{\mathsf{PE}} = \min c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}$

- **Restricciones:**

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{El vuelo } i \text{ cubierto: } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 1, \quad i = 1, \ldots, m \\ \text{Variables binarias: } x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}}$$

# Ej: Localización óptima

- ¿Dónde localizar servicios de emergencia?
- Conjunto de posibles localizaciones: $\boxed{\{1,\ldots,n\}}$
- Coste de la localización $\boxed{j}$: $\boxed{c_j\,€}$
- Distritos de la ciudad: $\boxed{\{1,\ldots,m\}}$
- Distritos cubiertos desde $\boxed{j}$: $\boxed{M_j \subset \{1,\ldots,m\}}$
- Datos: matriz de incidencia $\boxed{\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}}$, con

$$\boxed{a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si desde la localización } \boxed{j} \text{ se cubre el distrito } \boxed{i} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$$

- Problema: encontrar un conjunto de localizaciones que cubra todos los distritos a coste mínimo

# Ej: Formulación de PE Binaria

- **Variables de decisión:**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona la localización } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- **Objetivo:** $z^{\mathsf{PE}} = \min c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

- **Restricciones:**

Distrito $i$ cubierto: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq 1, \quad i = 1, \ldots, m$

Variables binarias: $x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n$

# Formulación de condiciones lógicas

- Actividades (pueden realizarse o no): $\boxed{\{1, \ldots, n\}}$
- **Variables de decisión:** $\boxed{x_1, x_2 \ldots, x_n}$, con

$$\boxed{x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza la actividad } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$$

- Ej: No se pueden realizar más de dos actividades:

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 2}$$

- Ej:Si se realiza la actividad 2, se debe realizar la 4:

$$\boxed{x_2 - x_4 \leq 0}$$