Introducción a la IO

Formulaciones de programación lineal Resolución por ordenador (Excel)

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- Investigación operativa

- Formulaciones de programación lineal (PL)

- Ejemplos de formulaciones de PL

- Resolución mediante hojas de cálculo (Excel)

Temario y bibliografía básica

- **Temas:**

1. Tema 1: Programación lineal
2. Tema 2: Programación entera
3. Tema 3: Flujo en redes y optimización combinatoria
4. Tema 4: Teoría de colas
5. Tema 5: Simulación

- **Bibliografía básica:** ver pág. web

  - Transparencias de clase, y apuntes del profesor
  - H.A. Taha, *Investigación de Operaciones*
  - F.S. Hillier & G.J. Lieberman, *Introducción a la Investigación de Operaciones*

Investigación Operativa (IO)

- Es la ciencia e ingeniería de las decisiones: ver www.scienceofbetter.org
- **Interdisciplinar:** Informática, Matemáticas, Gestión de Empresas, Ingenierías, Economía, . . .
- **Origen:** Investigación en operaciones militares de las fuerzas aliadas durante la 2GM; después, extensión a la empresa y al sector público
- **Cuantitativa:** Basada en modelos matemáticos, resueltos por ordenador
- **Evolución:** Ligada a la de los ordenadores
- **Metodología IO:** sistema real $\rightarrow$ formulación del modelo $\rightarrow$ análisis y algoritmos $\rightarrow$ resolución numérica por ordenador $\rightarrow$ interpretación $\rightarrow$ implementación $\rightarrow$ sistema real

El valor añadido de la IO

- Mejora del rendimiento de sistemas tecnológicos y empresas

- Mejora de la productividad y la eficiencia

- Ayuda a la toma de decisiones

- Mejora de la asignación de recursos

- Mejora de la planificación: de operaciones, táctica y estratégica

Aplicaciones reales de la IO

- Ver: `www.informs.org/Prizes/EdelmanPrizeDetails.html`

- Asignación dinámica de turnos de trabajo en British Telecom

- Asignación de tripulaciones en Continental Airlines

- Planificación de la cadena de suministro en IBM

- Mejora del rendimiento de centros de atención telefónica ("call centers")

- Mejora de operaciones de reparto postal en UPS

Formulando problemas de optimización

- **Elementos de una formulación:**

1. **Variables de decisión:** (ej:, ¿Qué cantidad $\boxed{x_j}$ se ha de fabricar de cada producto $\boxed{j = 1, \ldots, n}$?

$$\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)}$$

2. **Objetivo** (ej: maximizar beneficio ó minimizar coste):

$$\boxed{\max f(\mathbf{x}) \text{ ó } \min f(\mathbf{x})}$$

3. **Restricciones** en las decisiones factibles (ej: presupuesto limitado):

$$\boxed{g_1(\mathbf{x}) \leq b_1, g_2(\mathbf{x}) \geq b_2, g_3(\mathbf{x}) = b_3, \ldots}$$

Programación lineal (PL)

- Clase más importante de problemas de optimización
- Base para la resolución de otros problemas de optimización
- Uno de los modelos matemáticos más aplicados
- **Características:**

1. **Variables de decisión continuas**: $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n}$
2. **Objetivo lineal**: $\boxed{\min \text{ ó } \max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}$
3. **Restricciones lineales**: para $\boxed{i = 1, \ldots, m}$,

$$\boxed{a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i \text{ ó } a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i}$$

$$\boxed{\text{ó } a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \geq b_i}$$

Ej: planificación de la producción

- Una empresa fabrica: Producto 1 (Pr1) y Producto 2 (Pr2)
- Utiliza materias primas (recursos): M1 y M2
- Datos:

	Pr1	Pr2	Disponible/día (tons)
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Beneficio/ton (k€)	5	4	

- Más restricciones:

  Demanda de Pr2: Demanda/día para Pr2: $\leq$ 2 tons.

  - Diferencia: producción Pr2 - producción Pr1 $\leq$ 1

Ej (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   Producción/día de Pr1 y Pr2:

   $\boxed{x_1, x_2}$

2. *Objetivo:*

   maximizar beneficio/día:

   $\boxed{\max 5x_1 + 4x_2}$

3. *Restricciones:*

uso de M1:	$6x_1$	$+$	$4x_2$	$\leq$	24
uso de M2:	x_1	$+$	$2x_2$	$\leq$	6
demanda de Pr2:			x_2	$\leq$	2
diferencia:	$-x_1$	$+$	x_2	$\leq$	1
no negatividad:	$x_1,$		x_2	$\geq$	0

Resolución con ordenador (Excel)

- Excel incluye el complemento **Solver** (activarlo en Herramientas/Complementos)
- El **Solver** de Excel resuelve problemas de PL
- Una de las herramientas más difundidas de resolución de modelos de optimización: hojas de cálculo (ej. Excel)
- También: modelización con hojas de cálculo (no algebraica)
- **Principios de modelización con hojas de cálculo**:
  - Separar los datos del modelo
  - Seguir un formato bien estructurado y fácil de entender
- Veremos numerosos ejemplos durante el curso

Ej: planificación de la producción (general)

- Una empresa fabrica: Producto $\boxed{j}$ (Pr$_j$), $\boxed{j = 1, \ldots, n}$
- Utiliza materias primas (recursos): M$_i$, $\boxed{i = 1, \ldots, m}$
- Datos:

	Pr$_1$	$\cdots$	Pr$_n$	Disponible/día
M$_1$	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
M$_m$	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Beneficio/unidad (€)	c_1	$\cdots$	c_n	

Ej (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   Producción/día de Pr$_j$:

   $\boxed{x_j, \quad j = 1, \ldots, n}$

2. *Objetivo:*

   maximizar beneficio/día:

   $\boxed{\max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}$

3. *Restricciones:*

$$\boxed{\begin{array}{rrcrll} \text{uso de M}_i\text{:} & a_{i1}x_1 + & \cdots & + a_{in}x_n & \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\ \text{no negatividad:} & & & x_j & \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}}$$

Ej: el problema de la dieta

- Modelo clásico de PL: ¿Cuál es la dieta más económica que satisface las necesidades nutricionales?

- Ej: Una granja utiliza 800 kg de pienso/día

- "pienso": mezcla de maíz y soja

- Datos (kg/kg):

	Maíz	Soja	proporción requerida
Proteínas	$0{,}09$	$0{,}60$	$\geq 30\,\%$
Fibra	$0{,}02$	$0{,}06$	$\leq 5\,\%$
coste (€/kg)	$0{,}30$	$0{,}90$	

Ej: (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   proporción de maíz ($\boxed{x_1}$) y soja ($\boxed{x_2}$) en la mezcla/kg

2. *Objetivo:*

   minimizar coste/kg:

   $$\boxed{\min 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2}$$

3. *Restricciones:*

$$\boxed{\begin{array}{rrcrl} \text{total:} & x_1 & + & x_2 & = 1 \\ \text{proteínas:} & 0{,}09x_1 & + & 0{,}6x_2 & \geq 0{,}3 \\ \text{fibra:} & 0{,}02x_1 & + & 0{,}06x_2 & \leq 0{,}05 \\ \text{no negatividad:} & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

Ej: El problema de asignación (versión conti

- ¿Cómo asignar $\boxed{n}$ personas a $\boxed{n}$ tareas?
- Coste de asignar la persona $\boxed{i}$ a la tarea $\boxed{j}$: $\boxed{c_{ij}€}$
- Objetivo: minimizar el coste total de asignación
- ¿Podemos evaluar todas las posibles asignaciones?
- # de posibles asignaciones: $\boxed{n!}$
- Crecimiento de $\boxed{n!}$:

n	$n!$
10	$3{,}6 \times 10^{6}$
100	$9{,}33 \times 10^{157}$
1000	$4{,}02 \times 10^{2567}$

- Explosión combinatoria: no es posible evaluar todas las combinaciones

Ej: Formulación de PL

- 1. Variables de decisión: $\boxed{x_{ij} =}$ proporción del tiempo de la persona $\boxed{i}$ asignado a la tarea $\boxed{j}$

- 2. Objetivo: $\boxed{\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}$

- Restricciones:

  A: Cada persona i asignada: $\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n}$

  B: Cada tarea j cubierta: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n}$

  C: No negatividad: $\boxed{x_{ij} \geq 0, i, j = 1, \ldots, n}$

- # variables: $\boxed{n^2}$; # restricciones: $\boxed{2n}$

Ej: una refinería de petroleo

- Una empresa refina petroleo de Arabia Saudí y Venezuela, produce gasolina, fuel de avión y lubricantes

- Datos :

(barriles/barril)	A. Saudí	Venezuela	requerido/día
Gasolina	$0{,}3$	$0{,}4$	≥ 2000
Fuel de avión	$0{,}4$	$0{,}2$	≥ 1500
Lubricantes	$0{,}2$	$0{,}3$	≥ 500
Disponible/día	≤ 9000	≤ 6000	
coste (€/barril)	20	15	

- ¿Cómo satisfacer los requisitos a coste mínimo?

Ej: (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   miles de barriles de A. Saudí ($\boxed{x_1}$) y de Venezuela ($\boxed{x_2}$) refinados/día

2. *Objetivo:*

   minimizar coste/día:

   $$\boxed{\min 20x_1 + 15x_2}$$

3. *Restricciones:*

gasolina:	$0{,}3x_1$	$+$	$0{,}4x_2$	≥ 2
fuel:	$0{,}4x_1$	$+$	$0{,}2x_2$	$\geq 1{,}5$
lubricantes:	$0{,}2x_1$	$+$	$0{,}3x_2$	$\geq 0{,}5$
disponible A. Saudí:	x_1			≤ 9
disponible Venezuela:			x_2	≤ 6
no negatividad:	$x_1,$		x_2	≥ 0