Modelos de Programación Lineal: Resolución gráfica y Teorema fundamental

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- Resolución gráfica de problemas de PL: ejemplos
- Soluciones factibles, región factible y vértices
- Teorema fundamental
- Soluciones básicas factibles
- Ejemplo

Ej: planificación de la producción

- Una empresa fabrica: Producto 1 (Pr1) y Producto 2 (Pr2)

- Utiliza materias primas (recursos): M1 y M2

- Datos:

	Pr1	Pr2	Disponible/día (tons)
M1:	6	4	24
M2:	1	2	6
Beneficio/ton (k€)	5	4	

- Más restricciones:

  D2: demanda Pr2 $\leq$ 2

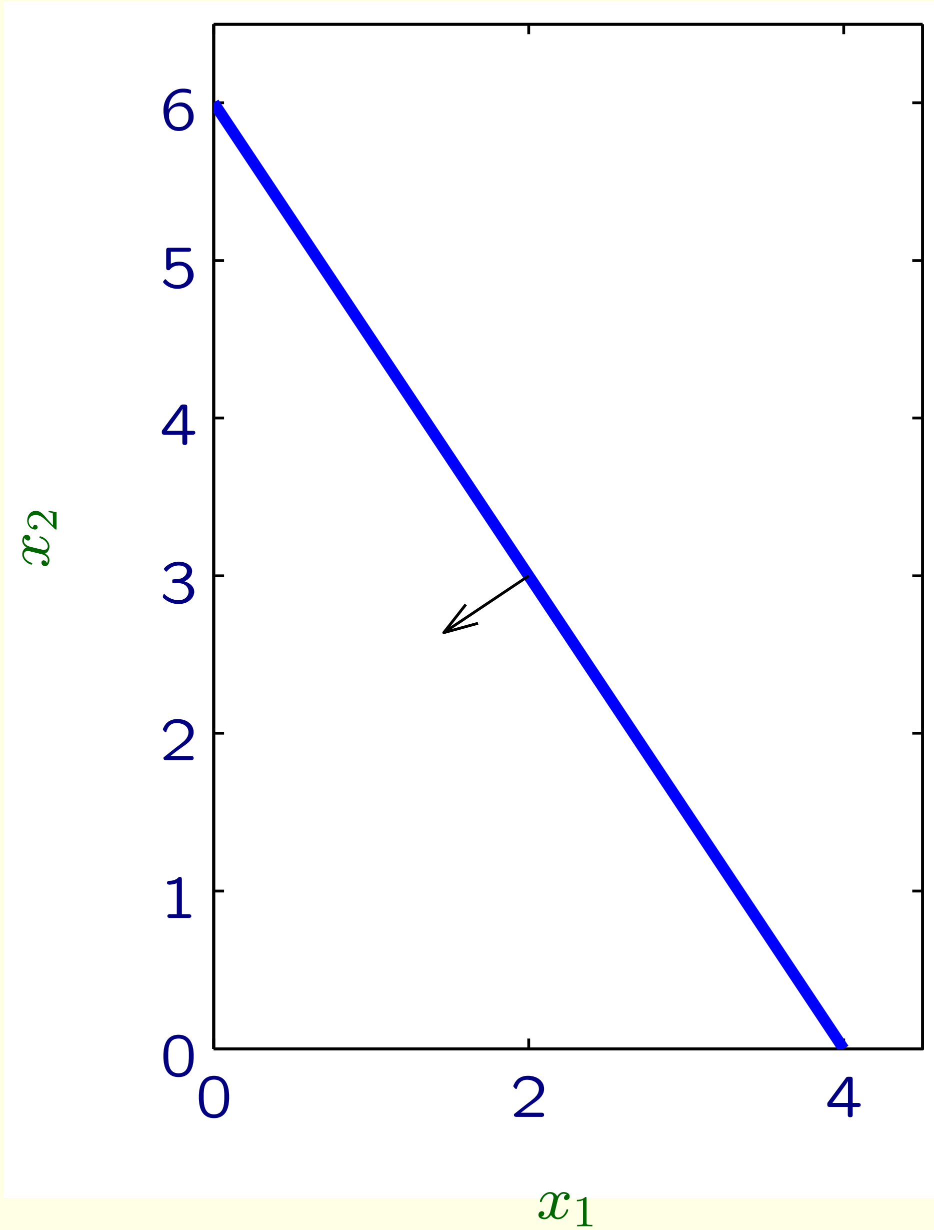
  - D: producción Pr2 - producción Pr1 $\leq$ 1

Ej: Formulación de PL

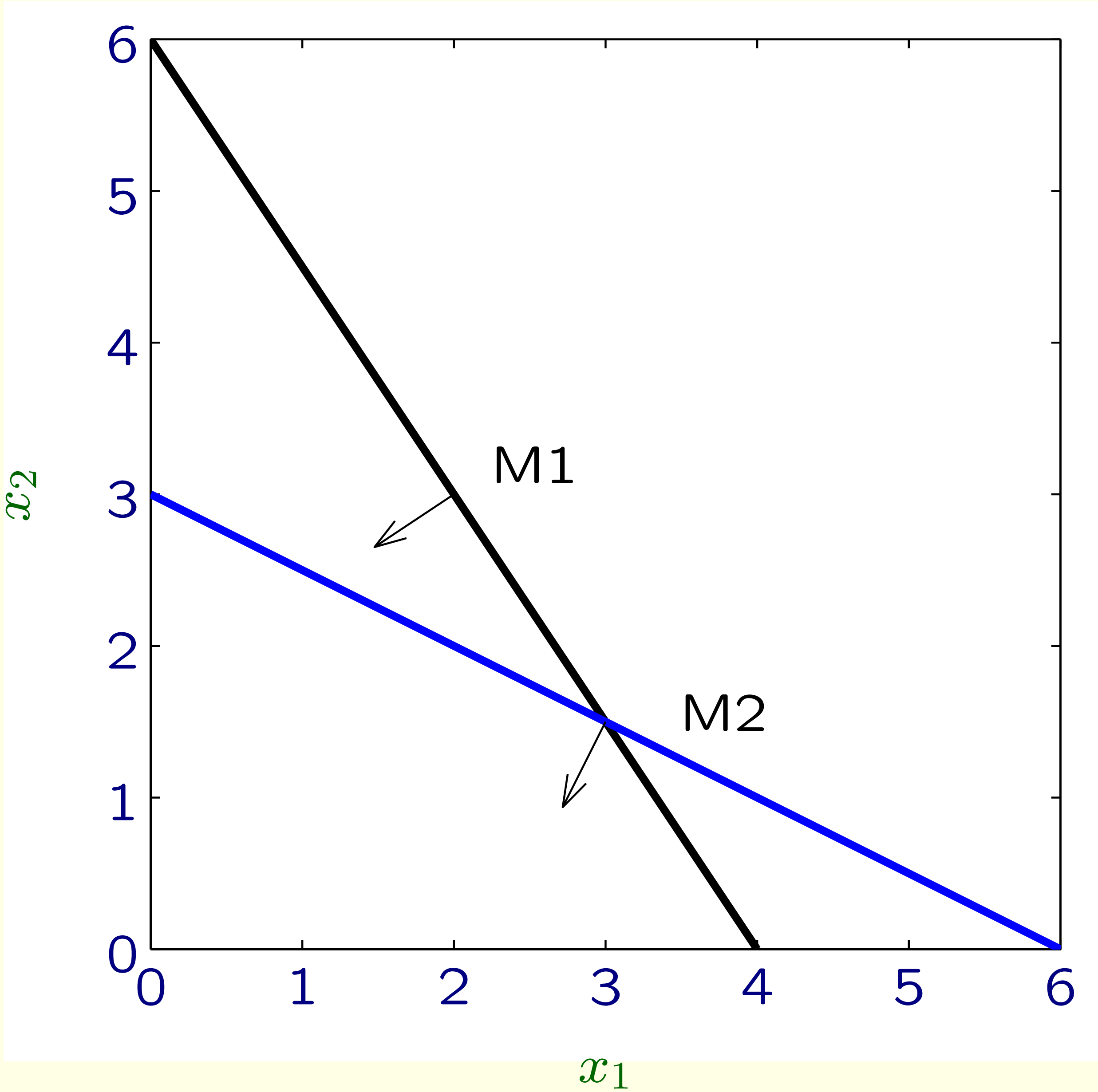
- Variables de decisión: $\boxed{x_1}$ (tons. de Pr1/día), $\boxed{x_2}$ (tons. de Pr2/día)

- $$\boxed{\begin{array}{rrcrl} \text{max} & 5x_1 & + & 4x_2 & \\ \text{sujeto a:} & & & & \\ \text{M1:} & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq 24 \\ \text{M2:} & x_1 & + & 2x_2 & \leq 6 \\ \text{D2:} & & & x_2 & \leq 2 \\ \text{D:} & -x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ \text{no negatividad:} & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

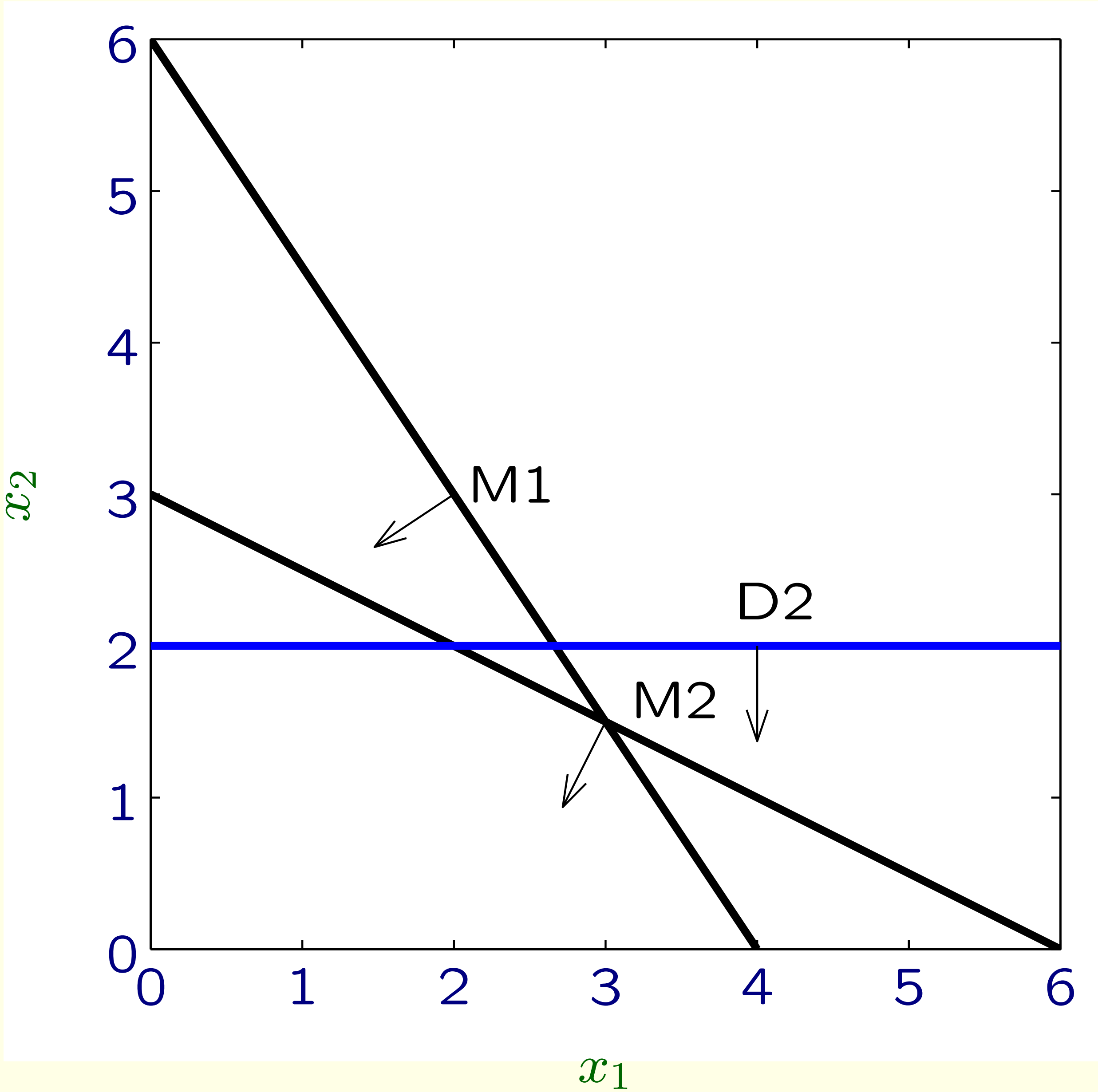
Añadiendo la restricción M1: $\boxed{6x_1 + 4x_2 \leq 24}$



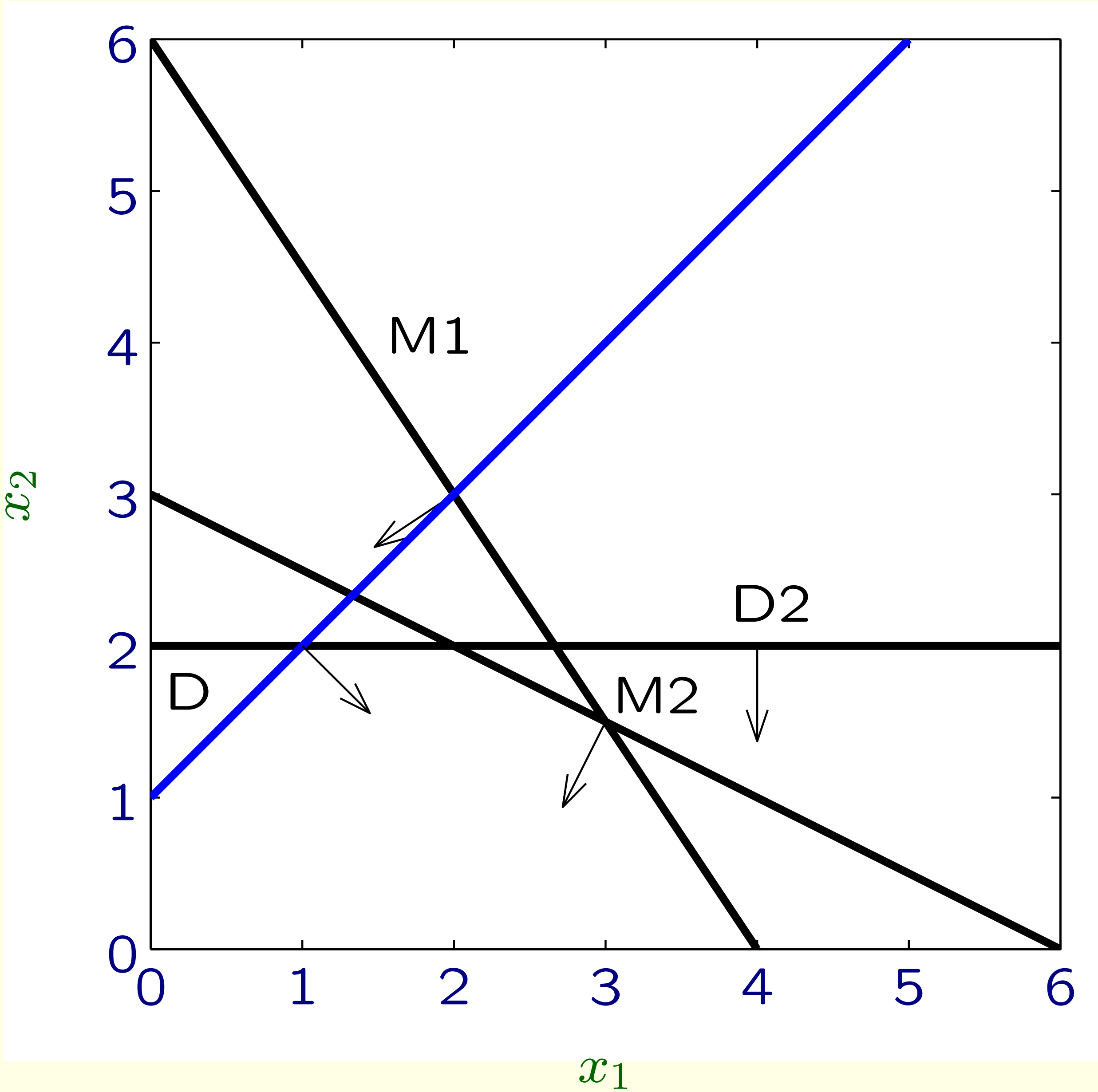
Añadiendo la restricción M2: $\boxed{x_1 + 2x_2 \leq 6}$



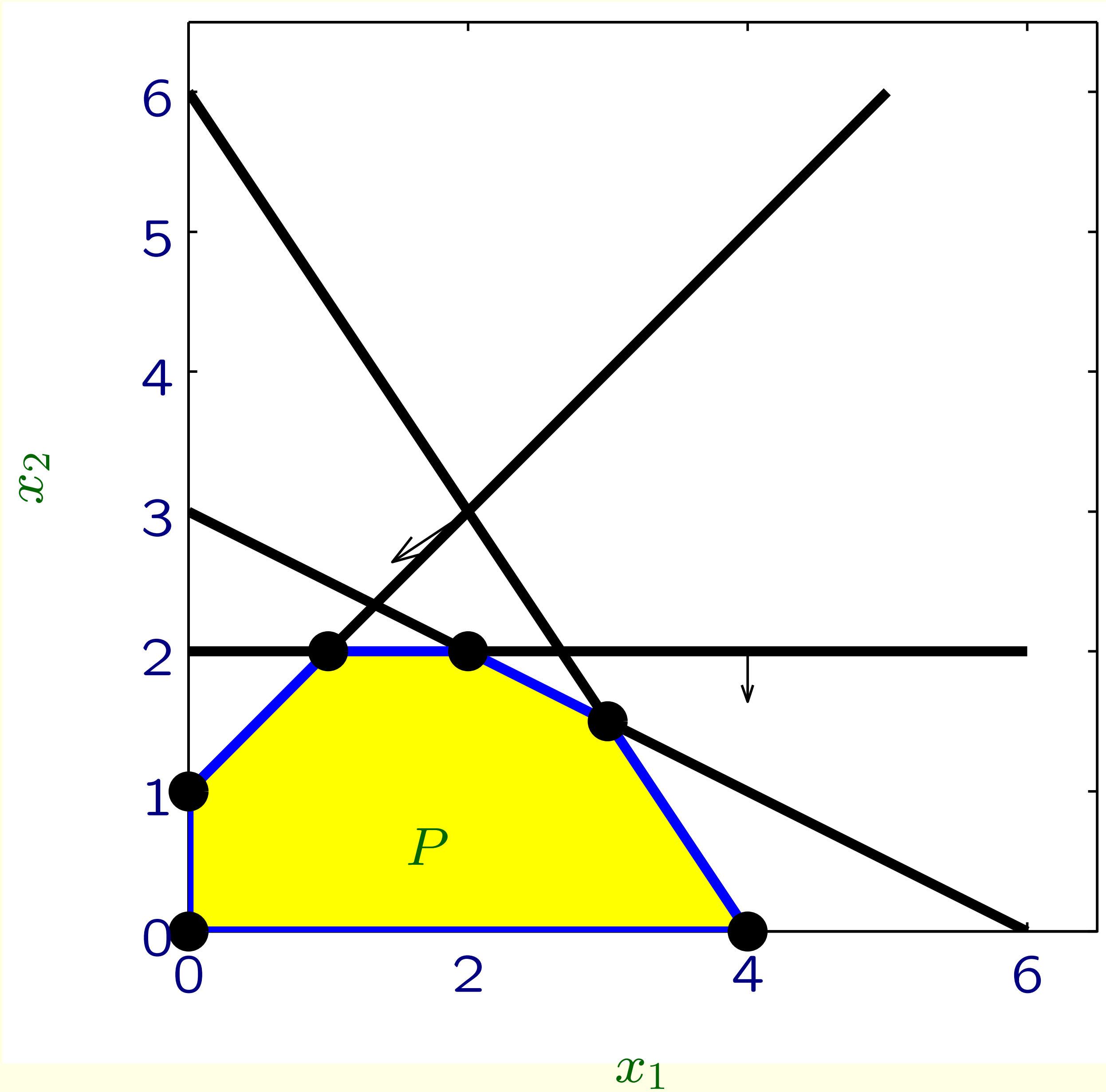
Añadiendo la restricción D2: $\boxed{x_2 \leq 2}$



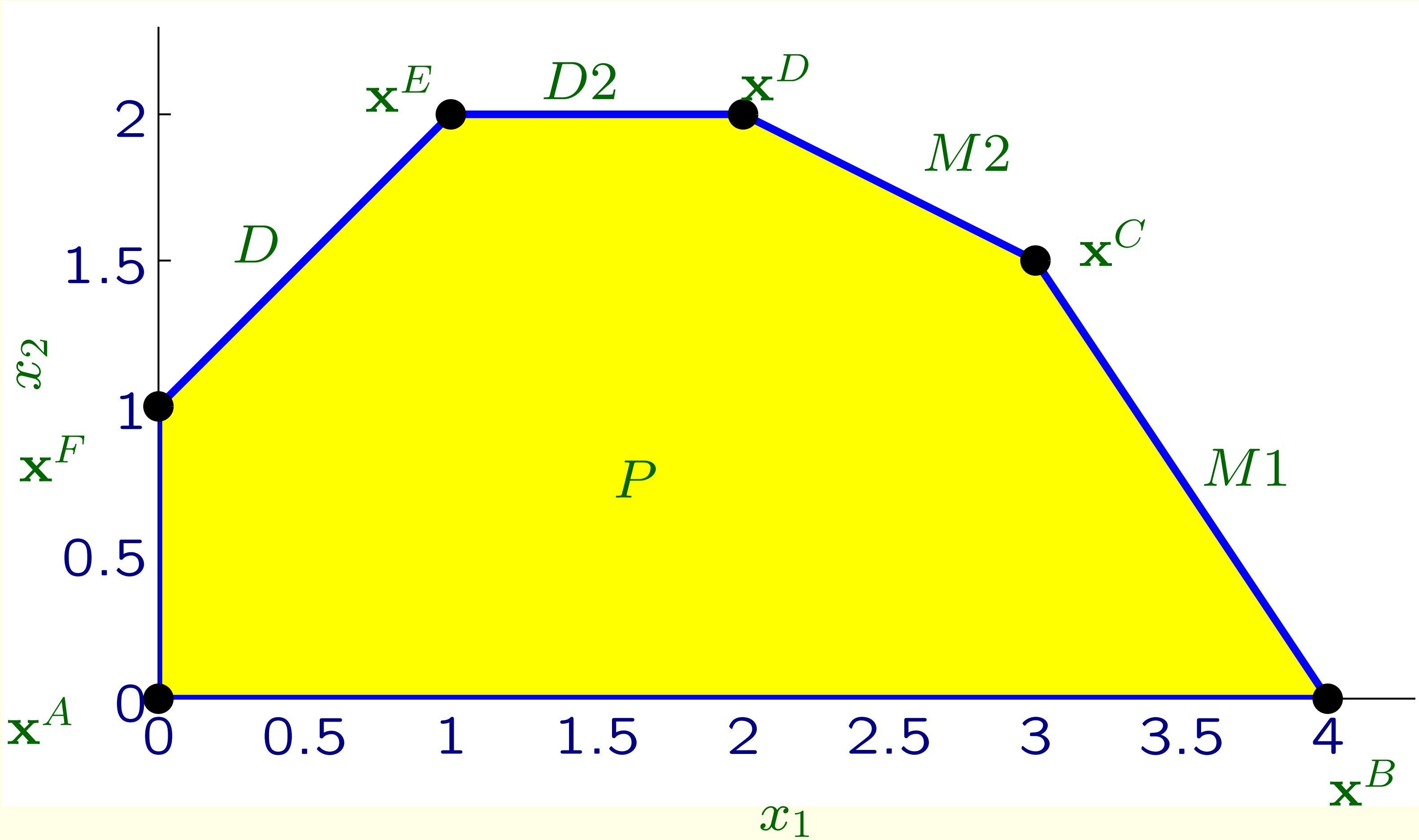
Añadiendo la restricción D: $\boxed{-x_1 + x_2 \leq 1}$



Región factible P



Región factible P



Observaciones

- **Región factible**: conjunto de puntos $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, x_2)}$ que satisfacen las restricciones

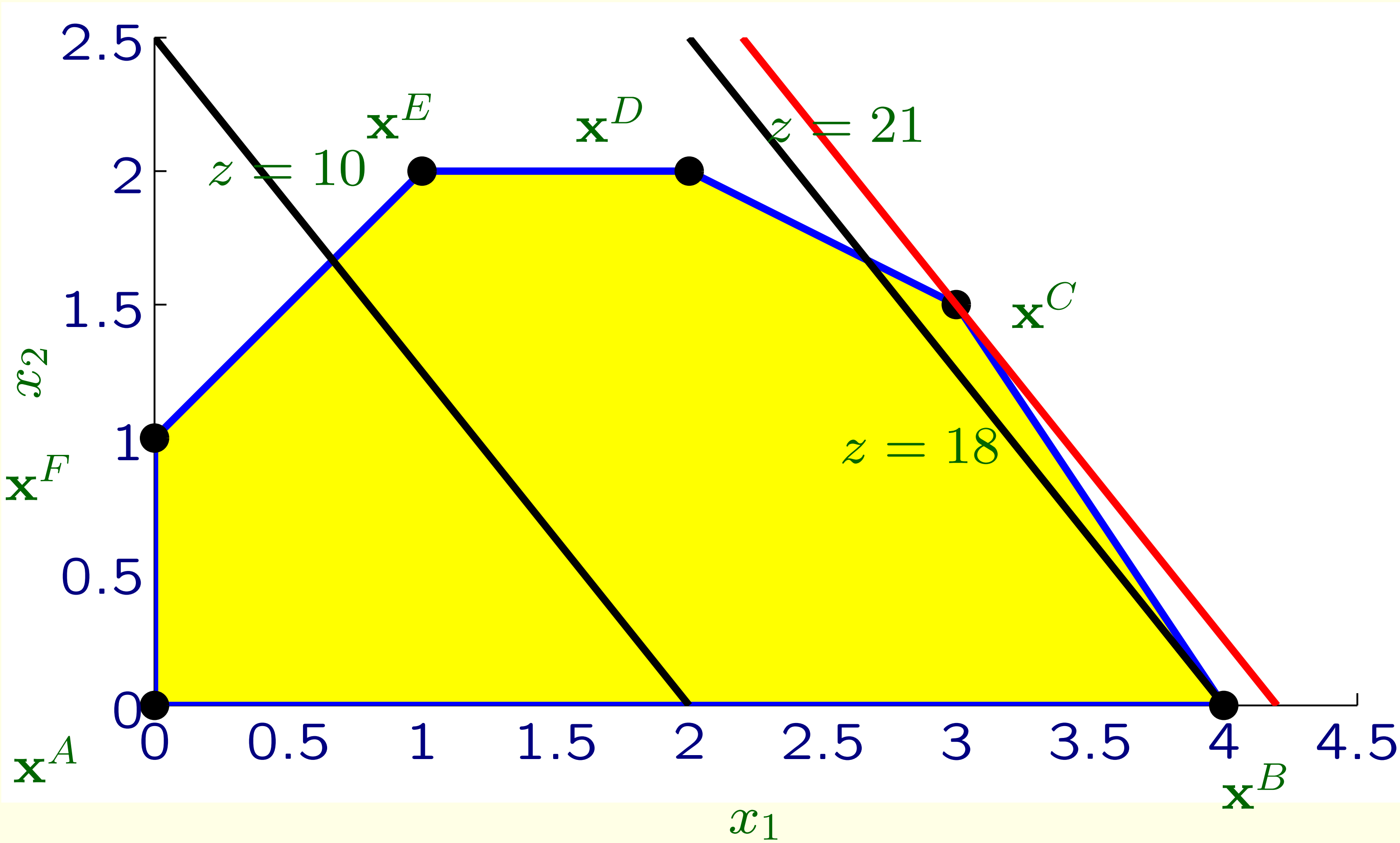
- La region factible $\boxed{P}$ es un **poliedro convexo**, delimitado por las restricciones M1, M2, D2, D y no-negatividad

- La region factible $\boxed{P}$ está caracterizada por sus 5 **vértices**: $\boxed{\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C, \mathbf{x}^D, \mathbf{x}^E, \mathbf{x}^F}$

- ¿Cómo calculamos las coordenadas de cada vértice?

- Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente

Determinación de la solución óptima



Determinación del vértice óptimo

- Para cada valor $\boxed{z}$ de la **función objetivo**, tenemos la correspondiente **recta de nivel del objetivo**, de ecuación

$$\boxed{5x_1 + 4x_2 = z}$$

- Para maximizar, tenemos que encontrar la recta de nivel con el mayor valor de $\boxed{z}$ que no se salga de la región factible $\boxed{P}$

- Observamos que la recta de nivel óptima tiene $\boxed{z^* = 21}$, obteniendo como solución óptima el **vértice** $\boxed{\mathbf{x}^C = (3, \frac{3}{2})}$

Ej: el problema de la dieta

- Modelo clásico de PL: ¿Cuál es la dieta más económica que satisface las necesidades nutricionales?

- Ej: Una granja utiliza 800 kg de pienso/día

- "pienso": mezcla de maíz y soja

- Datos (kg/kg):

	Maíz	Soja	proporción requerida
Proteínas	$0{,}09$	$0{,}60$	$\geq 30\,\%$
Fibra	$0{,}02$	$0{,}06$	$\leq 5\,\%$
coste (€/kg)	$0{,}30$	$0{,}90$	

Ej: (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   proporción de maíz ($\boxed{x_1}$) y soja ($\boxed{x_2}$) en la mezcla/kg

2. *Objetivo:*

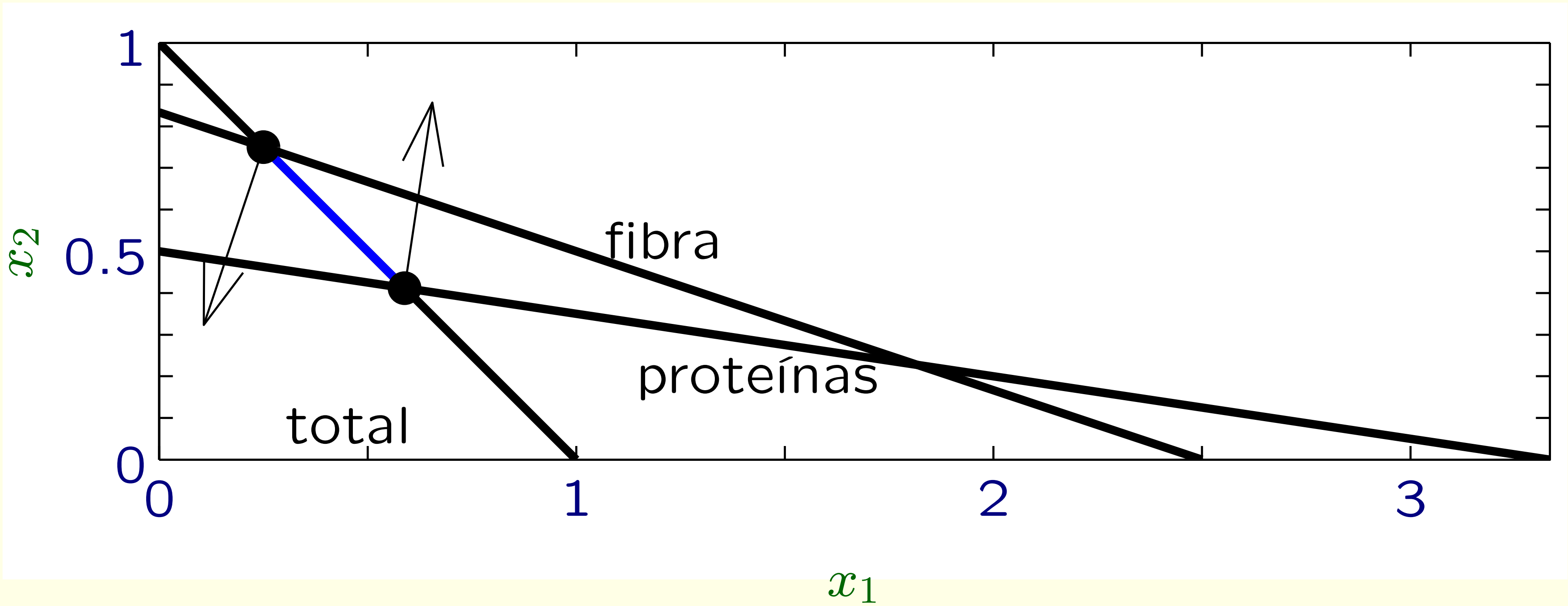
   minimizar coste/kg:

   $$\boxed{\min 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2}$$

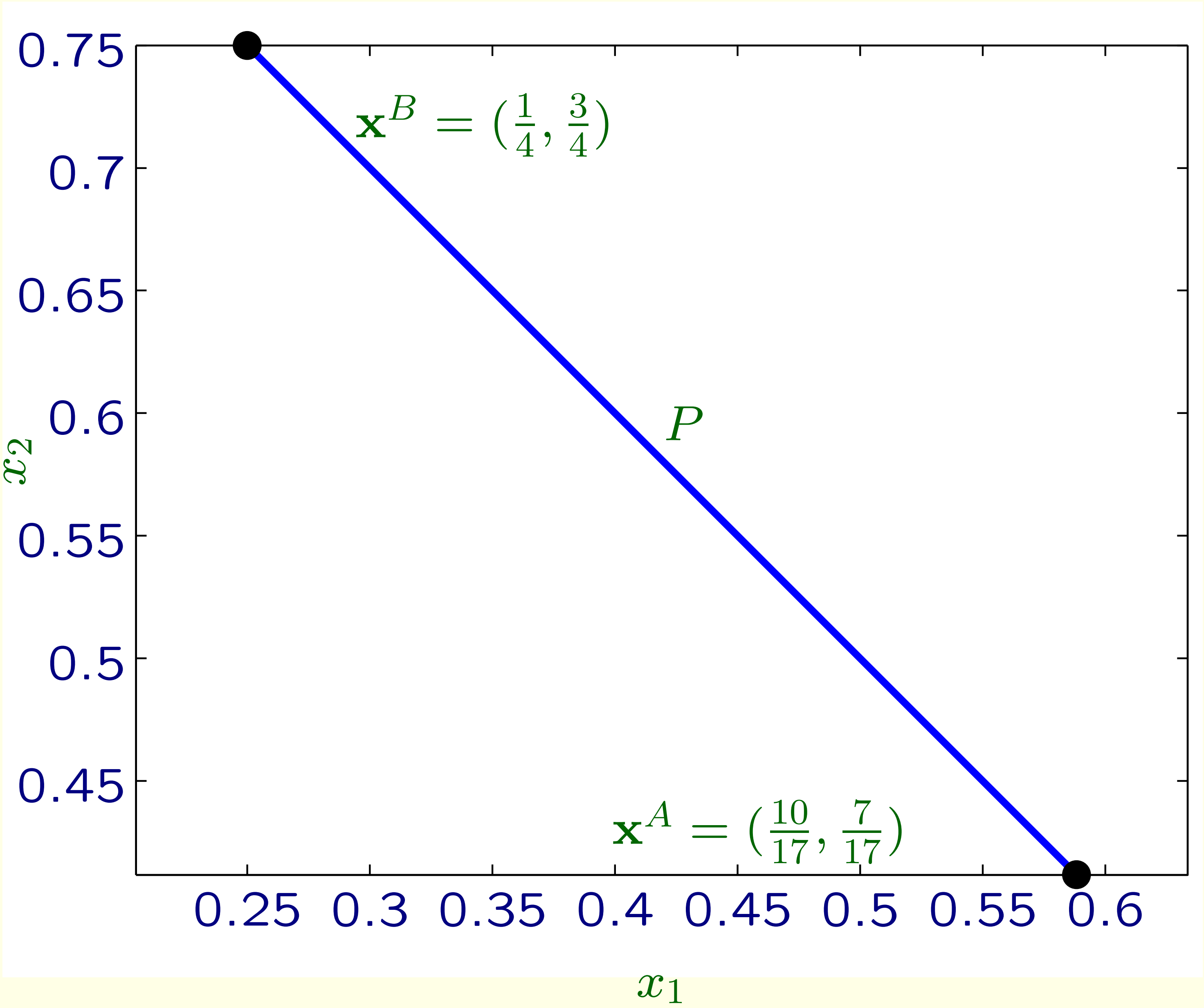
3. *Restricciones:*

$$\boxed{\begin{array}{rrcrl} \text{total:} & x_1 & + & x_2 & = 1 \\ \text{proteínas:} & 0{,}09x_1 & + & 0{,}6x_2 & \geq 0{,}3 \\ \text{fibra:} & 0{,}02x_1 & + & 0{,}06x_2 & \leq 0{,}05 \\ \text{no negatividad:} & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

Región factible P



Región factible $\boxed{P}$

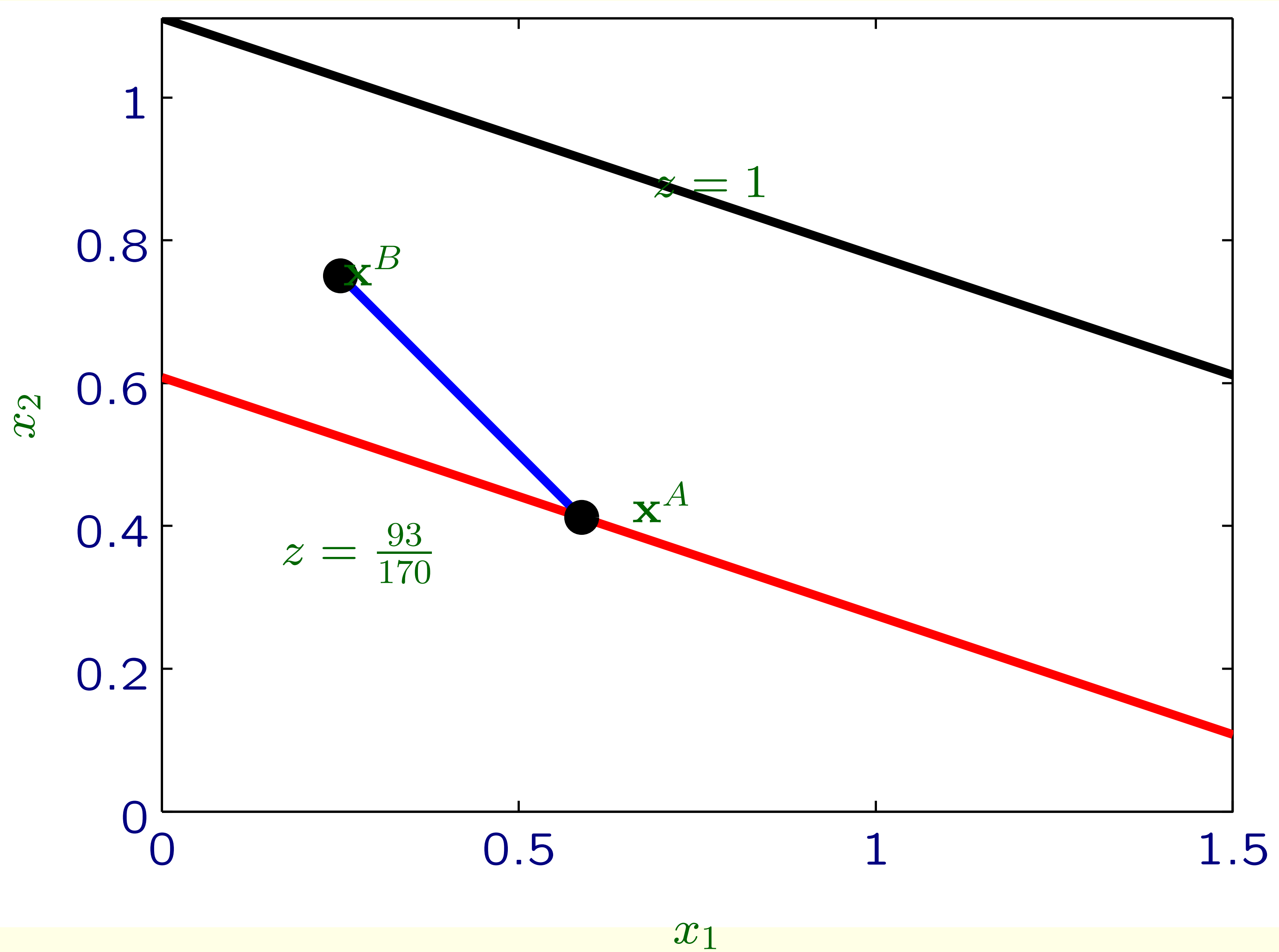


Observaciones

- La **región factible** $\boxed{P}$ es también un **poliedro convexo**, en este caso un **segmento**

- $\boxed{P}$ está caracterizada por sus dos **vértices**: $\boxed{\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B}$

Determinación de la solución óptima



Determinación de la solución óptima

- Para cada valor $\boxed{z}$ de la **función objetivo**, tenemos la correspondiente **recta de nivel del objetivo**, de ecuación

$$\boxed{0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 = z}$$

- Para **minimizar**, tenemos que encontrar la recta de nivel con el **menor valor** de $\boxed{z}$ que no se salga de la región factible $\boxed{P}$

- Observamos que la recta de nivel óptima tiene $\boxed{z^* = \frac{93}{170}}$, obteniendo como solución óptima el **vértice** $\boxed{\mathbf{x}^A}$

Ej: Un problema de abastecimiento óptimo

- Una empresa se abastece de petróleo de Arabia Saudí y Venezuela. Una vez refinados, produce gasolina, fuel de avión y lubricantes

- Datos :

(barriles/barril)	A. Saudí	Venezuela	requerido/día
Gasolina	$0{,}3$	$0{,}4$	≥ 2000
Fuel de avión	$0{,}4$	$0{,}2$	≥ 1500
Lubricantes	$0{,}2$	$0{,}3$	≥ 500
Disponible/día	≤ 9000	≤ 6000	
coste (€/barril)	20	15	

- ¿Cúanto petróleo comprar a cada proovedor satisfacer los requisitos a coste mínimo?

Ej: (cont.)

- **Formulación de PL:**

1. *Variables de decisión:*

   miles de barriles de A. Saudí ($\boxed{x_1}$) y de Venezuela ($\boxed{x_2}$) refinados/día

2. *Objetivo:*

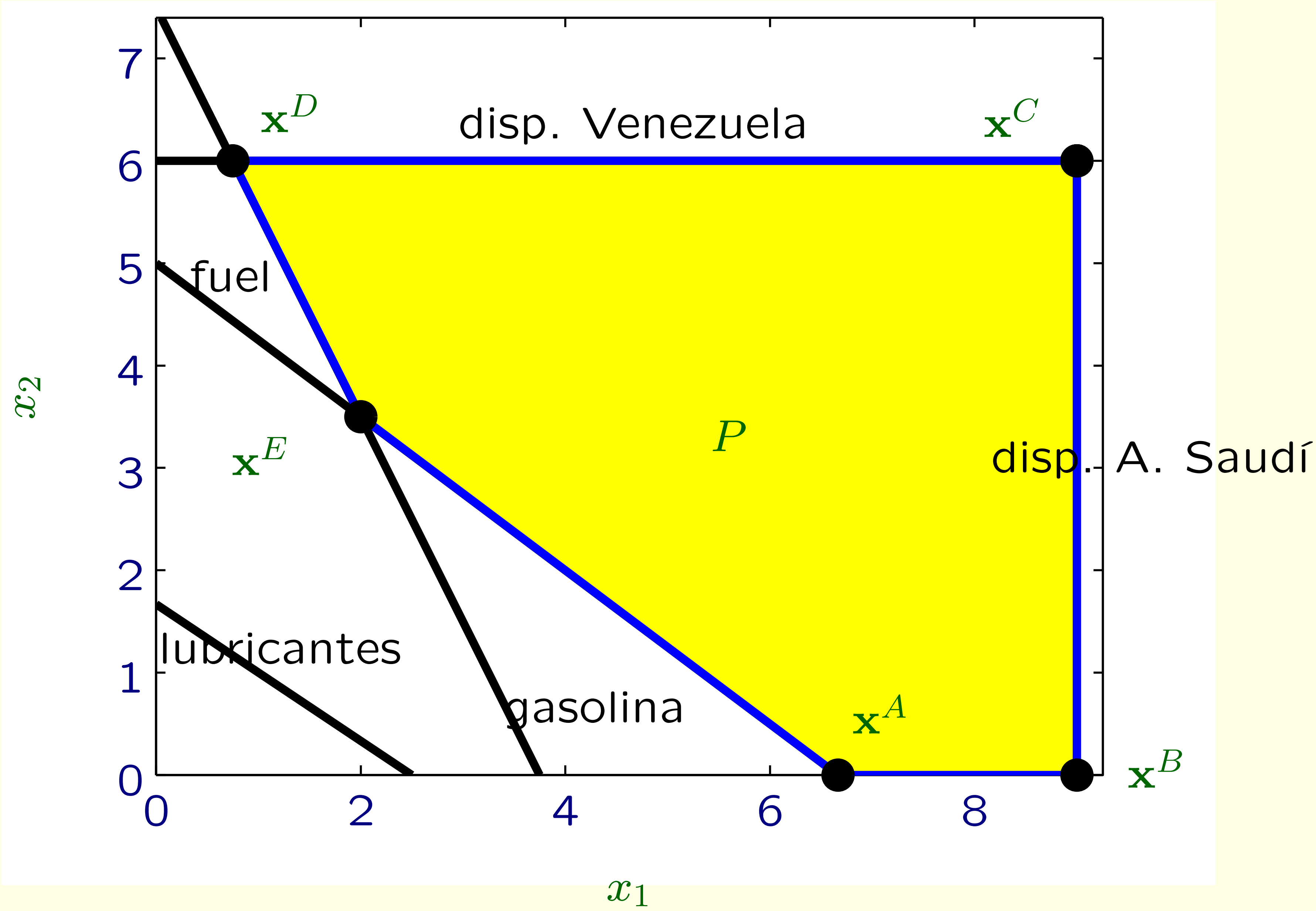
   minimizar coste/día:

   $\boxed{\min 20x_1 + 15x_2}$

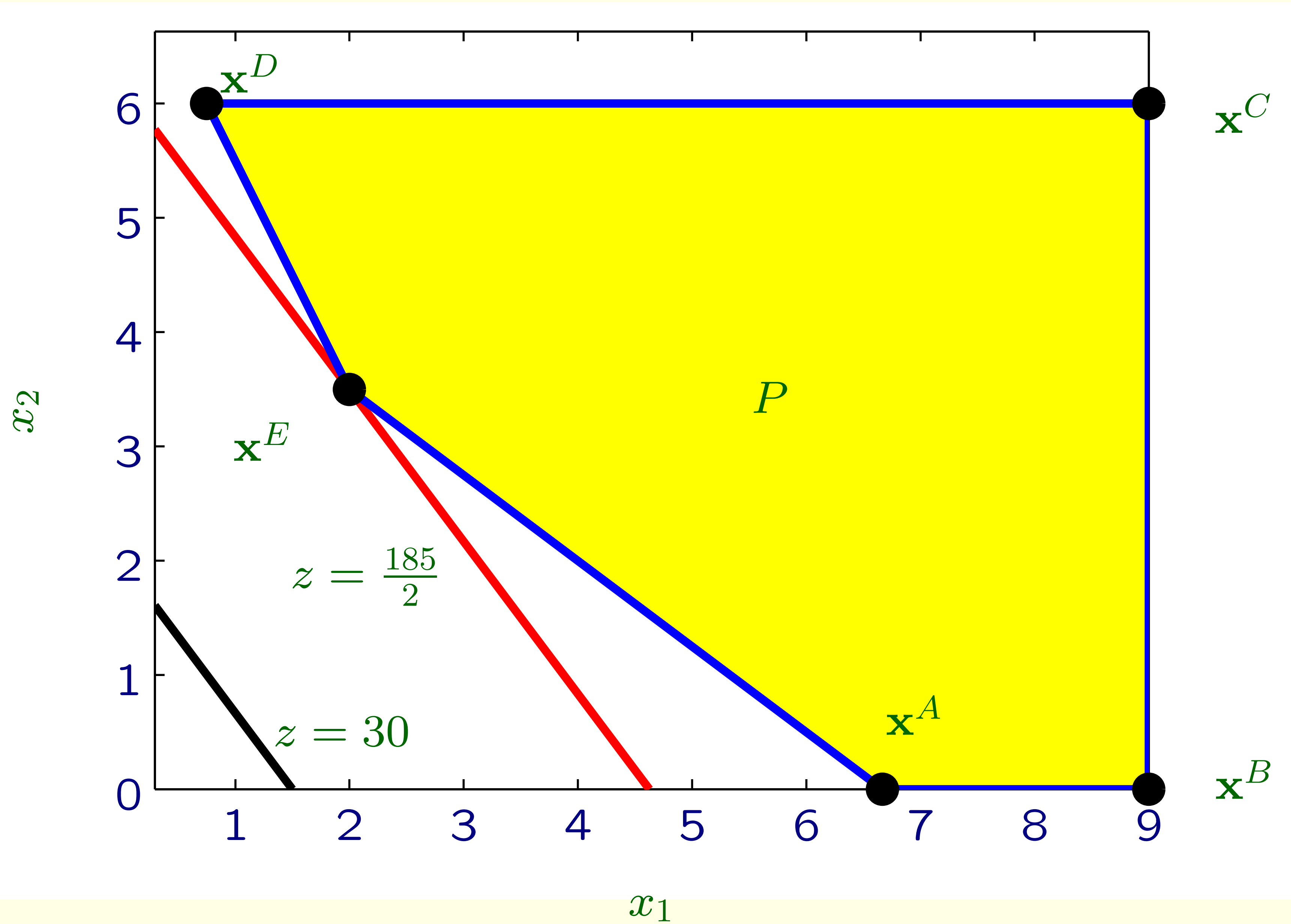
3. *Restricciones:*

gasolina:	$0{,}3x_1$	$+$	$0{,}4x_2$	≥ 2
fuel:	$0{,}4x_1$	$+$	$0{,}2x_2$	$\geq 1{,}5$
lubricantes:	$0{,}2x_1$	$+$	$0{,}3x_2$	$\geq 0{,}5$
disponible A. Saudí:	x_1			≤ 9
disponible Venezuela:			x_2	≤ 6
no negatividad:	$x_1,$		x_2	≥ 0

Región factible P



Determinación de la solución óptima



Determinación de la solución óptima

- Para cada valor $\boxed{z}$ de la **función objetivo**, tenemos la correspondiente **recta de nivel del objetivo**, de ecuación

$$\boxed{20x_1 + 15x_2 = z}$$

- Para **minimizar**, tenemos que encontrar la recta de nivel con el **menor valor** de $\boxed{z}$ que no se salga de la región factible $\boxed{P}$

- Observamos que la recta de nivel óptima tiene $\boxed{z^* = \frac{185}{2}}$, obteniendo como solución óptima el **vértice** $\boxed{\mathbf{x}^E = (2, \frac{7}{2})}$

Caso general: región factible

- En general, la **región factible** $\boxed{P}$ de un PL con variables de decisión $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)}$ es un **poliedro convexo** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$

- Un **poliedro convexo** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$ es una región de puntos $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)}$ que satisfacen un conjunto de desigualdades lineales

- Hemos visto en los ejemplos que la solución óptima se alcanza en un **vértice** de $\boxed{P}$.

- **Teorema fundamental de la PL: Si un PL tiene solución óptima, entonces ésta se alcanza en un vértice**

- Pero ¿Qué son **vértices** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$?

Reformulación en formato estándar

- Trabajaremos con PLs en **formato estándar**: sólo con restricciones de igualdad y no-negatividad; **además, con las constantes del Lado Derecho no-negativas**

- Podemos reformular cualquier PL en formato estándar

- **Variables de holgura:**

$$x_1 + x_2 \leq 24 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 24 \\ s_1 \geq 0 \end{cases}$$

- **Variables de exceso ("surplus"):**

$$x_1 + x_2 \geq 800 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - s_2 = 800 \\ s_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **Variables no restringidas en signo:**

$$x \text{ no restringida en signo} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Estructura de las soluciones de un PL

- ¿Cuál es la **estructura de las soluciones óptimas**?

- Consideremos un PL en **formato estándar** (con los $\boxed{b_i \geq 0}$):

$$\boxed{\begin{aligned} & z^* = \max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ & \qquad \text{sujeto a:} \\ & \qquad a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \qquad x_1, \ldots, x_n \geq 0, \end{aligned}}$$

- Supondremos que $\boxed{m < n}$, y que el rango de la matriz de coeficientes $\boxed{\mathbf{A} = (a_{ij})}$ es $\boxed{m}$, i.e. sus $\boxed{m}$ filas son **linealmente independientes (l.i.)**. ¿Y si no?

Soluciones básicas (factibles)

- Para $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top}$, las soluciones óptimas se alcanzan en **vertices**. ¿Qué es un **vértice** cuando $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top}$?
- Notación matricial: $\boxed{\mathbf{a}_j = (a_{ij})_{i=1}^m}$ (columna $\boxed{j}$),

$\boxed{\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^m}$, $\boxed{\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^n}$, $\boxed{\mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^n}$, $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}}$

- Escribimos las restricciones como $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$, i.e.

$$\boxed{\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}}$$

- Elegimos una **base** de $\boxed{\mathbf{A}}$, i.e. un conjunto de $\boxed{m}$ columnas l.i.:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{j_1} & \cdots & \mathbf{a}_{j_m} \end{bmatrix}}$$

- Las variables $\boxed{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}}$ son **básicas**; las demás son **no-básicas**

Soluciones básicas (factibles)

- La correspondiente **solución básica** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathbf{B}} = (x_j^{\mathbf{B}})_{j=1}^n}$ tiene las variables no-básicas iguales a cero. Los valores de las variables básicas se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones $\boxed{m \times m}$:

$$\boxed{\mathbf{a}_{j_1} x_{j_1} + \cdots + \mathbf{a}_{j_m} x_{j_m} = \mathbf{b}}$$

- **Def:** $\boxed{\mathbf{x}^{\mathbf{B}}}$ es una **solución básica factible** si $\boxed{\mathbf{x}^{\mathbf{B}} \geq \mathbf{0}}$

- Los **vértices** son las **soluciones básicas factibles (SBF)**

- Por el Teorema fundamental, para encontrar una solución óptima sólo tenemos que buscar entre los vértices (SBF)

- ¿Cuántos vértices puede haber?

Ejemplo

- Consideremos el PL con ($\boxed{n = 3}$ variables, $\boxed{m = 2}$ restricciones):

$$\boxed{\begin{aligned} & z^* = \text{máx}\, 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & \quad \text{sujeto a} \\ & \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}}$$

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_1, x_2}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}} = (\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0)}$, que es factible: es un **vértice**

Ejemplo

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_1, x_3}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,3\}} = (22, 0, -12)}$, que **no es factible**: no es un vértice

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_2, x_3}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{2,3\}} = (0, \frac{22}{7}, \frac{26}{7})}$, que **es factible**: es un vértice

Ejemplo: determinación del vértice óptimo

- El PL tiene dos vértices:
  - Vértice 1: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}} = (\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0)}$
  - Vértice 2: $\boxed{\mathbf{x}^{\{2,3\}} = (0, \frac{22}{7}, \frac{26}{7})}$
- Calculamos el valor del objetivo en cada vértice:
  - Vértice 1: $\boxed{z^{\{1,2\}} = \frac{274}{5}}$
  - Vértice 2: $\boxed{z^{\{2,3\}} = \frac{368}{7}}$
- Como $\boxed{z^{\{1,2\}} > z^{\{2,3\}}}$, el mejor vértice es $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}}}$
- Por el Teorema fundamental, si el PL tiene solución óptima, ésta ha de ser $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}}}$