PLs no acotados

El método símplex en dos fases
PLs no factibles

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- PLs no acotados
- Necesidad de obtener un vértice inicial o determinar que el PL es no-factible
- El método Símplex en dos fases
- Fase I
- Fase II
- Ejemplos

Detectando PLs no acotados

- Supongamos que queremos poner la variable $\boxed{x_j}$ en la base, con coste reducido negativo: $\boxed{\bar{c}_j < 0}$

- Para determinar qué variable básica sacar, aplicamos la **Regla del Cociente Mínimo**:

- Sacar la variable básica de una fila $\boxed{i}$ con $\boxed{\bar{a}_{ij} > 0}$ que cumpla:

$$\boxed{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}} : \bar{a}_{kj} > 0 \right\}}$$

- Pero ¿Qué ocurre si $\boxed{\bar{a}_{ij} \leq 0}$ para cada fila $\boxed{i}$?

Detectando PLs no acotados (cont.)

- Vimos en la Lección 3 que, dada la base $\boxed{\mathbf{B}}$, podemos reformular el PL

$$\boxed{\begin{array}{l} z^* = \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \quad \text{sujeto a} \\ \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

como el **PL equivalente**:

$$\boxed{\begin{array}{l} z^* = \bar{z} + \max -\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}}^\top \mathbf{x}_{\mathbf{N}} \\ \quad \text{sujeto a} \\ \quad \mathbf{x}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}_{\cdot\mathbf{N}} \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{b}} \\ \quad \mathbf{x}_{\mathbf{B}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_{\mathbf{N}} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

donde $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix}}$ y

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}}^{\top} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{\top} \\ \bar{z} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\bar{\mathbf{b}} \end{array}}$$

- Nota: $\boxed{\bar{\mathbf{c}}^{\top} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\top} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{c}^{\top}}$

Detectando PLs no acotados (cont.)

- Supongamos que queremos poner la variable $\boxed{x_j}$ en la base, con coste reducido negativo: $\boxed{\bar{c}_j < 0}$

- Supongamos que $\boxed{\bar{a}_{ij} \leq 0}$ para cada fila $\boxed{i}$: $\boxed{\bar{\mathbf{a}}_j \leq \mathbf{0}}$

- Construimos la siguiente **familia paramétrica de soluciones factibles** para el PL equivalente: para cada **parámetro** $\boxed{\lambda > 0}$, tomamos $\boxed{x_j(\lambda) = \lambda}$, $\boxed{\mathbf{x_B}(\lambda) = \bar{\mathbf{b}} - \lambda \bar{\mathbf{a}}_j}$ y $\boxed{x_k(\lambda) = 0}$ para las demás variables

- El valor del objetivo en $\boxed{\mathbf{x}(\lambda)}$ es:

$$\boxed{z(\lambda) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(\lambda) = \bar{z} - \bar{c}_j x_j(\lambda) = \bar{z} - \bar{c}_j \lambda \nearrow +\infty \quad \text{cuando } \lambda \nearrow +\infty}$$

- Por tanto, **el PL es no acotado**: $\boxed{z^* = +\infty}$

Ejemplo

- Consideremos la tabla Símplex de un PL:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	50
x_5	0	0	0	0	1	5
x_3	0	0	1	0	0	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	50
z	0	0	0	-1	0	100 €

- Esta tabla nos indica que el PL es no acotado. ¿Por qué?

Ej. (cont.)

- Construir una familia $\boxed{\mathbf{x}(\lambda)\colon \lambda > 0}$ de soluciones factibles, cuyo valor $\boxed{z(\lambda)}$ tienda a $\boxed{+\infty}$ cuando $\boxed{\lambda \nearrow +\infty}$

- Variable que entraría en la base: $\boxed{x_4}$, con $\boxed{\bar{c}_4 = -1 < 0}$

- Definimos $\boxed{\mathbf{x}(\lambda)}$ por: $\boxed{x_4(\lambda) = \lambda}$ y

$$\boxed{\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} - \lambda \bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{z(\lambda) = \bar{z} - \bar{c}_j \lambda = 100 + \lambda \nearrow +\infty \quad \text{cuando } \lambda \nearrow +\infty}$$

Vértices iniciales; no factibilidad

- El método Símplex parte de un vértice (SBF) inicial

- En algunos PLs (en formato estándar, con $\boxed{\mathbf{b} \geq \mathbf{0}}$) es sencillo identificar una SBF inicial: cuando la matrix $\boxed{\mathbf{A}}$ contiene una submatriz identidad $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{I}}$

- Pero, en general, no es evidente cómo hacerlo

- Necesitamos un procedimiento para: obtener una SBF inicial, si existe una; o, si no, determinar que el PL es no-factible

- Daremos tal procedimiento: La **Fase I del método Símplex**

Fase I del método Símplex

- Consideremos un PL en formato estándar, con $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top, \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} & z^* = \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ & \quad \text{sujeto a} \\ & \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}}$$

- Pregunta 1: ¿Es el PL factible?

- Pregunta 2: Si es factible, ¿Cómo construir una SBF inicial?

El PL-Fase I

- Suponemos que la matriz $\boxed{\mathbf{A}}$ no contiene una submatriz identidad (si la contuviera, la tomaríamos como base inicial)

- Si es posible, identificamos algunas columnas $\boxed{\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{m-k}}}$ de $\boxed{\mathbf{A}}$ que puedan formar parte de una submatriz identidad

- Aumentamos $\boxed{\mathbf{A}}$ con las **columnas auxiliares** necesarias $\boxed{\mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_{n+k}}$ para **completar una submatriz identidad**

- Añadimos las correspondientes **variables auxiliares** $\boxed{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \geq 0}$

- Tomamos como **base inicial** la matriz identidad obtenida

- El objetivo del **PL-Fase I** es **minimizar la suma de las variables auxiliares**, para eliminarlas si es posible

El método Símplex en dos fases

- El objetivo del **PL-Fase I** es **minimizar la suma de las variables auxiliares**, para **eliminarlas si es posible**

- Resolvemos con el método Símplex el PL-Fase I

- Caso 1: Si el objetivo mínimo del PL-Fase I es **positivo**: **el PL original no es factible** ¿Por qué?

- Caso 2: Si el objetivo mínimo del PL-Fase I es **cero**: **el PL original es factible**

- En el caso 2: utilizamos la SBF final del PL-Fase I (que no ha de contener variables auxiliares) como SBF inicial del PL original (**PL-Fase II**), y aplicamos a éste el método Símplex

- Éste es el **Método Símplex en dos fases**

Ej.: Método Símplex en dos fases

- Consideremos el PL

$$
\begin{aligned}
z^* = \max\, & x_1 + x_2 + x_3 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \\
& x_3 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- ¿Es factible?

Ej. (cont.)

- Reformulamos el PL en formato estándar

$$z^* = \max x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 100$$

$$x_3 + x_5 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Ej. (cont.)

- En notación matricial, con $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)^\top}$:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& z^* = \max\,(1,1,1,0,0)\mathbf{x} \\
& \qquad \text{sujeto a} \\
& \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
}
$$

- No es evidente qué base inicial $\boxed{\mathbf{B}}$ de $\boxed{\mathbf{A}}$ seleccionar
- La matrix $\boxed{\mathbf{A}}$ no contiene una submatriz identidad

Ej. (cont.)

- Aumentamos la matriz $\boxed{\mathbf{A}}$ con las columnas necesarias para que contenga una submatriz identidad, añadiendo las **variables auxiliares** no-negativas correspondientes

- Después, tratamos de eliminar esas variables auxiliares resolviendo el **PL-Fase I**, cuyo objetivo es **minimizar la suma de las variables auxiliares**

Ej. (cont.)

- En el ejemplo, añadimos variables auxiliares $\boxed{x_6, x_7, x_8}$. Con $\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_5, x_6, x_7, x_8)^{\mathsf{T}}}$, el **PL-Fase I** es:

$$\boxed{\begin{array}{l} z^{\mathrm{I}} = \max -x_6 - x_7 - x_8 \\ \qquad \text{sujeto a} \\ \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

- Seleccionamos como **variables básicas iniciales**: $\boxed{x_6, x_5, x_7, x_8.}$ ¿Por qué? ¿Cuál es la base $\boxed{\hat{\mathbf{B}}}$ inicial?

Ej. (cont.)

- Calculamos los **costes reducidos** $\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_j)}$ correspondientes a la base seleccionada. ¿Cómo?

- Denotamos por $\boxed{\hat{\mathbf{A}}}$ la matriz de coeficientes ampliada, y por $\boxed{\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_j)}$ el vector de coeficientes del objetivo auxiliar:

$$\boxed{\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_5, \hat{c}_6, \hat{c}_7, \hat{c}_8) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1)}$$

- Aplicamos la identidad (ver Lección 3)

$$\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (\hat{c}_6, \hat{c}_5, \hat{c}_7, \hat{c}_8)\hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_6, \hat{c}_5, \hat{c}_7, \hat{c}_8)\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{c}}}$$

Ej. (cont.)

- La **tabla Símplex inicial** para el **PL-Fase I** es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	1	1	-1	0	1	0	0	100
x_5	0	0	1	0	1	0	0	0	5
x_7	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	2	-1	2	0	0	0	0	1	0
z	-2	-1	-4	1	0	0	0	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Seleccionamos el primer **pivote**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	1	1	-1	0	1	0	0	100
x_5	0	0	1	0	1	0	0	0	5
x_7	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0
x_8	2	-1	2	0	0	0	0	1	0
z	-2	-1	-4	1	0	0	0	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Tras el primer pivotaje, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	2	0	0	-1	0	1	-1	0	100
x_5	1	-1	0	0	1	0	-1	0	5
x_3	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	4	-3	0	0	0	0	-2	1	0
z	-6	3	0	1	0	0	4	0	-100 €

- Observación: el objetivo no ha aumentado: ¿Por qué?

Ej. (cont.)

- Elegimos el siguiente pivote:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	2	0	0	-1	0	1	-1	0	100
x_5	1	-1	0	0	1	0	-1	0	5
x_3	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	$\boxed{4}$	-3	0	0	0	0	-2	1	0
z	-6	3	0	1	0	0	4	0	-100 €

- ¿Aumentará el objetivo al pivotar?

Ej. (cont.)

- Tras el segundo pivotaje, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	0	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	100
x_5	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	5
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
z	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	-100 €

Ej. (cont.)

- Elegimos el siguiente pivote:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	0	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	100
x_5	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	5
x_3	0	$\boxed{\frac{1}{4}}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
z	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	-100 €

- ¿Aumentará el objetivo al pivotar?

Ej. (cont.)

- Tras el tercer pivotaje, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	0	0	-6	-1	0	1	-3	-2	100
x_5	0	0	1	0	1	0	0	0	5
x_2	0	1	4	0	0	0	2	1	0
x_1	1	0	3	0	0	0	1	1	0
z	0	0	6	1	0	0	4	3	-100 €

- Esta tabla Símplex es **óptima**
- El objetivo óptimo del PL-Fase I es: $\boxed{z^{\mathrm{I}} = -100 \text{ €} \neq 0}$
- Conclusión: **El PL original no es factible**

Otro ejemplo

- Consideremos el PL

$$
\begin{aligned}
z^* = \max\, & x_1 + x_2 + x_3 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \\
& x_3 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- ¿Es factible? Si lo fuese, ¿con qué base empezar?

Ej. (cont.)

- Reformulamos el PL en formato estándar

$$\begin{aligned}
z^* = \max\, & x_1 + x_2 + x_3 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 100 \\
& x_3 + x_5 = 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Ej. (cont.)

- En el ejemplo, añadimos variables auxiliares $\boxed{x_6, x_7, x_8}$. Con $\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_5, x_6, x_7, x_8)^{\mathsf{T}}}$, el **PL-Fase I** es:

$$\boxed{\begin{aligned} & z^{\mathrm{I}} = \max -x_6 - x_7 - x_8 \\ & \qquad \text{sujeto a} \\ & \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \qquad \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{aligned}}$$

- Seleccionamos como **variables básicas iniciales**: $\boxed{x_6, x_5, x_7, x_8.}$ ¿Por qué?

Ej. (cont.)

- Calculamos los **costes reducidos** $\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_j)}$ correspondientes a la base seleccionada. ¿Cómo?

- Denotamos por $\boxed{\hat{\mathbf{A}}}$ la matriz de coeficientes ampliada, y por $\boxed{\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_j)}$ el vector de coeficientes del objetivo auxiliar:

$$\boxed{\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_5, \hat{c}_6, \hat{c}_7, \hat{c}_8) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1)}$$

- Aplicamos la identidad (ver Lección 3)

$$\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (\hat{c}_6, \hat{c}_5, \hat{c}_7, \hat{c}_8)\hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{c}}}$$

Ej. (cont.)

- La **tabla Símplex inicial** para el **PL-Fase I** es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	1	1	-1	0	1	0	0	100
x_5	0	0	1	0	1	0	0	0	5
x_7	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	1	-1	1	0	0	0	0	1	0
z	-1	-1	-3	1	0	0	0	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Seleccionamos el primer **pivote**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	1	1	-1	0	1	0	0	100
x_5	0	0	1	0	1	0	0	0	5
x_7	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0
x_8	1	-1	1	0	0	0	0	1	0
z	-1	-1	-3	1	0	0	0	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Tras el primer **pivotaje**, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	2	0	0	-1	0	1	-1	0	100
x_5	1	-1	0	0	1	0	-1	0	5
x_3	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	2	-2	0	0	0	0	-1	1	0
z	-4	2	0	1	0	0	3	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Seleccionamos el segundo **pivote**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	2	0	0	-1	0	1	-1	0	100
x_5	1	-1	0	0	1	0	-1	0	5
x_3	-1	1	1	0	0	0	1	0	0
x_8	$\boxed{2}$	-2	0	0	0	0	-1	1	0
z	-4	2	0	1	0	0	3	0	-100 €

Ej. (cont.)

- Tras el segundo **pivotaje**, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	0	2	0	-1	0	1	0	-1	100
x_5	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	1	-1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	0	-2	0	1	0	0	1	2	-100 €

Ej. (cont.)

- Seleccionamos el tercer **pivote**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	0	$\boxed{2}$	0	-1	0	1	0	-1	100
x_5	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	1	-1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	0	-2	0	1	0	0	1	2	-100 €

Ej. (cont.)

- Tras el tercer **pivotaje**, obtenemos la tabla:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	50
x_5	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	50
z	0	0	0	0	0	1	1	1	0 €

- **Fin de la Fase I** (tabla **óptima**): como $\boxed{z^{\mathrm{I}} = 0}$, **el PL original es factible**

- A partir de esta tabla, construimos la tabla inicial del PL original, con variables básicas $\boxed{x_2, x_5, x_3, x_1}$

Ej. (cont.)

- Comenzamos la **Fase II**, con tabla Símplex inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	50
x_5	0	0	0	0	1	5
x_3	0	0	1	0	0	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	50
z	0	0	0	-1	0	100 €

- Hemos eliminado las variables auxiliares $\boxed{x_6, x_7, x_8}$
- Esta tabla nos indica que **el PL original es no acotado**

Ej. (cont.)

- ¿Cómo hemos calculado los **costes reducidos** $\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_j)}$ correspondientes a la base seleccionada?

- Denotamos por $\boxed{\mathbf{c} = (c_j)}$ el vector de coeficientes del objetivo original:

$$\boxed{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_5) = (1, 1, 1, 0, 0)}$$

- Aplicamos la identidad (ver Lección 3)

$$\boxed{\bar{\mathbf{c}} = (c_2, c_5, c_3, c_1)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = (c_2, c_5, c_3, c_1)\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{c}}$$