Problemas de programación entera: El método "Ramifica y Acota"

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- La estrategia “Divide y vencerás”
- Árboles de enumeración
- Enumeración implícita mediante cotas
- Cómo podar el árbol
- El método “Ramifica & Acota”
- Selección de variables y subproblemas

La estrategia "Divide y vencerás"

- Consideremos un **programa entero**, con formulación

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\mathsf{PE}) & z^* = \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \quad \text{sujeto a} \\ & \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ y entero} \end{array}}$$

- El **conjunto (discreto) de soluciones factibles** es:

$$\boxed{S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n_+ : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\right\}}$$

- Podemos **reformular** el programa entero como

$$\boxed{(\mathsf{PE}) \quad z^* = \max \left\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in S\right\}}$$

La estrategia “Divide y vencerás”

- Podemos **reformular** el programa entero como

$$\boxed{(\mathsf{PE}) \quad z^* = \max\left\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in S\right\}}$$

- $\boxed{S}$ suele contener un número muy grande de soluciones: no es eficiente (ni posible en general) evaluarlas todas

- Aplicaremos la estrategia de resolución “**Divide y vencerás (“Divide and conquer”)**”:

  1. **Descompondremos** el problema $\boxed{(\mathsf{PE})}$ en varios **subproblemas** $\boxed{(\mathsf{PE}_1), \ldots, (\mathsf{PE}_K)}$ más fáciles de resolver
  2. **Utilizaremos las soluciones de los subproblemas para obtener la solución de** $\boxed{(\mathbf{PE})}$

La estrategia "Divide y vencerás"

- **Descompondremos el conjunto factible** $\boxed{S}$ en **subconjuntos disjuntos** $\boxed{S_k}$:

$$\boxed{S = S_1 \cup \cdots \cup S_K.}$$

- El **subproblema** $\boxed{(\mathsf{PE}_k)}$ es

$$\boxed{(\mathsf{PE}_k) \quad z^{(k)} = \max\left\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in S_k\right\}, \quad k = 1, \ldots, K}$$

- Si podemos resolver cada subproblema $\boxed{(\mathsf{PE}_k)}$, podemos resolver el problema $\boxed{(\mathsf{PE})}$. ¿Por qué?

Porque $\boxed{z^* = \max_k z^{(k)}}$

- ¿Cómo descomponemos el conjunto factible $\boxed{S}$ en subconjuntos disjuntos $\boxed{S_k}$?

Árbol de enumeración

- Descomponemos $\boxed{S}$ mediante un **árbol de enumeración**
- Ej: $\boxed{S \subseteq \{0,1\}^3}$ ($\boxed{n=3}$ variables binarias $\boxed{x_1, x_2, x_3}$)
- Descomponemos $\boxed{S}$, al 1**er** **nivel**, como $\boxed{S = S_0 \cup S_1,}$

donde $\boxed{S_0 = \{\mathbf{x} \in S \colon x_1 = 0\}}$ y $\boxed{S_1 = \{\mathbf{x} \in S \colon x_1 = 1\}}$

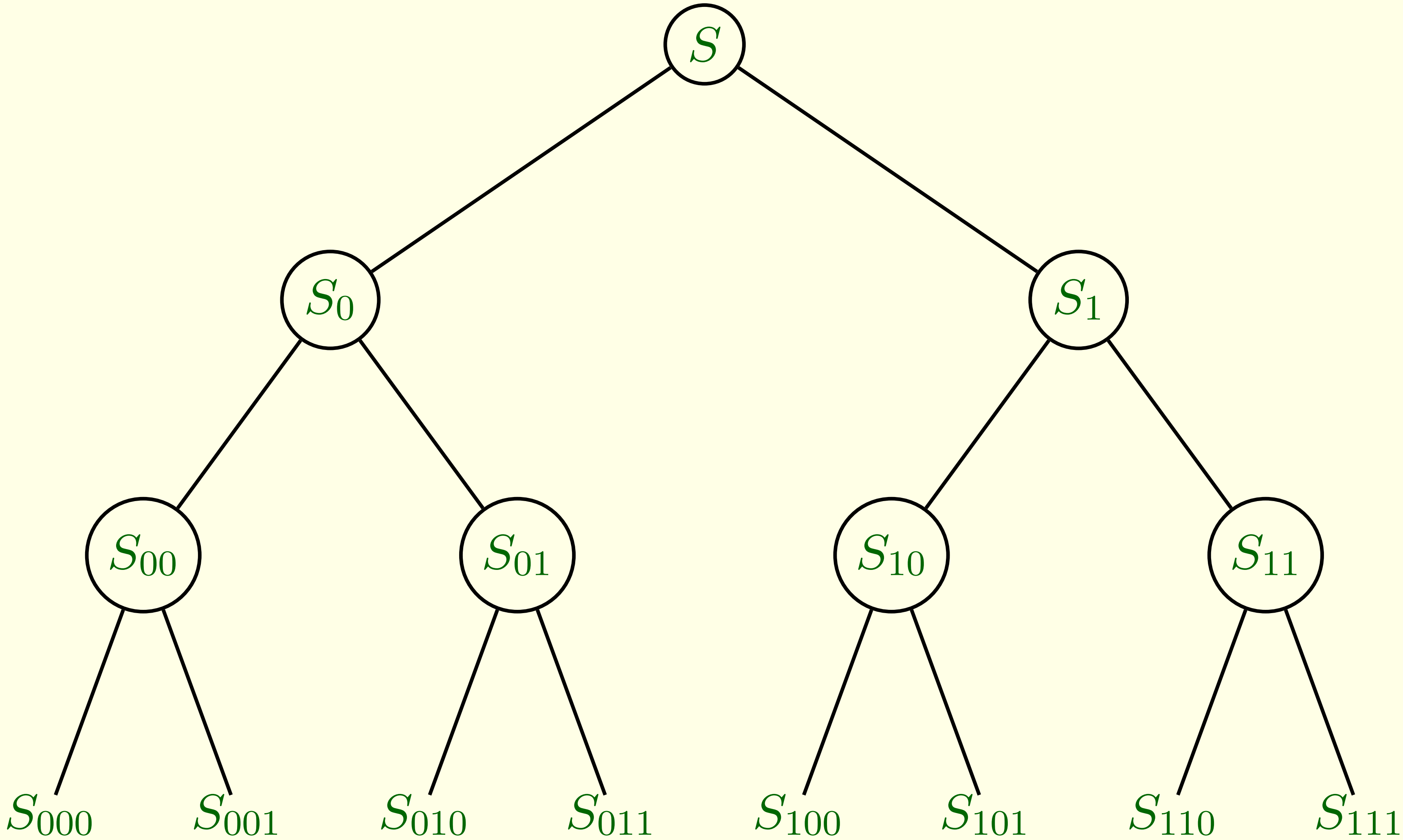
- Descomponemos $\boxed{S}$, al 2**o** **nivel**, como

$$\boxed{S = S_{00} \cup S_{01} \cup S_{10} \cup S_{11}}$$

$$\boxed{S_{00} = \{\mathbf{x} \in S \colon x_1 = 0, x_2 = 0\}, S_{01} = \{\mathbf{x} \in S \colon x_1 = 0, x_2 = 1\}, \ldots}$$

- Descomponemos $\boxed{S}$, al **último nivel (hojas)**, como

$$\boxed{S = S_{000} \cup S_{001} \cup S_{010} \cup S_{100} \cup S_{011} \cup S_{101} \cup S_{110} \cup S_{111}}$$


S
S_0
S_1
S_{00}
S_{01}
S_{10}
S_{11}
S_{000}
S_{001}
S_{010}
S_{011}
S_{100}
S_{101}
S_{110}
S_{111}

Árbol de enumeración: raíz, hojas, tamaño

- **Nodo** $\boxed{k}$: **subproblema** $\boxed{S_k}$
- **Nodo raíz**: **problema original** $\boxed{S}$
- **Nodos hoja**: **subproblemas triviales** $\boxed{S_{000}, S_{001}, \ldots}$ (para $\boxed{n = 3}$)
- Caso general: $\boxed{n}$ **variables binarias** $\boxed{x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}}$
- Número de **hojas**:

$\boxed{2^n}$

- Tamaño del árbol (número total de nodos):

$$\boxed{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1}$$

Explosión combinatoria

- ¿Podemos resolver el problema por **enumeración completa** (evaluando cada **hoja** y eligiendo la mejor)?
- **Explosión combinatoria:** el número de hojas crece exponencialmente en el número de variables $\boxed{n}$:

n	2^n
10	1.02×10^{3}
100	1.27×10^{30}
1000	1.07×10^{301}

- Supongamos que un ordenador puede evaluar $\boxed{10^6}$ *hojas*/segundo
- Entonces, emplearía $\boxed{4.02 \times 10^{16}}$ años en evaluar las $\boxed{2^{100}}$ *hojas* de un problema con $\boxed{n = 100}$ variables

Enumeración implícita mediante cotas

- Intentaremos **podar** el árbol, calculando y utilizando **cotas superiores** $\boxed{\overline{z}^{(k)}}$ e **inferiores** $\boxed{\underline{z}^{(k)}}$ en los valores $\boxed{z^{(k)}}$ de los subproblemas:

$$\boxed{(\mathsf{PE}_k) \quad \underline{z}^{(k)} \leq z^{(k)} \triangleq \max\left\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_k\right\} \leq \overline{z}^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, K}$$

- Las **cotas locales** $\boxed{\underline{z}^{(k)} \leq z^{(k)} \leq \overline{z}^{(k)}}$ nos proporcionan **cotas globales** $\boxed{\underline{z}^* \leq z^* \leq \overline{z}^*}$

- **Proposición:**

$$\boxed{\underline{z}^* \triangleq \max_k \underline{z}^{(k)} \leq z^* \leq \overline{z}^* \triangleq \max_k \overline{z}^{(k)}}$$

- Para resolver el problema hemos de obtener cotas globales que cumplan $\boxed{\underline{z}^* = \overline{z}^*}$

¿Cómo calcular cotas locales?

- Consideremos el subproblema

$$\boxed{(\mathsf{PE}_k) \quad z^{(k)} = \max\left\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in S_k\right\}}$$

- Sea $\boxed{(\mathsf{PL}_k)}$ una **relajación de programación lineal** para $\boxed{(\mathsf{PE}_k)}$, con valor máximo $\boxed{z^{\mathsf{PL}_k}}$

- Utilizaremos como **cota superior** para $\boxed{z^{(k)}}$ el valor $\boxed{\overline{z}^{(k)} \triangleq z^{\mathsf{PL}_k}}$

- Supongamos que $\boxed{\hat{\mathbf{x}}^{(k)}}$ es una **solución factible** para $\boxed{(\mathsf{PE}_k)}$, con valor $\boxed{\hat{z}^{(k)}}$

- Utilizaremos como **cota inferior** para $\boxed{z^{(k)}}$ el valor $\boxed{\underline{z}^{(k)} \triangleq \hat{z}^{(k)}}$

Tipos de poda

- Utilizaremos las cotas para podar el árbol de enumeración, tanto como sea posible

- Veremos tres tipos de poda:

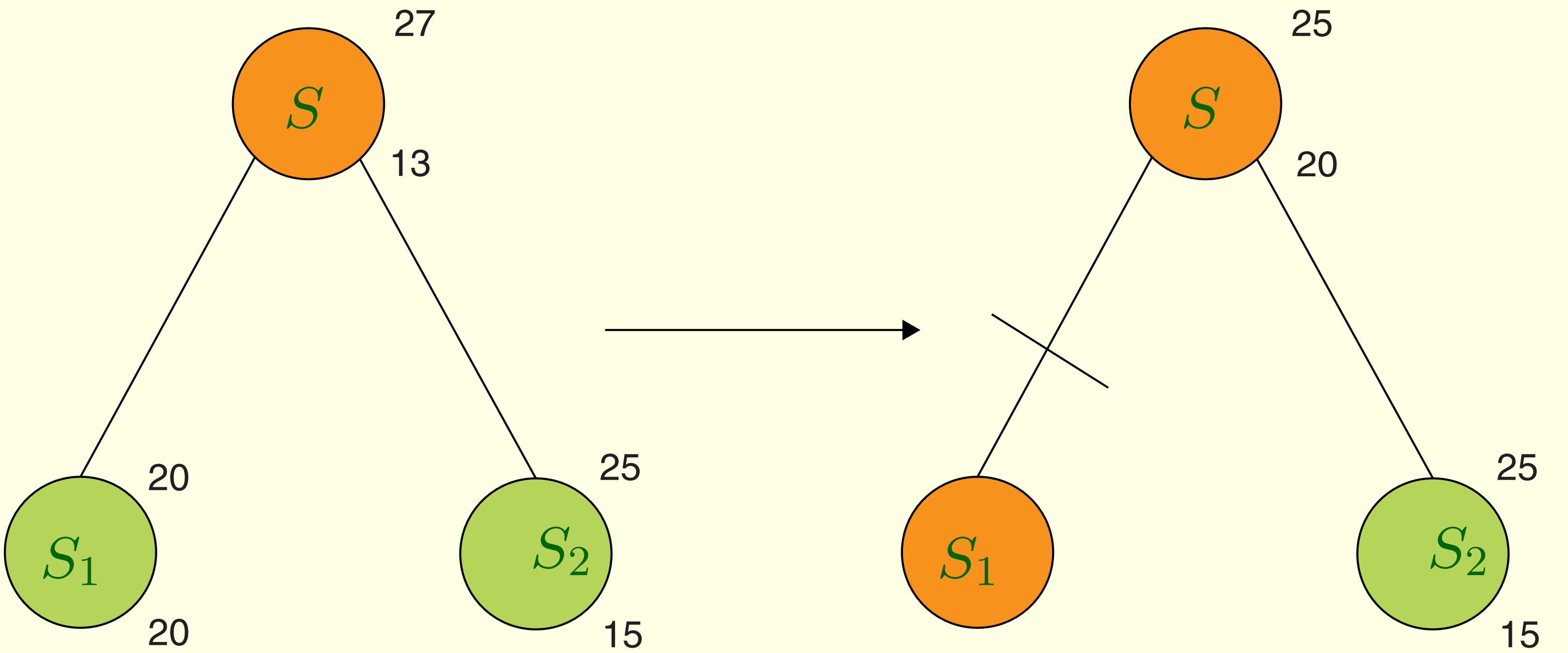
  1. Poda por optimalidad

  2. Poda por acotación

  3. Poda por no-factibilidad

- Las ilustraremos con ejemplos

Poda por optimalidad



- $\boxed{\overline{z} = \max\left\{\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}\right\} = \max\{20, 25\} = 25}$
- $\boxed{\underline{z} = \max\left\{\underline{z}^{(1)}, \underline{z}^{(2)}\right\} = \max\{20, 15\} = 20}$
- $\boxed{z^{(1)} = 20}$: hemos resuelto el subproblema $\boxed{(\mathrm{PE}_1)}$, para el nodo $\boxed{S_1}$
- **Nodos activos:** verde; **Nodos inactivos:** naranja

Poda por optimalidad

- Si la solución de la relajación lineal del subproblema para un nodo $\boxed{S_k}$ resulta entera: no es necesario continuar explorando a partir de ese nodo

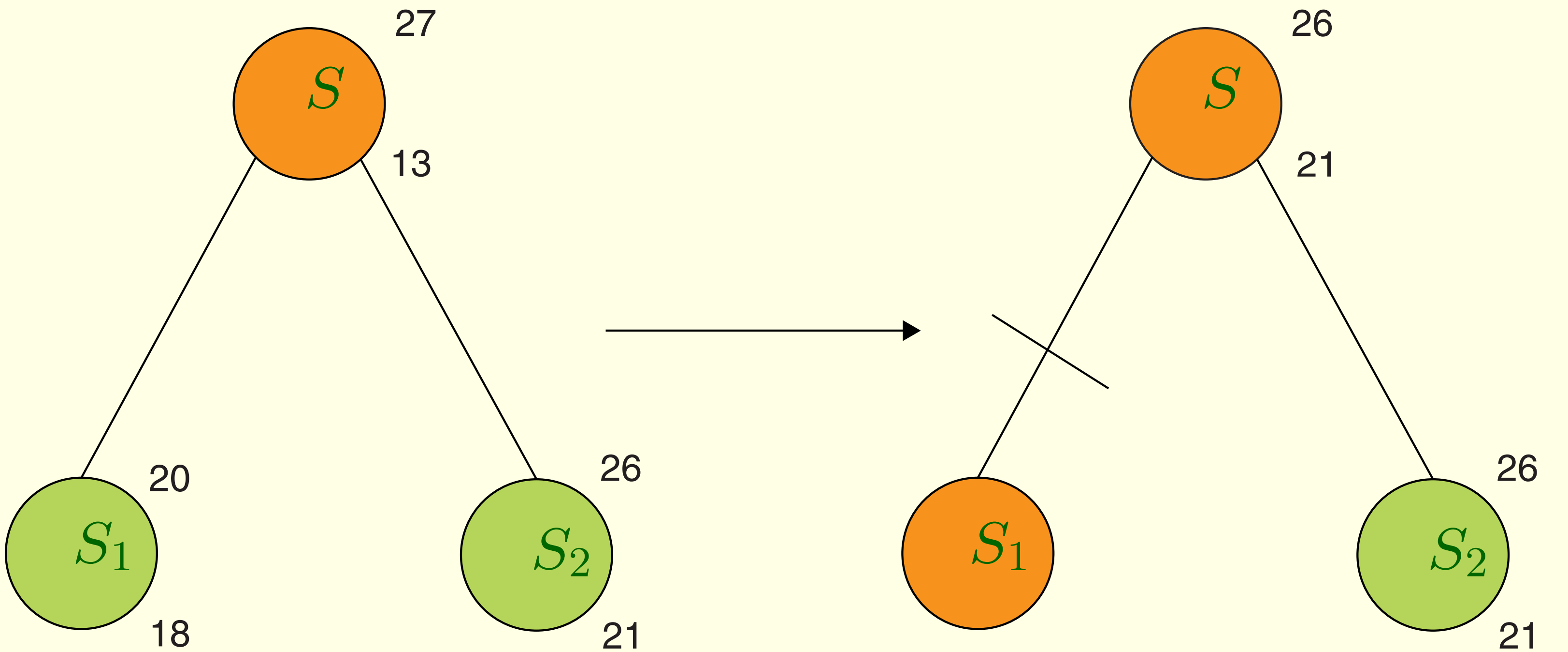
- Actualizamos las cotas globales

- Si la solución entera obtenida es mejor que la mejor solución entera anterior, sustituimos ésta por aquélla

- En inglés, la mejor solución entera obtenida hasta el momento es la “incumbent”; en el Excel Solver la traducen como “incumbente” (que no está en el diccionario de la RAE)

- Nosotros hablaremos de la **solución entera de referencia**

Poda por acotación



- $\boxed{\overline{z} = \max\left\{\overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)}\right\} = \max\{20, 26\} = 26}$

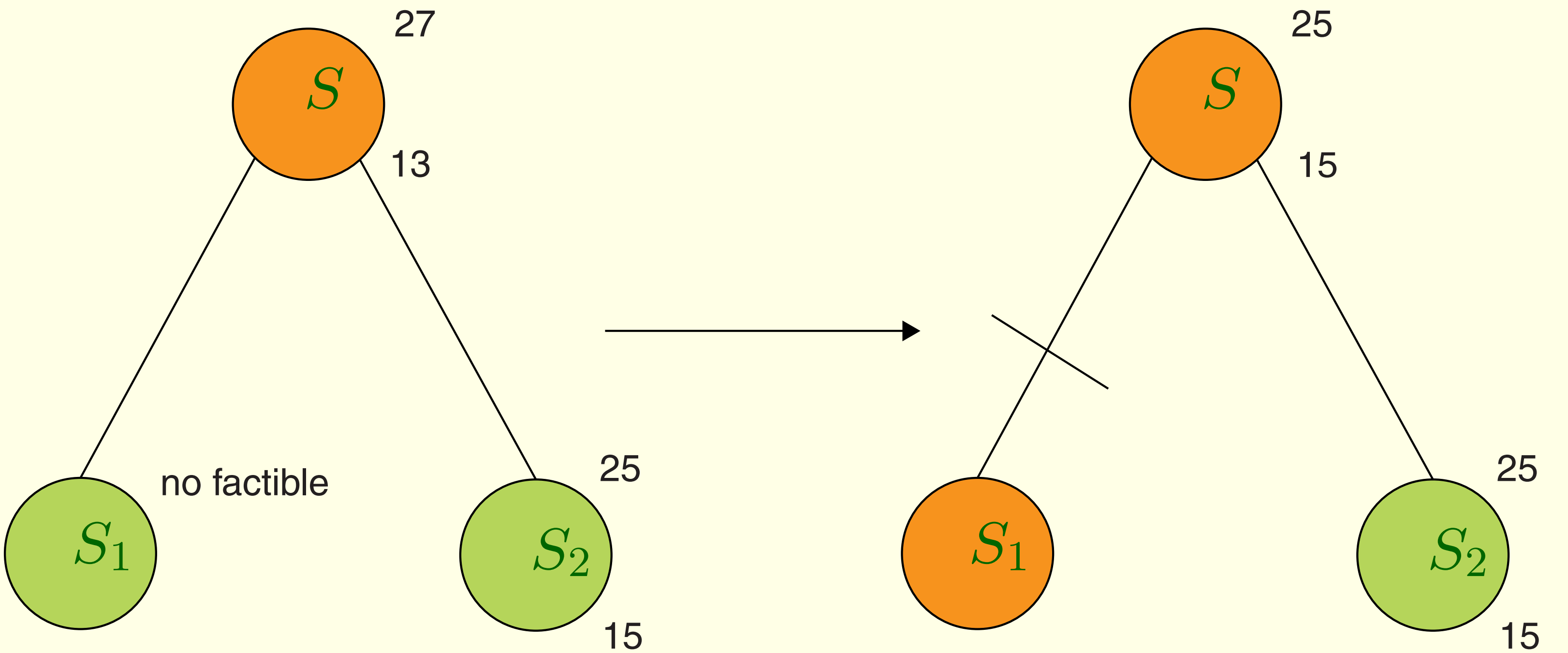
- $\boxed{\underline{z} = \max\left\{\underline{z}^{(1)}, \underline{z}^{(2)}\right\} = \max\{18, 21\} = 21}$

- Sabemos que la solución óptima no está en el subárbol que comienza en $\boxed{S_1}$

Poda por acotación

- Si la cota superior $\boxed{\overline{z}^{(k)}}$ para un nodo $\boxed{S_k}$ es menor que la cota inferior global $\boxed{\underline{z}}$ (que corresponde al valor de la mejor solución entera hasta el momento), podemos podar el subárbol que comienza en $\boxed{S_k}$: la solución óptima entera no está ahí

Poda por no-factibilidad



- El suproblema $\boxed{(\mathrm{PE}_1)}$ no es factible: $\boxed{S_1 = \emptyset}$

Poda por no-factibilidad

- Si un nodo no es factible, i.e. $\boxed{S_k = \emptyset}$, podemos podar el subárbol que comienza en $\boxed{S_k}$

Nodos/subproblemas activos e inactivos

- Un nodo/subproblema es **inactivo** si:

1. ya se ha ramificado en él; o
2. la solución de la relajación de PL es entera (poda por optimalidad); o
3. no es factible (poda por no factibilidad); o
4. puede ser podado por acotación

- En otro caso, el nodo/subproblema es **activo**
- **Nodos activos**: color verde; **nodos inactivos**: color naranja

Ejemplo 1: Método Ramifica & Acota

- Ilustraremos el **método R & A** resolviendo

$$
\boxed{\begin{array}{l}
z^* = \max 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\qquad \text{sujeto a} \\
\qquad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\
\qquad x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 4
\end{array}}
$$

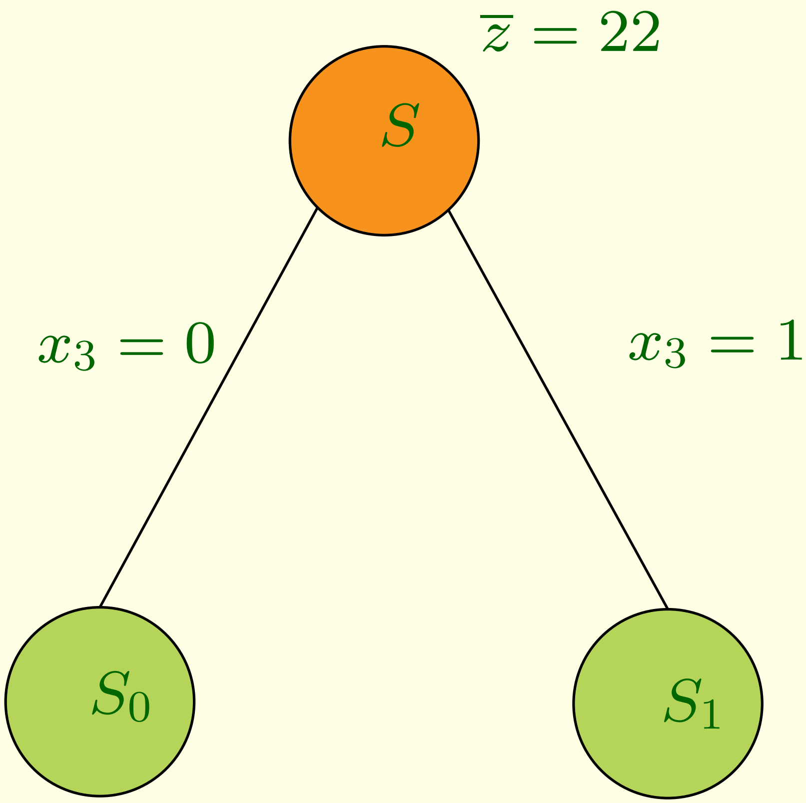
- **Conjunto factible:**

$$\boxed{S = \left\{\mathbf{x} \in \{0,1\}^4 \colon 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14\right\}}$$

- Resolvemos la **relajación PL**: $\boxed{\mathbf{x}^{(\mathsf{PL})} = (1, 1, \frac{1}{2}, 0), z^{(\mathsf{PL})} = 22}$

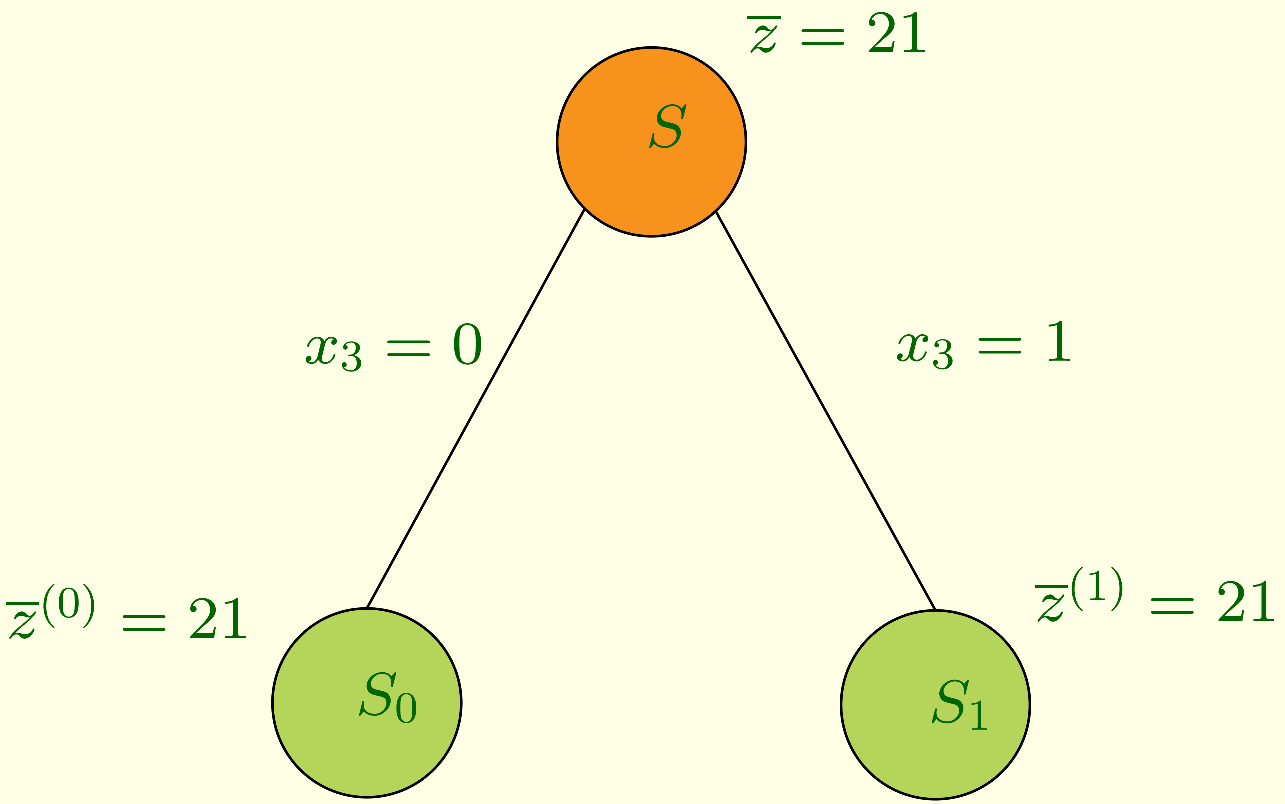
- *Ramificamos* (1^{er} nivel) en la **variable fraccionaria** $\boxed{x_3}$, creando dos subproblemas: en $\boxed{(\mathsf{PE}_0)}$ añadimos la restricción $\boxed{x_3 = 0}$; en $\boxed{(\mathsf{PE}_1)}$, añadimos $\boxed{x_3 = 1}$

Ejemplo 1: árbol parcial Ramifica & Acota



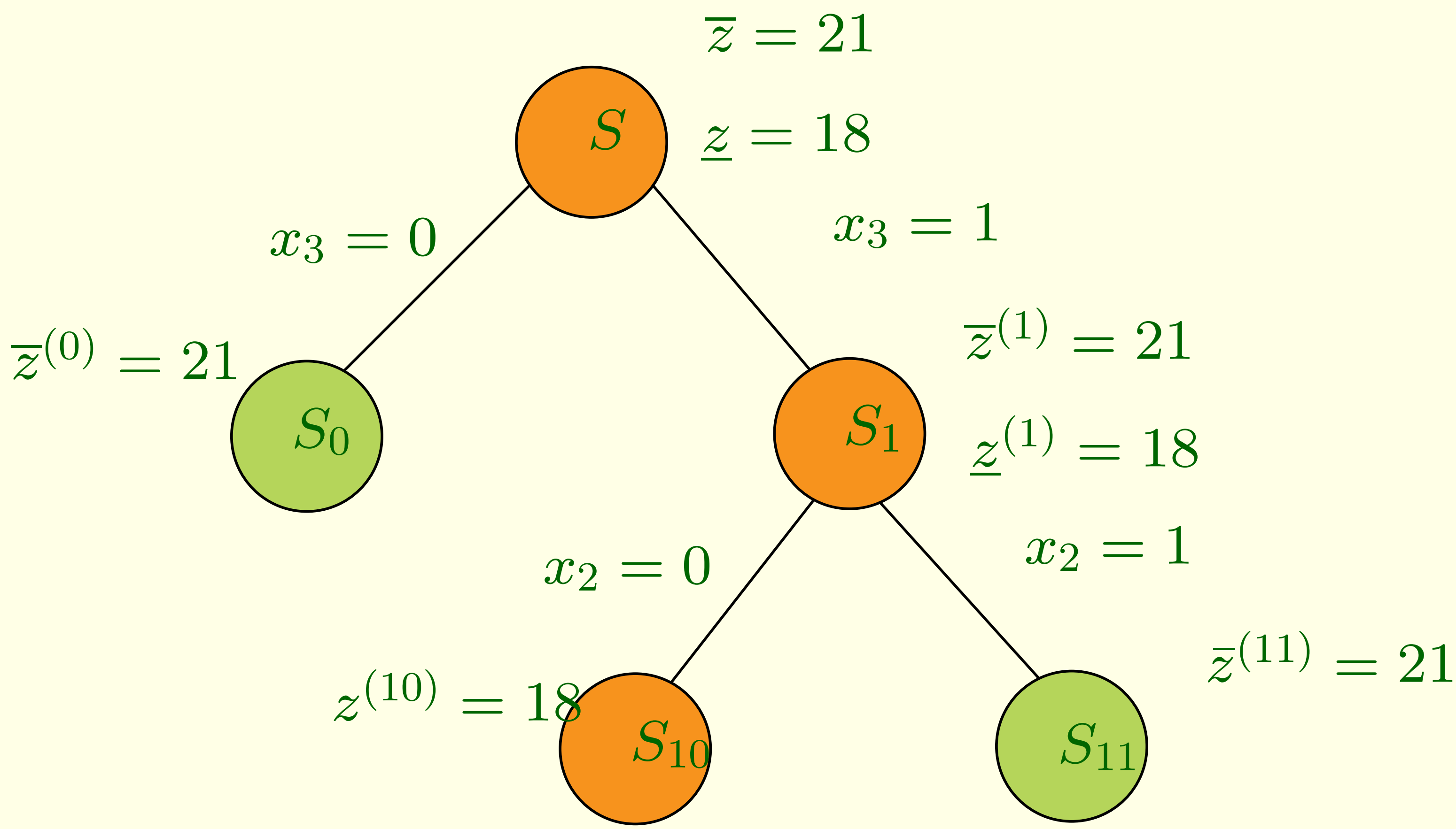
- $\boxed{S_0 = \{\mathbf{x} \in S \colon x_3 = 0\}}$, $\boxed{S_1 = \{\mathbf{x} \in S \colon x_3 = 1\}}$
- Resolvemos las relajaciones de PL para los subproblemas/nodos

Ej: Árbol parcial Ramifica & Acota



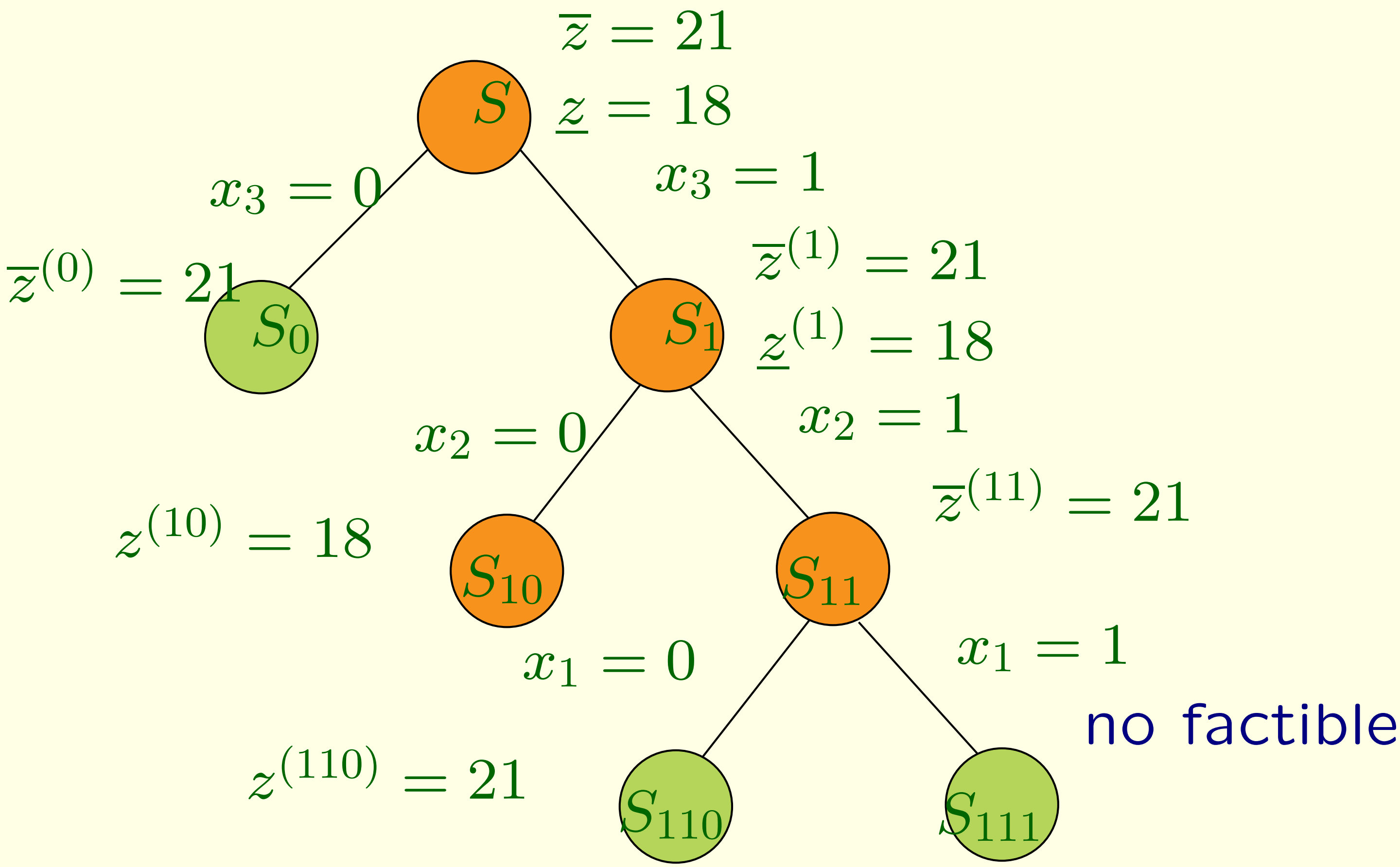
- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(0)} = (1, 1, 0, \frac{2}{3})}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(0)} = 21.67 \Longrightarrow \overline{z}^{(0)} = 21}$ ¿Por qué?
- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(1)} = (1, \frac{71}{100}, 1, 0)}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(1)} = 21.86 \Longrightarrow \overline{z}^{(1)} = 21}$ ¿Por qué?
- Actualizamos $\boxed{\overline{z} = \max\left\{\overline{z}^{(0)}, \overline{z}^{(1)}\right\} = 21}$

Ej: Árbol parcial Ramifica & Acota



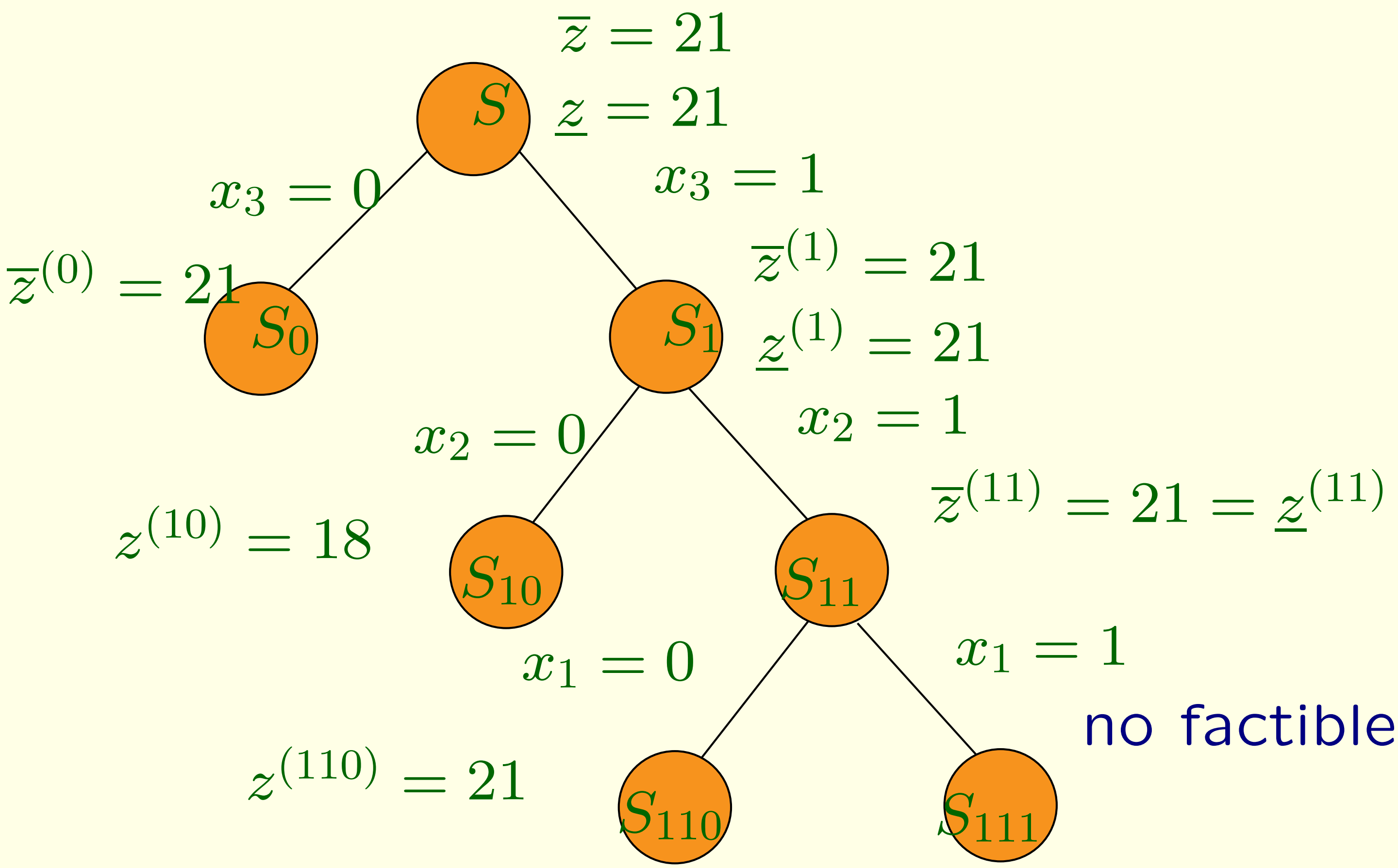
- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(10)} = (1, 0, 1, 1)}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(10)} = 18}$: **sol. entera de referencia**
- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(11)} = (\frac{3}{5}, 1, 1, 0)}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(11)} = 21.8 \Longrightarrow \overline{z}^{(11)} = 21}$ ¿Por qué?
- Actualizamos las cotas superiores e inferiores

Ej: Árbol parcial Ramifica & Acota



- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(110)} = (0,1,1,1)}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(110)} = 21}$: nueva **solución entera de referencia**
- $\boxed{S_{111} = \emptyset}$: subproblema no factible
- Actualizamos cotas superiores e inferiores

Ej: Árbol final Ramifica & Acota



- $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(110)} = (0, 1, 1, 1)}$, $\boxed{z^{\mathsf{PL},(110)} = 21}$: **solución óptima**

El algoritmo Ramifica & Acota

- Nodo activo: raíz $\boxed{S}$
- CB: **repetir** mientras haya nodos activos:
  - elegir un nodo activo $\boxed{S_k}$
  - resolver relajación $\boxed{(\mathsf{PL}_k)}$: $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(k)}}$, cota superior $\boxed{\overline{z}^{(k)}}$
  - si $\boxed{(\mathsf{PL}_k)}$ no es factible: podar; ir a CB
  - si $\boxed{\overline{z}^{(k)} \leq \underline{z}}$: podar por acotación; actualizar $\boxed{\overline{z}}$; ir a CB
  - si $\boxed{\mathbf{x}^{\mathsf{PL},(k)}}$ es entera:
    - actualizar solución de referencia $\boxed{\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\mathsf{PL},(k)}}$, $\boxed{\underline{z}}$
    - podar por optimalidad; ir a CB
  - en otro caso: ramificar en una variable fraccionaria, creando dos nuevos nodos; ir a CB

Selección de la variable de ramificación

- ¿Cómo seleccionar la variable $\boxed{x_j}$ de ramificación en un nodo?

- Ejemplo: subproblemas $\boxed{x_j \leq 2, x_j \geq 3}$

- **Regla común: ramificar en la variable más fraccionaria** (en la solución de la relajación de PL):

$$\boxed{j \in \arg\max_j \min\{f_j, 1 - f_j\}, \quad \text{donde } f_j = x_j^* - \lfloor x_j^* \rfloor}$$

Selección del siguiente nodo activo

- ¿Cómo elegir un nodo activo entre los disponibles?
- Estrategias de **exploración del árbol de enumeración**:
  - **exploración en profundidad ("depth-first search"):** busca obtener cuanto antes soluciones factibles
  - **exploración en amplitud ("breadth-first search"):**
  - **elección del mejor nodo activo $\boxed{S_k}$ (con la mayor cota superior $\boxed{\overline{z}^{(k)}}$):** busca obtener cuanto antes buenas cotas superiores