Soluciones básicas factibles y vértices
Introducción al método símplex

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- PLs en formato estándar
- Vértices y soluciones básicas factibles
- Idea del método símplex
- Tablas símplex y eliminación gaussiana: un ejemplo

Caso general: región factible

- En general, la **región factible** $\boxed{P}$ de un PL con variables de decisión $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)}$ es un **poliedro convexo** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$

- Un **poliedro convexo** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$ es una región de puntos $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)}$ que satisfacen un conjunto de desigualdades lineales

- Hemos visto en los ejemplos que la solución óptima se alcanza en un **vértice** de $\boxed{P}$.

- **Teorema fundamental de la PL: Si un PL tiene solución óptima, entonces ésta se alcanza en un vértice**

- Pero ¿Qué son **vértices** en $\boxed{\mathbb{R}^n}$?

Reformulación en formato estándar

- Trabajaremos con PLs en **formato estándar**: con (1) variables no-negativas; (2) objetivo de tipo "max"; y (3) sólo con restricciones de igualdad y no-negatividad; **además, con las constantes del Lado Derecho no-negativas**

- Podemos reformular cualquier PL en formato estándar

- **Variables de holgura:**

$$x_1 + x_2 \leq 24 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 24 \\ s_1 \geq 0 \end{cases}$$

- **Variables de exceso ("surplus"):**

$$x_1 + x_2 \geq 800 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - s_2 = 800 \\ s_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **Variables no restringidas en signo:**

$$x \text{ no restringida en signo} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Estructura de las soluciones de un PL

- ¿Cuál es la **estructura de las soluciones óptimas**?

- Consideremos un PL en **formato estándar** (con los $\boxed{b_i \geq 0}$):

$$\boxed{\begin{aligned} & z^* = \max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ & \qquad \text{sujeto a:} \\ & \qquad a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \qquad x_1, \ldots, x_n \geq 0, \end{aligned}}$$

- Supondremos que $\boxed{m < n}$, y que el rango de la matriz de coeficientes $\boxed{\mathbf{A} = (a_{ij})}$ es $\boxed{m}$, i.e. sus $\boxed{m}$ filas son **linealmente independientes (l.i.)**. ¿Y si no?

Soluciones básicas (factibles)

- Para $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top}$, las soluciones óptimas se alcanzan en **vertices**. ¿Qué es un **vértice** cuando $\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top}$?
- Notación matricial: $\boxed{\mathbf{a}_j = (a_{ij})_{i=1}^m}$ (columna $\boxed{j}$), $\boxed{\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^m}$, $\boxed{\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^n}$, $\boxed{\mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^n}$, $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}}$
- Escribimos las restricciones como $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$, i.e.

$$\boxed{\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}}$$

- Elegimos una **base** de $\boxed{\mathbf{A}}$, i.e. un conjunto de $\boxed{m}$ columnas l.i.:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{j_1} & \cdots & \mathbf{a}_{j_m} \end{bmatrix}}$$

- Las variables $\boxed{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}}$ son **básicas**; las demás son **no-básicas**

Soluciones básicas (factibles)

- La correspondiente **solución básica** $\boxed{\mathbf{x^B} = (x_j^{\mathbf{B}})_{j=1}^n}$ tiene las variables no-básicas iguales a cero. Los valores de las variables básicas se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones $\boxed{m \times m}$:

$$\boxed{\mathbf{a}_{j_1} x_{j_1} + \cdots + \mathbf{a}_{j_m} x_{j_m} = \mathbf{b}}$$

- **Def:** $\boxed{\mathbf{x^B}}$ es una **solución básica factible** si $\boxed{\mathbf{x^B} \geq \mathbf{0}}$
- Los **vértices** son las **soluciones básicas factibles (SBF)**
- Por el Teorema fundamental, para encontrar una solución óptima sólo tenemos que buscar entre los vértices (SBF)
- ¿Cuántos vértices puede haber?

Ejemplo

- Consideremos el PL con ($\boxed{n = 3}$ variables, $\boxed{m = 2}$ restricciones):

$$\boxed{\begin{aligned} & z^* = \max 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & \qquad \text{sujeto a} \\ & \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & \qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}}$$

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_1, x_2}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}} = (\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0)}$, que es factible: es un **vértice**

Ejemplo

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_1, x_3}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,3\}} = (22, 0, -12)}$, que **no es factible**: no es un vértice

- Tomemos como variables básicas $\boxed{x_2, x_3}$, i.e. la base es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}$$

- La correspondiente solución básica es: $\boxed{\mathbf{x}^{\{2,3\}} = (0, \frac{22}{7}, \frac{26}{7})}$, que **es factible**: es un vértice

Ejemplo: determinación del vértice óptimo

- El PL tiene dos vértices:
  - Vértice 1: $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}} = (\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0)}$
  - Vértice 2: $\boxed{\mathbf{x}^{\{2,3\}} = (0, \frac{22}{7}, \frac{26}{7})}$
- Calculamos el valor del objetivo en cada vértice:
  - Vértice 1: $\boxed{z^{\{1,2\}} = \frac{274}{5}}$
  - Vértice 2: $\boxed{z^{\{2,3\}} = \frac{368}{7}}$
- Como $\boxed{z^{\{1,2\}} > z^{\{2,3\}}}$, el mejor vértice es $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}}}$
- Por el Teorema fundamental, si el PL tiene solución óptima, ésta ha de ser $\boxed{\mathbf{x}^{\{1,2\}}}$

Necesidad de un método eficiente

- ¿Cómo resolver un PL en formato estándar, de tamaño $\boxed{m \times n}$?

- Por el Teorema Fundamental, basta buscar la solución óptima entre los vértices

- ¿Cuántos vértices puede haber?

- El número de vértices no puede superar $\boxed{\binom{n}{m}}$

- Ej: $\boxed{\binom{100}{50} \approx 10^{29}}$

- Incluso en PLs no muy grandes, el número de vértices es inmenso: no es posible evaluarlos todos

El método símplex

- Algoritmo más importante de la Investigación Operativa

- Inventado por G.B. Dantzig en 1947

- Esquema del método símplex:

  1. Inicialización: encontrar un vértice (SBF) inicial
  2. Bucle: Intentar encontrar un vértice adyacente mejor
  3. Si se encuentra, volver a 2.
  4. Si no, parar.

- Utiliza el método de eliminación gaussiana para resolver ecuaciones lineales

PL ejemplo

- Ilustraremos las ideas del método símplex mediante un ejemplo

- Consideremos el PL

$$
\boxed{\begin{aligned}
&z^* = \max 4x_1 + 3x_2\\
&\qquad \text{sujeto a}\\
&\qquad 2x_1 + x_2 \leq 40\\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 30\\
&\qquad x_1 \leq 15\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}}
$$

Ej: reformulación en formato estándar

- Reformulamos el PL en **formato estándar** (**con el Lado Derecho no-negativo**):

$$
\boxed{\begin{aligned}
& z^* = \max 4x_1 + 3x_2 \\
& \qquad \text{sujeto a} \\
& \qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\
& \qquad x_1 + x_2 + x_4 = 30 \\
& \qquad x_1 + x_5 = 15 \\
& \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}}
$$

- Consideramos la **ecuación auxiliar** para el objetivo $\boxed{z}$:

$$\boxed{z - 4x_1 - 3x_2 = 0}$$

Ej: Sistema de ecuaciones y base inicial

- Nos fijamos en el **sistema de ecuaciones**, que representamos de forma de **tabla**:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	2	1	1	0	0	40
	1	1	0	1	0	30
	1	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

- Seleccionamos una **base inicial**: lo más sencillo es tomar como **variables básicas** $\boxed{x_3, x_4, x_5}$

- La **SBF** (i.e. el **vértice**) correspondiente es $\boxed{\mathbf{x}^{\{3,4,5\}} = (0, 0, 0, 40, 30, 15)^\mathsf{T}}$, con valor $\boxed{z^{\{3,4,5\}} = 0\,€}$. ¿Por qué?

Ej: Cambiando la base: pivotaje

- Ampliamos la **tabla** con una columna que nos indica cuáles son las **variables básicas**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	2	1	1	0	0	40
x_4	1	1	0	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

- Supongamos que queremos modificar la base actual, p. ej. sacando la variable $\boxed{x_4}$ y poniendo en su lugar $\boxed{x_2}$
- Esta operación de **pivotaje** corresponde a obtener un **vértice adyacente**
- ¿Cómo construimos la nueva tabla?

Ej: Cambiando la base: pivotaje

- Aplicaremos el **método de eliminación gaussiana**

- Identificamos el **coeficiente pivote**:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	2	1	1	0	0	40
x_4	1	$\boxed{1}$	0	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

Ej: Cambiando la base: pivotaje

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	2	1	1	0	0	40
x_4	1	$\boxed{1}$	0	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	1	0	1	-1	0	10
x_2	1	1	0	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	15
z	-1	0	0	3	0	90 €

Ej: Método símplex

- Consideremos el PL anterior, con **tabla símplex** inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	2	1	1	0	0	40
x_4	1	1	0	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

- ¿Qué variable no-básica ponemos en la base?

- Aplicamos la **Regla del Mínimo Coste Reducido Negativo**: ponemos $\boxed{x_1}$

- ¿Qué variable básica sacamos de la base?

- Aplicamos la **Regla del Cociente Mínimo**: como $\boxed{\frac{15}{1} = \text{mín}\left\{\frac{40}{2}, \frac{30}{1}, \frac{15}{1}\right\}}$, sacaremos $\boxed{x_5}$

Ej: Primer Pivotaje

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	2	1	1	0	0	40
x_4	1	1	0	1	0	30
x_5	$\boxed{1}$	0	0	0	1	15
z	-4	-3	0	0	0	0 €

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	0	1	1	0	-2	10
x_4	0	1	0	1	-1	15
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	-3	0	0	4	60 €

Ej: Método símplex (cont.)

- La **tabla símplex** actual es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	0	1	1	0	-2	10
x_4	0	1	0	1	-1	15
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	-3	0	0	4	60 €

- ¿Qué variable no-básica ponemos en la base?
- Aplicamos la **Regla MCRN**: ponemos $\boxed{x_2}$
- ¿Qué variable básica sacamos de la base?
- Aplicamos la **Regla del Cociente Mínimo**: como $\boxed{\frac{10}{1} = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{15}{1}\right\}}$, sacamos $\boxed{x_3}$

Ej: Segundo Pivotaje

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_3	0	$\boxed{1}$	1	0	-2	10
x_4	0	1	0	1	-1	15
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	-3	0	0	4	60 €

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	1	0	-2	10
x_4	0	0	-1	1	1	5
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	0	3	0	-2	90 €

Ej: Método símplex (cont.)

- La **tabla símplex** actual es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	1	0	-2	10
x_4	0	0	-1	1	1	5
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	0	3	0	-2	90 €

- ¿Qué variable no-básica ponemos en la base?
- Aplicamos la **Regla MCRN**: ponemos $\boxed{x_5}$
- ¿Qué variable básica sacamos de la base?
- Aplicamos la **Regla del Cociente Mínimo**: como $\boxed{\frac{5}{1} = \min\left\{\frac{5}{1}, \frac{15}{1}\right\}}$, sacamos $\boxed{x_4}$

Ej: Tercer Pivotaje

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	1	0	-2	10
x_4	0	0	-1	1	$\boxed{1}$	5
x_1	1	0	0	0	1	15
z	0	0	3	0	-2	90 €

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	-1	2	0	20
x_5	0	0	-1	1	1	5
x_1	1	0	1	-1	0	10
z	0	0	1	2	0	100 €

Ej: Método símplex (cont.)

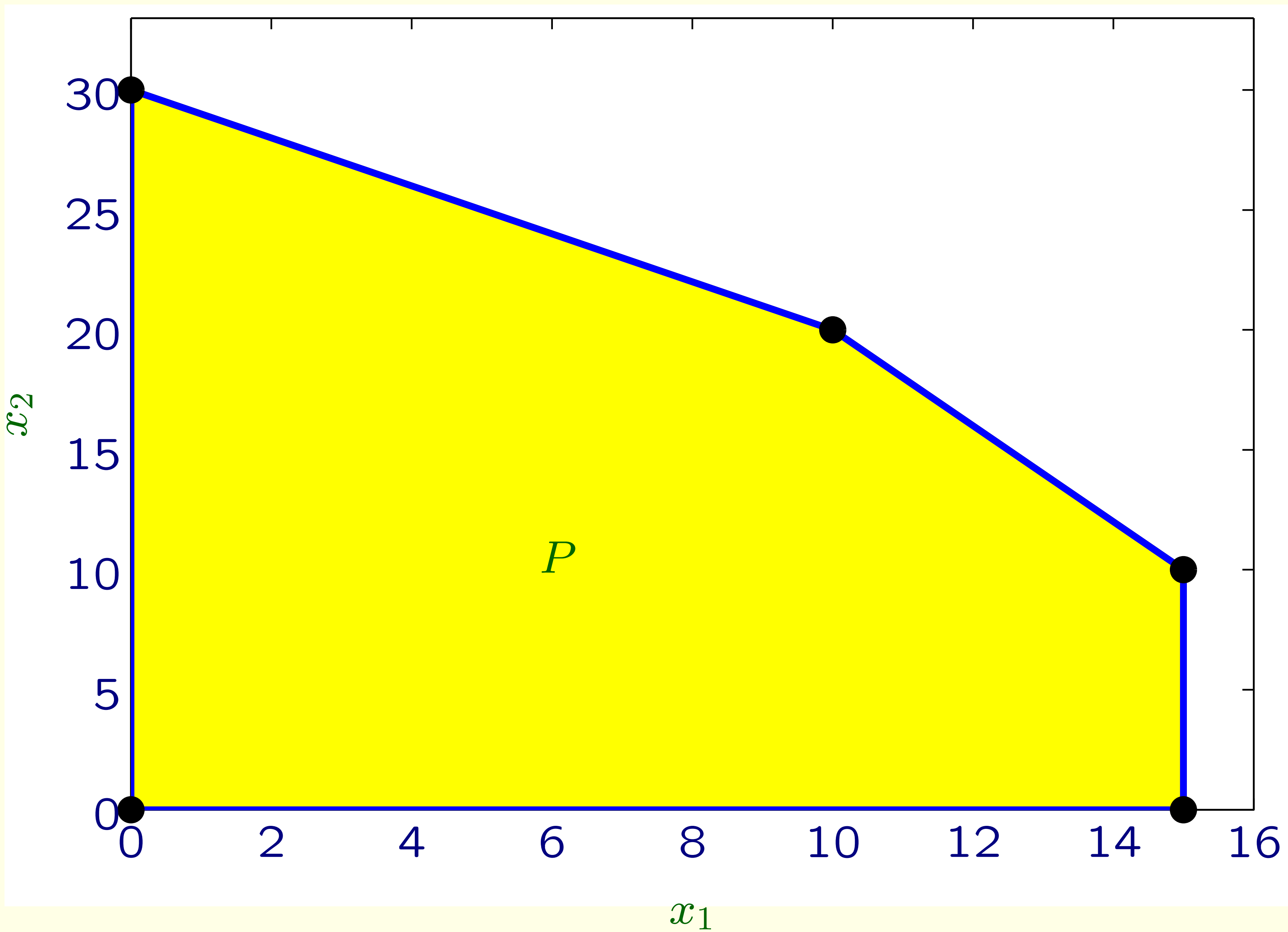
- La **tabla símplex** actual es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	-1	2	0	20
x_5	0	0	-1	1	1	5
x_1	1	0	1	-1	0	10
z	0	0	1	2	0	100 €

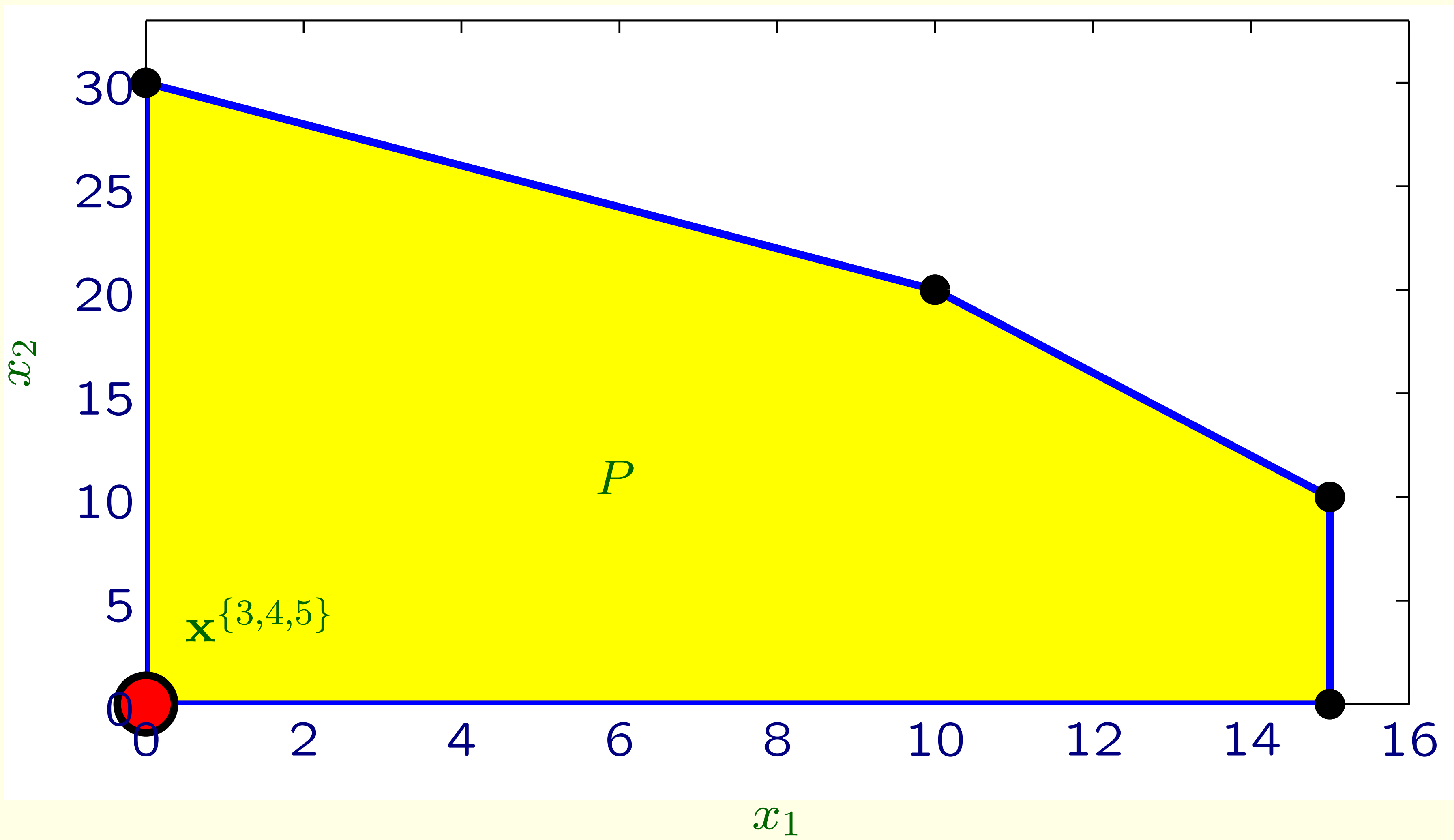
- **Todos los costes reducidos son no-negativos**

- Por tanto, terminamos: **la SBF actual es óptima (máxima)**

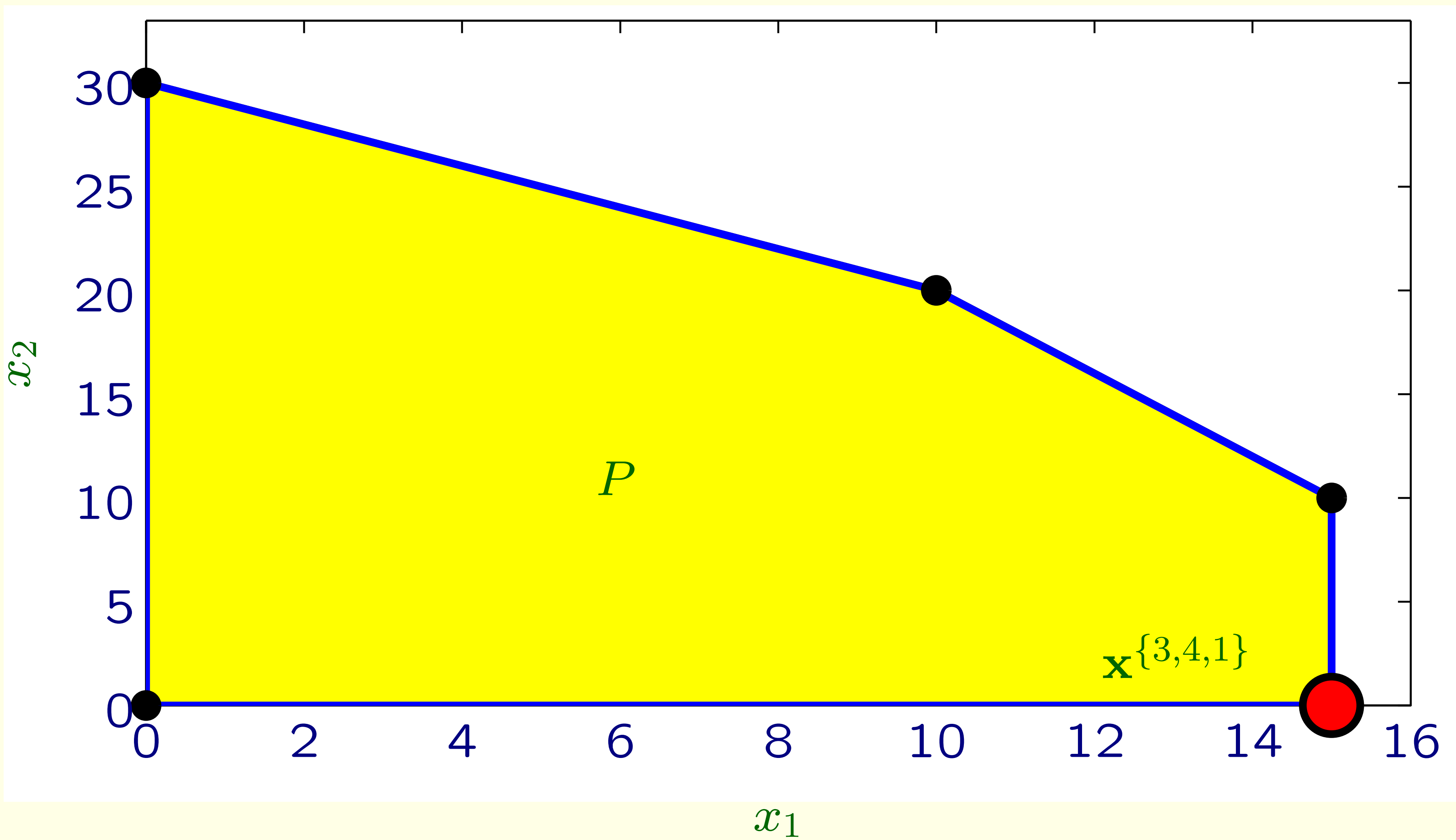
Ej: Geometría del Método símplex



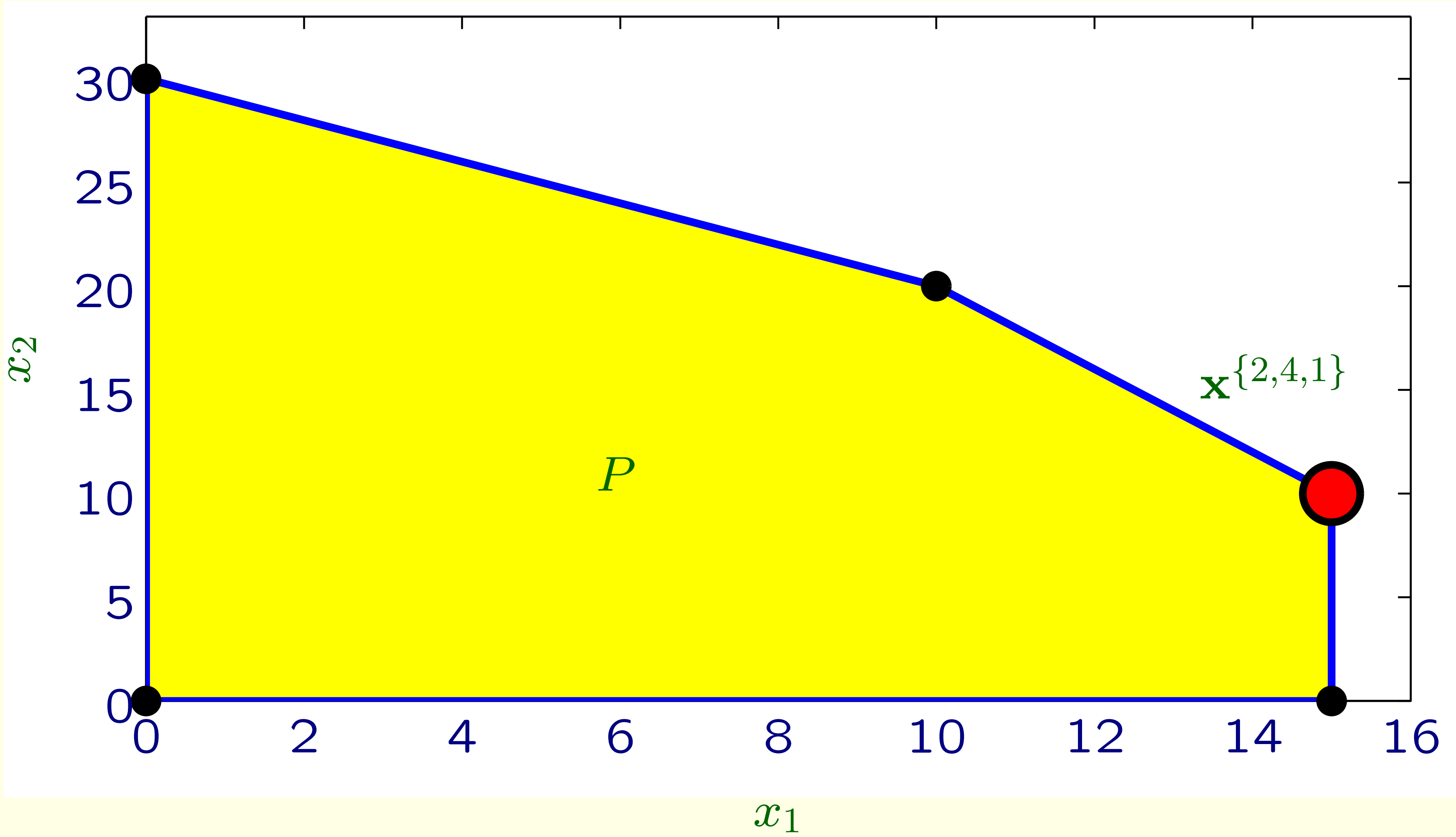
Ej: Vértice inicial: $\boxed{\mathbf{x}^{\{3,4,5\}}}$



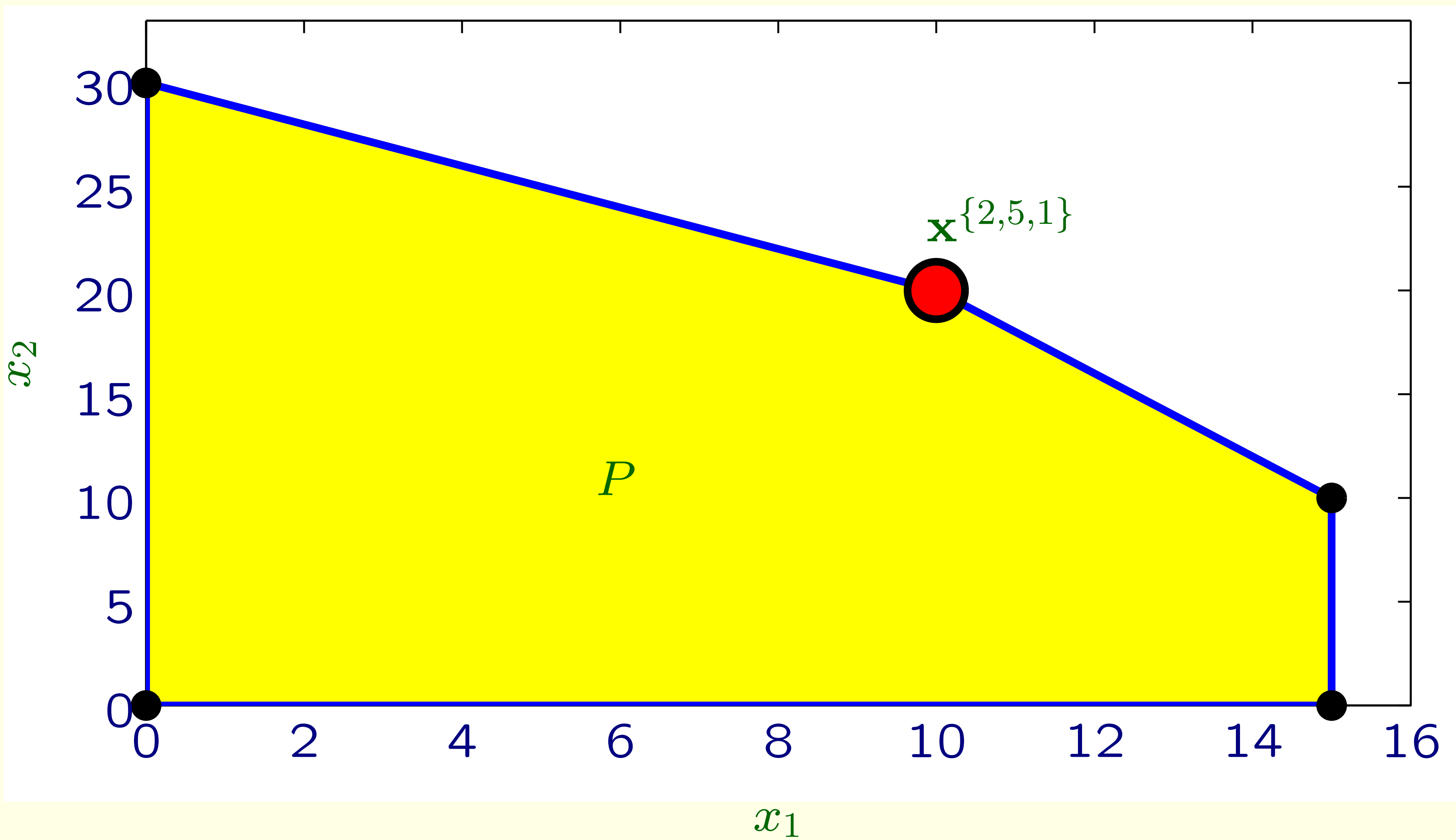
Ej: Primer pivotaje, vértice $\mathbf{x}^{\{3,4,1\}}$



Ej: Segundo pivotaje, vértice $\mathbf{x}^{\{2,4,1\}}$



Ej: Tercer pivotaje, vértice $\mathbf{x}^{\{2,5,1\}}$



Ej: El vértice $\boxed{\mathbf{x}^{\{2,5,1\}}}$ es óptimo (máximo)