Simulación III

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- Comentario: generación de v.a. exponenciales

- Generación de v.a. normales

- Método de convolución: generación de v.a. Erlang

- Método de aceptación/rechazo: generación de v.a. Poisson

Generación de v.a. exponenciales

- Hemos visto cómo generar una v.a. $\boxed{X \sim \text{Exp}(\lambda)}$ a partir de $\boxed{U \sim \text{Uniforme}[0,1]}$:

$$\boxed{X \triangleq -\frac{\ln(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)}$$

- Podemos simplificar la fórmula, observando que:

$$\boxed{U \sim \text{Uniforme}[0,1] \Longleftrightarrow 1-U \sim \text{Uniforme}[0,1]}$$

- Por tanto, también podemos generar una v.a. $\boxed{X \sim \text{Exp}(\lambda)}$ calculando $\boxed{X}$ como

$$\boxed{X \triangleq -\frac{\ln(U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)}$$

La distribución normal

- Es una de las distribuciones más importantes

- **Función de densidad** de $\boxed{X \sim \mathrm{Normal}(0,1)}$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

- **Función de distribución**:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

La distribución normal

- ¿Cómo podemos generar $\boxed{X \sim \mathrm{Normal}(0,1)}$?

- Para aplicar el **método de la transformada inversa**, tendríamos que resolver la ecuación

$$\boxed{F(X) = U}$$

- Sin embargo, **no podemos "despejar"** $\boxed{X}$ en esa ecuación: **necesitamos un método distinto**

El método de Box & Muller

- Supongamos que tenemos dos v.a. independientes:

$$\boxed{Y \sim \text{Exp}(1/2), \quad Z \sim \text{Uniforme}[0, 2\pi]}$$

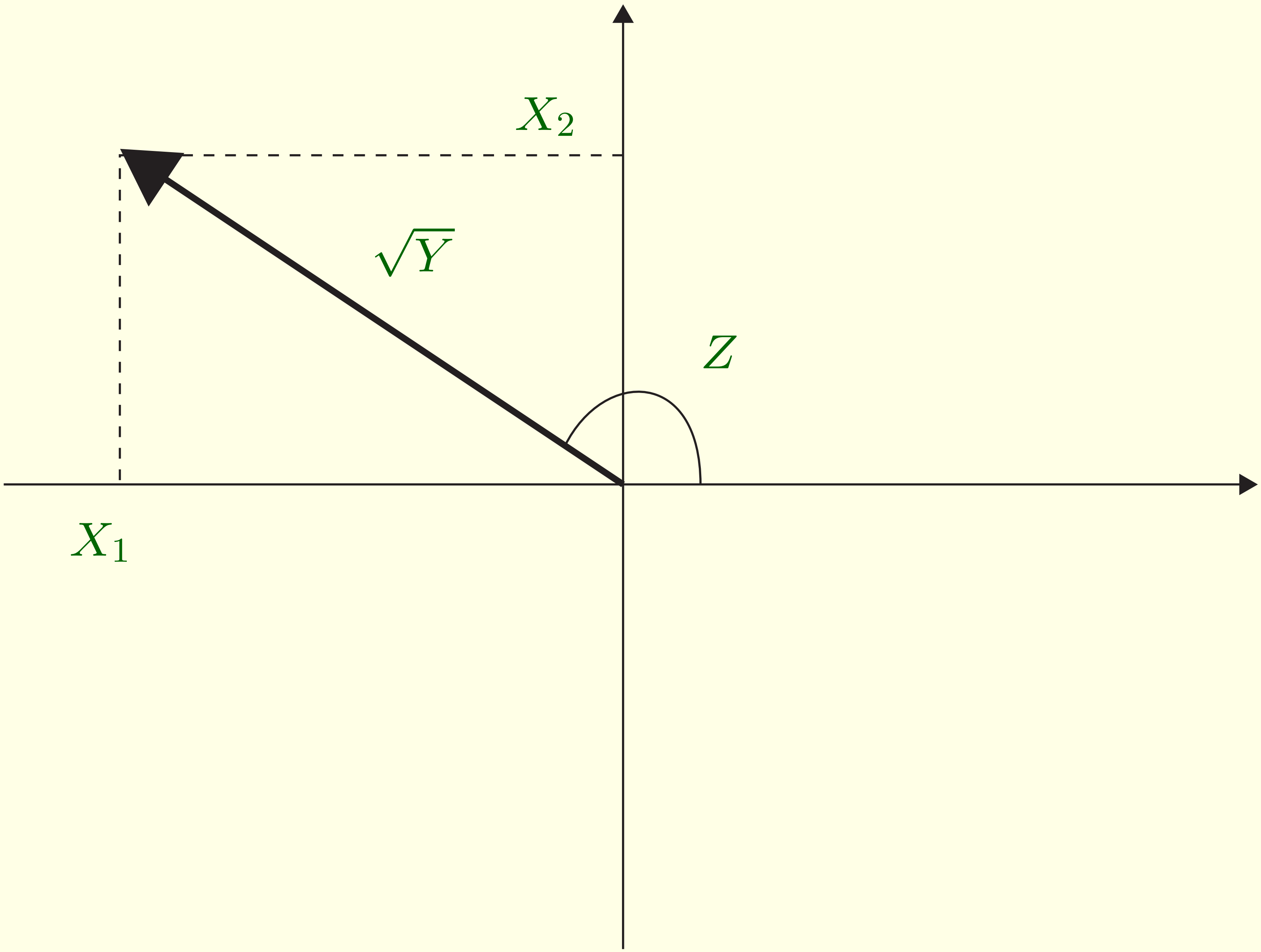
- Box & Muller mostraron que, si calculamos

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &\triangleq \sqrt{Y}\cos(Z) \\ X_2 &\triangleq \sqrt{Y}\sin(Z), \end{aligned}}$$

se cumple que $\boxed{X_1, X_2 \sim \text{Normal}(0, 1)}$ i.i.d

- Nota: $\boxed{(X_1, X_2)}$ es un **punto en el plano**, con **distancia al origen** $\boxed{\sqrt{Y}}$, y **ángulo** $\boxed{Z}$

El método de Box & Muller



El método de Box & Muller

- Para generar v.a. independientes

$$\boxed{Y \sim \mathrm{Exp}(1/2), \quad Z \sim \mathrm{Uniforme}[0, 2\pi],}$$

- Generamos $\boxed{U_1, U_2 \sim \mathrm{Uniforme}[0, 1]}$
- Generamos $\boxed{Y \triangleq -2\ln(U_1)}$
- Generamos $\boxed{Z \triangleq 2\pi U_2}$
- Ahora, calculamos

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &\triangleq \sqrt{Y}\cos(Z) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 &\triangleq \sqrt{Y}\sin(Z) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2), \end{aligned}}$$

obteniendo $\boxed{X_1, X_2 \sim \mathrm{Normal}(0, 1)}$ i.i.d.

Generación de v.a. $\boxed{\mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)}$

- ¿Cómo generar una v.a. $\boxed{W \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)}$?

- Generamos $\boxed{X \sim \mathrm{Normal}(0, 1)}$

- Calculamos

$$\boxed{W \triangleq \mu + \sigma X}$$

- Entonces, $\boxed{W \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)}$

El método de convolución

- Algunas v.a. se pueden representar como sumas de otras v.a. i.i.d: en tales casos aplicamos el **método de convolución**, que consiste en calcularlas como tales sumas

- Ej: la distribución $\boxed{Y \sim \mathrm{Erlang}(k, \lambda)}$, donde $\boxed{k}$ es un entero positivo, se puede obtener como suma de $\boxed{k}$ v.a. i.i.d. $\boxed{X_1, \ldots, X_k \sim \mathrm{Exp}(k\lambda)}$:

$$\boxed{Y \triangleq X_1 + \cdots + X_k}$$

Ej: generación de una v.a. $\boxed{\mathrm{Erlang}(k, \lambda)}$

- Ilustraremos el **método de convolución** para generar $\boxed{Y \sim \mathrm{Erlang}(k, \lambda)}$
- Generamos una muestra i.i.d. $\boxed{U_1, \ldots, U_k \sim \mathrm{Uniforme}[0, 1]}$
- Calculamos una muestra i.i.d. $\boxed{X_1, \ldots, X_k \sim \mathrm{Exp}(k\lambda)}$:

$$\boxed{X_i \triangleq -\frac{\ln(U_i)}{k\lambda}, \quad i = 1, \ldots, k}$$

- Calculamos

$$\boxed{\begin{aligned} Y &\triangleq X_1 + \cdots + X_k = -\frac{1}{k\lambda}\left\{\ln(U_1) + \cdots + \ln(U_k)\right\} \\ &= -\frac{1}{k\lambda}\ln\left\{U_1 \times \cdots \times U_k\right\} \sim \mathrm{Erlang}(k, \lambda) \end{aligned}}$$

El método de aceptación/rechazo

- El método de aceptación/rechazo para generar una v.a. $\boxed{Y}$ tiene la siguiente forma general:

- Paso 1: Generar una v.a. $\boxed{U}$ y calcular un valor tentativo de $\boxed{Y}$

- Paso 2a: Si se cumple una cierta condición, **aceptar** el valor tentativo de $\boxed{Y}$

- Paso 2b: Si no se cumple la condición, **rechazar** el valor tentativo, y volver al paso 1

Ej: generación de $\boxed{Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)}$

- Ilustraremos el **método de aceptación/rechazo** para generar una v.a. $\boxed{Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)}$:

$$\boxed{\mathbb{P}\{Y = n\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- Aplicaremos la **interpretación de la distribución de Poisson**: p. ej. en una cola $\boxed{M/M/1}$ con tasa de llegadas $\boxed{\lambda}$ (tiempos entre llegadas $\boxed{\sim \mathrm{Exp}(\lambda)}$), $\boxed{Y}$ representa el **número de llegadas que ocurren en una unidad de tiempo**

Ej: generación de $\boxed{Y \sim \text{Poisson}(\lambda)}$

- Aplicaremos la **interpretación de la distribución de Poisson**: p. ej. en una cola $\boxed{M/M/1}$ con tasa de llegadas $\boxed{\lambda}$ (tiempos entre llegadas $\boxed{\sim \text{Exp}(\lambda)}$), $\boxed{Y}$ representa el **número de llegadas que ocurren en una unidad de tiempo**

- Generaremos una sucesión de tiempos entre llegadas i.i.d.

$$\boxed{A_1, A_2, A_3, \ldots \sim \text{Exp}(\lambda)}$$

- Calculamos cuántas llegadas ocurren en el intervalo de tiempo $\boxed{[0,1]}$: ocurren $\boxed{n}$ llegadas si

$$\boxed{A_1 + \cdots + A_n \leq 1 < A_1 + \cdots + A_n + A_{n+1}}$$

- En tal caso, tomamos $\boxed{Y = n}$

Ej: generación de $\boxed{Y \sim \text{Poisson}(\lambda)}$

- Para generar $\boxed{A_1, A_2, A_3, \ldots \sim \text{Exp}(\lambda)}$ i.i.d. generamos $\boxed{U1, U2, U_3, \ldots \sim \text{Uniforme}[0,1]}$ i.i.d., y calculamos

$$\boxed{A_i \triangleq -\frac{\ln(U_i)}{\lambda}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots}$$

- Así, podemos representar la condición

$$\boxed{A_1 + \cdots + A_n \leq 1 < A_1 + \cdots + A_n + A_{n+1}}$$

en términos de los $\boxed{U_i}$ como

$$\boxed{-\frac{1}{\lambda}\left\{\ln(U_1) + \cdots + \ln(U_n)\right\} \leq 1 < -\frac{1}{\lambda}\left\{\ln(U_1) + \cdots + \ln(U_{n+1})\right\}}$$

Ej: generación de $\boxed{Y \sim \text{Poisson}(\lambda)}$

- Multiplicando la expresión

$$\boxed{-\frac{1}{\lambda}\{\ln(U_1) + \cdots + \ln(U_n)\} \leq 1 < -\frac{1}{\lambda}\{\ln(U_1) + \cdots + \ln(U_{n+1})\}}$$

por $\boxed{-\lambda}$, y simplificando las sumas de logaritmos, obtenemos que

$$\boxed{\ln(U_1 \times \cdots \times U_n) \geq -\lambda > \ln(U_1 \times \cdots \times U_{n+1})}$$

- Aplicando ahora que $\boxed{e^{\ln x} = x}$ y que $\boxed{u \mapsto e^u}$ es creciente, obtenemos que

$$\boxed{U_1 \times \cdots \times U_n \geq e^{-\lambda} > U_1 \times \cdots \times U_{n+1}}$$

Ej: generación de $\boxed{Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)}$

- Así, obtenemos el siguiente **método de aceptación/rechazo** para generar $\boxed{Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)}$:

- Paso 0: Fijar $\boxed{n := 0, P := 1}$

- Paso 1: Generar $\boxed{U_{n+1} \sim \mathrm{U}[0,1]}$, y calcular $\boxed{P := PU_{n+1}}$

- Paso 2a: Si $\boxed{P < e^{-\lambda}}$, **aceptar**, y tomar $\boxed{Y = n}$

- Paso 2b: En otro caso, **rechazar**, incrementar $\boxed{n := n + 1}$, y volver al Paso 1