Teoría de colas II

Prof. José Niño Mora

Investigación Operativa, Grado en Estadística y Empresa, 2011/12

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Esquema

- La cola $\boxed{M/M/1}$
- Factor de utilización; estabilidad
- Ecuaciones de balance de flujo
- Cálculo de medidas de rendimiento
- Efectos del tráfico pesado en el rendimiento

La cola $\boxed{M/M/1}$; notación de Kendall

- La primera "$\boxed{M}$": los tiempos entre llegadas son v.a. i.i.d exponenciales:

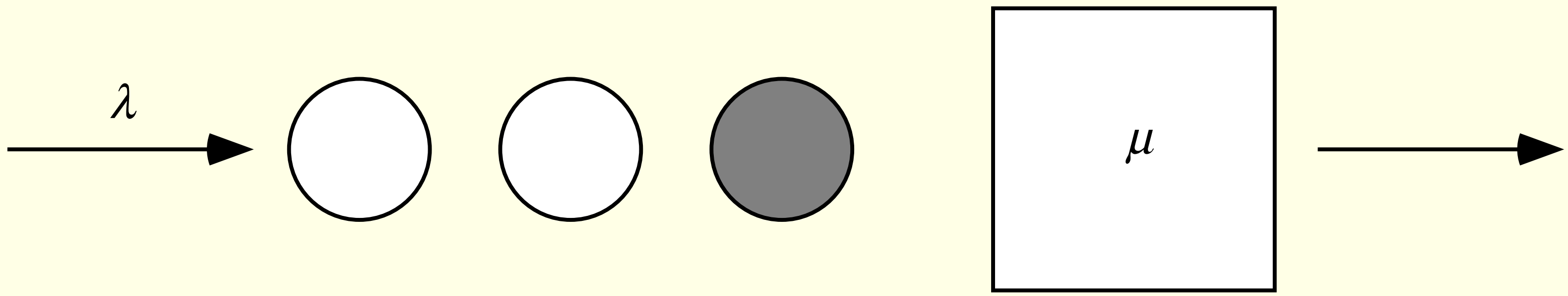
$$\boxed{\tau_1, \tau_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda).}$$

- La segunda "$\boxed{M}$": los tiempos de servicio de los clientes son v.a. i.i.d. exponenciales:

$$\boxed{\xi_1, \xi_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\mu)}$$

- El "1" final en $\boxed{M/M/1}$: hay 1 servidor.
- El modelo está dado por dos parámetros:
  - Tasa de llegada: $\boxed{\lambda > 0}$.
  - Tasa de servicio: $\boxed{\mu > 0}$.
- Política de servicio: *FIFO* (First-In First-Out).

La cola $M/M/1$



Factor de utilización; estabilidad

- El factor de utilización del sistema $\boxed{M/M/1}$ es:

$$\boxed{\rho = \frac{\text{tasa media de llegada de trabajo}}{\text{capacidad del sistema}} = \frac{\lambda/\mu}{1} = \frac{\lambda}{\mu}}$$

- El sistema es estable si

$$\boxed{\rho < 1}$$

Cómo calcular $\boxed{\bar{L}}$

- Recordemos que $\boxed{\bar{L} = \mathsf{E}[L]}$

- Probabilidad en equilibrio, o a largo plazo, de que haya $\boxed{n}$ clientes en el sistema:

$$\boxed{p_n = \mathsf{P}\{L = n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,}$$

- Plan para calcular el # medio de clientes en el sistema, $\boxed{\bar{L}}$:

  1. Calcular $\boxed{p_n}$, para $\boxed{n = 0, 1, 2, \ldots}$

  2. Calcular $\boxed{\bar{L}}$ mediante la relación: $\boxed{\bar{L} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n}$

Ecuaciones de balance del flujo

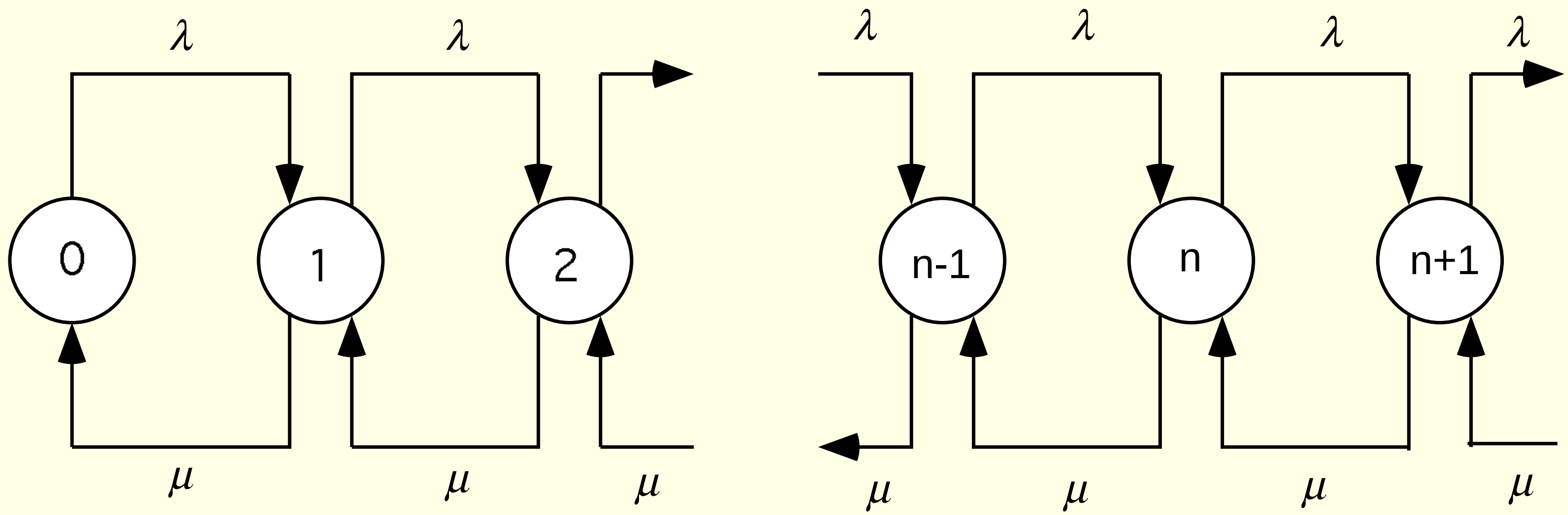
- ¿Cómo calcular las probabilidades $\boxed{p_n}$?
- Consideramos el **diagrama de tasas de transición entre estados**. (Nota: el estado es el # de clientes en el sistema)
- $\boxed{L(t)}$ es un **proceso de nacimiento-muerte (N-M)**: sólo hay transiciones entre estados contiguos. Para $\boxed{n = 0, 1, \ldots}$,
    - Tasa de flujo de $\boxed{n}$ a $\boxed{n+1}$: $\boxed{\lambda p_n}$
    - Tasa de flujo de $\boxed{n+1}$ a $\boxed{n}$: $\boxed{\mu p_{n+1}}$
- **Ecuaciones de balance del flujo**: En equilibrio,

$$\boxed{\text{Tasa de flujo de } n \text{ a } n+1 = \text{Tasa de flujo de } n+1 \text{ a } n}$$

es decir,

$$\boxed{\lambda p_n = \mu p_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

$M/M/1$: diagrama de tasas de transición



Ecuaciones de balance del flujo (cont.)

- Queremos resolver

$$\boxed{\lambda p_n = \mu p_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

es decir,

$$\boxed{p_{n+1} = \rho p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- Así, tenemos que

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1 = \rho p_0 \\ p_2 = \rho p_1 = \rho^2 p_0 \\ p_3 = \rho p_2 = \rho^3 p_0 \\ \ldots\ldots \\ p_n = \rho p_{n-1} = \rho^n p_0 \\ \ldots\ldots \end{array}}$$

Calculo de $\boxed{p_n}$

- Sólo nos falta calcular $\boxed{p_0}$. Notamos que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1}$

Por tanto:

$$\boxed{p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1,}$$

de donde obtenemos:

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} \quad = 1 - \rho}$$

- Así, tenemos que

$$\boxed{p_n = p_0 \rho^n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Otra forma de calcular $\boxed{p_0}$

- $\boxed{p_0}$ es la probabilidad de que el sistema esté vacío

- Por la ley de Little, sabemos que

$$\boxed{\bar{B} = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho,}$$

es decir, $\boxed{\rho}$ es la probabilidad de que el servidor esté ocupado

- Por tanto, la probabilidad de que el sistema esté vacío es:
$\boxed{p_0 = 1 - \rho}$

Cálculo del # medio en el sistema

- Observamos que: Las probabilidades $\boxed{p_n}$ corresponden a una **distribución geométrica**: $\boxed{L \sim \mathrm{Geom}(1-\rho)}$ ("# de fracasos antes del primer éxito, con probabilidad de éxito $\boxed{p = 1-\rho}$")

Por tanto, el **# medio de clientes en el sistema** es:

$$\boxed{\bar{L} = \mathsf{E}[L] = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

- Además, la **varianza** de $\boxed{L}$ es

$$\boxed{\mathrm{Var}[L] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

Cálculo del # medio en cola

- Como $\boxed{\bar{L} = \bar{Q} + \bar{B} = \bar{Q} + \rho}$, tenemos que:

$$\boxed{\bar{Q} = \bar{L} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}}$$

Cálculo del tiempo medio en el sistema

- Por la ley de Little,

$$\boxed{\bar{L} = \lambda \bar{S},}$$

por tanto, el **tiempo medio por cliente en el sistema** es:

$$\boxed{\bar{S} = \frac{\bar{L}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}}$$

Cálculo del tiempo medio en cola (espera)

- Como $\boxed{\bar{S} = \bar{W} + 1/\mu}$, tenemos que:

$$\boxed{\bar{W} = \bar{S} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho/\mu}{1-\rho}}$$

- Otro argumento, basado en la ley de Little:

$$\boxed{\bar{Q} = \lambda \bar{W}}$$

por tanto: $\boxed{\bar{W} = \bar{Q}/\lambda}$

Tráfico pesado: cuando $\boxed{\rho \approx 1}$

- Cuando el factor de utilización de un sistema de colas está próximo a la unidad ($\boxed{\rho \approx 1}$) decimos que el sistema está en un régimen de **tráfico pesado**

- ¿Qué ocurre en ese caso con las medidas de rendimiento $\boxed{\bar{L}, \bar{Q}, \bar{S}, \bar{W}}$?

- La congestión media aumenta muy deprisa según $\boxed{\rho}$ se aproxima a la unidad

- Ejemplo: $\boxed{\rho = 0.99 \Longrightarrow \bar{L} = 99}$

- Resultado de un aumento del 1% en la utilización: $\boxed{\rho = (1 + \frac{1}{100})0.99 \Longrightarrow \bar{L} = 9999}$: ¡la congestión aumenta en un 10.000%!