Tema 1- MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Material realizado por J. David Moreno y María Gutiérrez
Universidad Carlos III de Madrid
Asignatura: Economía Financiera

Advertencia

Tema 1- MATEMÁTICAS FINANCIERAS
Esquema del Tema

1. **EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS**
   - **Concepto de Interés**
   - **Capitalización simple**
   - **Capitalización compuesta**
   - **Valor actual y valor futuro**

2. **VALOR ACTUAL DE FLUJOS DE TESORERÍA MULTIPLES**
   - **Valor actual de una anualidad**
   - **Valor actual de una perpetuidad**

3. **OPERACIONES DE PRÉSTAMOS**

Tema 1- MATEMÁTICAS FINANCIERAS
- Objetivos del tema

- Aprender que el dinero tiene un valor temporal
- Entender qué es el tipo de interés simple y compuesto, y cómo utilizarlos.
- Conocer cómo se calcula el valor actual y valor futuro de una determinada cuantía monetaria en un momento temporal.
- Conocer las fórmulas que permiten calcular de forma simplificada el valor actual de una anualidad y de una renta perpetua.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- Para empezar debemos pensar si valen lo mismo 1.000.000 € hoy o dentro de 10 años.
- O también podemos preguntarnos a cuantos euros estamos dispuestos a renunciar por cobrar esa cantidad de 1.000.000 € hoy en vez de dentro de 10 años.

  - Todos preferimos recibir esa cantidad monetaria hoy a dentro de 10 años porque:
    - Si la recibo hoy puedo invertirla en algún activo sin riesgo y recibir una cantidad mayor dentro de 10 años.
    - Si no la cobro hoy, y la voy a cobrar dentro de 10 años existe el riesgo de que finalmente no me la paguen (bancarrota, muerte…)
    - Riesgo de inflación
  - Por tanto, seguramente estamos dispuestos a recibir solo 900.000 € o 850.000 € por cobrar esa cantidad hoy en vez de dentro de 10 años.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- Así, hemos visto como **EL DINERO TIENE UN VALOR TEMPORAL**.
  - Por tanto, no es lo mismo 1€ hoy que 1€ dentro de un año, y necesitamos comparar esas dos cantidades en el mismo momento temporal.
  - Esto debe ser conocido ampliamente por el Director Financiero (DF) de una empresa.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- El **VALOR FUTURO DE UNA INVERSIÓN** es la cantidad a la que crecerá una inversión después de añadirle los intereses.
- Vamos ahora a analizar cómo pueden ser esos intereses.

- **INTERÉS**: El interés es la recompensa que recibe el prestamista (quien presta el dinero) porque :
  - No puede disponer de ese capital durante la vida del préstamo
  - Está corriendo el riesgo de que el prestatario no le devuelva el dinero.
- Vamos a ver la diferencia entre interés simple y compuesto, y el cálculo del valor futuro en cada caso.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

1. CAPITALIZACIÓN SIMPLE:

- **En una inversión a capitalización simple el pago de intereses se calcula como una proporción constante de la cantidad invertida**. A esta proporción se le denomina tipo de interés nominal
- En este caso los intereses se calculan solo sobre la inversión inicial pero no sobre los intereses devengados durante la vida de la inversión.
- El pago de intereses cada año es igual a $\mathbf{C_0 \cdot i}$
- La cantidad total de intereses pagada durante una inversión de *t* años será

$$C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \ldots + C_0 \cdot i = tC_0 i$$

- Así el Valor Futuro será: $C_t = C_0 + Intereses = C_0 + tC_0 i = C_0(1 + ti)$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- Ejemplo: Suponer que el DF de una empresa tiene un excedente de tesorería de 2 millones de euros y decide invertirlos durante 1 año en un FIAMM que le pagará un tipo de interés nominal del 5% anual. Determine el valor de los intereses y el valor final de esta inversión dentro de un año.
  - *2mill (1+0.05)=2.100.00€*
- Y si el FIAMM se mantiene dos años (suponiendo capitalización simple)
  - *2mill (1+0.05*2)=2.200.00€*

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- **Interés simple fraccionado**: se define como el equivalente del interés simple anual de referencia (i).
- Sería cuando los pagos de intereses se realizan al final de cada semestre o de cada mes.
- Es indiferente pagar uno u otro pues el montante final a pagar es el mismo
- El tipo de interés simple fraccionado se calcula como: **i/m.**
- Donde *m* es número de veces que se pagan intereses al año.
  - Proviene de: $I=niC=nmi^*C$ y esto implica $i^*=i/m$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

1. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA:

- **Es el interés ganado sobre el capital inicial y sobre los intereses que se van devengando durante ese periodo.**
- En una inversión a tipo de interés compuesto los intereses devengados son reinvertidos para obtener más intereses
- En la siguiente tabla se muestra cómo evolucionan los intereses en una inversión de n años a interés compuesto:

Año	Capital al principio del año	Intereses devengados durante el año
1	C_0	$C_0 \cdot i$
2	$C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$	$C_0 \cdot (1+i) \cdot i$
3	$C_0 \cdot (1+i) + C_0 \cdot (1+i) \cdot i = C_0 \cdot (1+i)^2$	$C_0 \cdot (1+i)^2 \cdot i$
…	…	…
n	$C_0 \cdot (1+i)^{n-1}$	$C_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot i$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- De esta forma, el montante al final del año n será:

$$C_n = C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1}i = C_0(1+i)^n$$

- Así, la fórmula para calcular el VALOR FUTURO de una inversión a interés compuesto durante n años es

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

- $(1+i)^n$ → Se le denomina como **factor de capitalización**. Y es la cantidad final que recibimos al prestar 1 euro hoy hasta dentro de *n* años.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- A partir de la fórmula anterior se puede calcular el **VALOR ACTUAL** de una inversión a interés compuesto a n años:

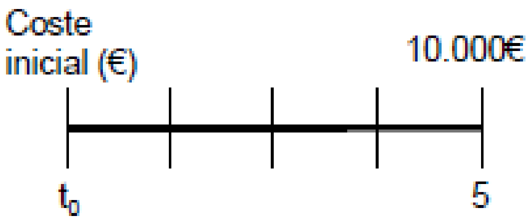
$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

- Se le denomina **factor de descuento** a $1/(1+i)^n$. Y se corresponde con el valor actual de 1€ recibido dentro de *n* años.
  - Si multiplicamos el factor de descuento por la una cantidad monetaria obtenemos el valor actual de esa cuantía.
  - $(1+i)^{-n}$ debe ser siempre una cantidad menor que la unidad para que se cumpla la ley del valor del dinero.

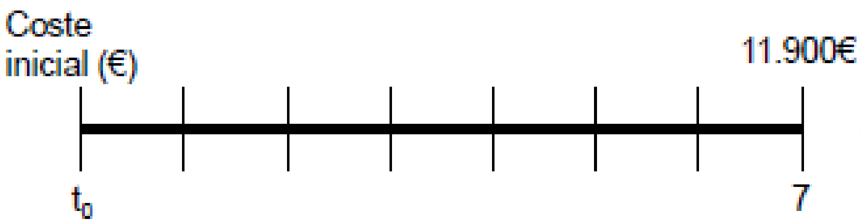
1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- **Ejemplo**: Supongamos que el DF de una empresa debe decidir entre dos proyectos de inversión con el mismo coste inicial pero con diferentes flujos de caja futuros. El proyecto ASIRIS le reportará un beneficio de 10.000€ dentro de 5 años y el proyecto GARCA un beneficio de 11.900€ dentro de 7 años. Si el tipo de interés compuesto de referencia para esta empresa es del 6,5% determine qué proyecto debe elegir.

  - **Solución:**



$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{10.000}{(1+0.065)^5} = 7.298,8€$$



$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{11.900}{(1+0.065)^7} = 7.657,7€$$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- **Tipo de interés compuesto fraccionado (semestral, trimestral, mensual,…)** :
  - Queremos calcular el tipo de interés equivalente (mensual, semestral,...) a un tipo de interés nominal anual (i), y poder después trabajar con periodos mensuales, semestrales.
  - La idea es que debemos encontrar un tipo de interés equivalente que de el mismo resultados en una inversión a un año al tipo de interés nominal “i”, que en una inversión en dos semestres a su tipo de interés equivalente semestral.
  - Así:

$$C_0(1+i)^n = C_0(1+i_m)^{n \cdot m}$$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- **Ejemplo:** Determine el tipo de interés equivalente mensual de un tipo de interés en capitalización compuesta anual del 8%.

$$C_0(1+i) = C_0(1+i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1$$

$$Así,$$

$$i_{12} = (1+0.08)^{1/12} - 1 = 0.6434\%$$

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- Podemos suponer que el número de subperiodos en los que se divide el año muy elevado, y por tanto, que se devengan intereses de forma continua en el tiempo. En este caso **el factor de capitalización** es igual a:

$$\lim_{m\to\infty}(1+i_m)^{n*m} = e^{i*n}$$

  - Donde i es el tipo de interés nominal anual con capitalización continua, i_m es el tipo de interés equivalente cuando se capitaliza m veces al año y n es el número de años que se mantiene la inversión.

1- EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO Y EL CONCEPTO DE INTERÉS

- **Ejemplo**: Supongamos que el tipo compuesto con capitalización continua es del 8%. Calcular el valor actual de un pago de 1.500.000 € que se dará dentro de 2 años.

  - **Solución:**

$$C_0 = \frac{C_n}{e^{rt}} = \frac{1.500.000}{e^{0.08*2}} = 1.278.215,7€$$

2- VALOR ACTUAL DE FLUJOS DE TESORERÍA MÚLTIPLES

- Generalmente en una inversión no existe un único pago, sino que existen más.
- Estos pagos o flujos de caja pueden ser: creciente, decrecientes, constantes o aleatorios.
- El valor actual total de una serie de pagos en diferentes momentos temporales, tenemos que calcular el valor actual de cada uno de ellos y luego sumarlos.

$$VA = VA(FC_1) + VA(FC_2) + \ldots + VA(FC_n) =$$
$$= \frac{FC_1}{(1+\mathrm{i})} + \frac{FC_2}{(1+\mathrm{i})^2} + \ldots + \frac{FC_n}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}$$

- Existen algunos casos especiales donde podemos calcular fórmulas más sencillas para el cálculo del valor actual de pagos múltiples.

2.1 Valoración de anualidades

- Denominamos **anualidad** a una serie de pagos periódicos (A_1, A_2,…A_N) crecientes hasta vencimiento según una regla $A_t=A_{t-1}(1+f)$.
- El valor actual de una anualidad será:

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + A_3(1+i)^{-3} + \ldots + A_N(1+i)^{-N}$$

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_1(1+f)(1+i)^{-2} + A_1(1+f)^2(1+i)^{-3} + \ldots + A_1(1+f)^{N-1}(1+i)^{-N}$$

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1}\left[1+(1+f)(1+i)^{-1} + (1+f)^2(1+i)^{-2} + \ldots + (1+f)^{N-1}(1+i)^{-(N-1)}\right]$$

- El trata de la suma de una **serie geométrica**
  - Serie de N elementos tales que el elemento jotaésimo es igual al elemento j-1 multiplicado por una constante o razón q<1, siendo el primer elemento el uno.)
  - Siendo la constante en este caso q= $(1+f)(1+i)^{-1}$

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1}\left[1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{N-1}\right]$$

¿Qué ocurre si q>1?

20

2.4 Valoración de anualidades

- Sumar una serie geométrica de N elementos es muy sencillo: sólo tenemos que multiplicar la suma original por la razón y sustraer de la suma original esta suma modificada.

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{N-1}$$

$$\underline{qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^N}$$

$$S - qS = 1 - q^N$$

$$S = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

21

2.4 Valoración de anualidades

- **Ejemplo:** ¿Cuánto vale la suma de la serie geométrica de 15 elementos, de valor inicial 1 y razón 3/4? ¿Y si la serie tuviese infinitos elementos?

$$1, 0.75, 0.05625, \ldots, 0.75^{14}$$

$$S = \frac{1-0.75^{15}}{1-0.75} = 3.946 \quad S_{\infty} = \frac{1}{1-0.75} = 4$$

2.4 Valoración de anualidades

- La fórmula general para calcular el valor actual de una anualidad es:

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1}\left[1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{N-1}\right]$$

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1}\frac{1-q^N}{1-q}$$

$$V_0 = A_1(1+i)^{-1}\frac{1-\left(\dfrac{1+f}{1+i}\right)^N}{1-\dfrac{1+f}{1+i}}$$

$$V_0 = A_1\frac{1-\left[(1+f)^N(1+i)^{-N}\right]}{i-f}$$

23

2.4 Valoración de anualidades

- **Ejemplo:** Si el tipo de interés es del 5%, calcular el valor actual de una renta anual que crece un 3% cada año, si el primer pago de 1000 euros se produce dentro de un año y tiene una duración total de 10 años.

$$V_0 = 1000\frac{1-\left[(1+0.03)^{10}(1+0.05)^{-10}\right]}{0.05-0.03} = 8747.59$$

2.4 Valoración de anualidades

- Esta fórmula se simplifica mucho para casos particulares como por ejemplo:
  - **Anualidad constante y perpetua:** $$V_0 = \frac{A_1}{i}$$
  - **Anualidad constante:** $$V_0 = A_1 \frac{1-(1+i)^{-N}}{i}$$
- También es fácil calcular el valor final de una anualidad:

$$V_N = V_0 (1+i)^N$$

$$V_N = A_1 \frac{(1+i)^N - (1+f)^N}{i-f}$$

Ejemplo: Si el tipo de interés es del 3%, calcular el valor actual de una renta anual constante, si el primer pago de 500 euros se produce dentro de un año y la duración total de 20 años.

25

3 Amortización de préstamos

- Hasta ahora hemos hablado casi siempre de depósitos.
- Podemos entender un depósito también como un préstamo que le hacemos al banco.
- En general un **préstamo** es un contrato por el cual:
  - Un agente (prestatario o deudor) obtiene durante un determinado periodo de tiempo la disposición de un capital perteneciente a otro agente (prestamista o acreedor), quedando obligado el agente que dispondrá del capital a devolver al final del periodo el capital más unos intereses.
- Cuando se debe pagar o amortizar un préstamo es frecuente que el capital prestado inicialmente se vaya pagando o amortizando durante la vida del mismo, y no sólo en la fecha final de vencimiento.
- En general podemos distinguir entre dos tipos de prestamos:
  - Con cuotas de amortización constantes
  - Con anualidades constantes
    - Un ejemplo son las típicas hipotecas (*EURIBOR+spread*)

3 Amortización de préstamos

1. **Prestamos con cuotas de amortización constantes**:
   - En cada periodo se amortiza la misma cantidad del capital total.
   - Vamos a realizar el cuadro de amortización de un préstamos de 10.000 euros al 6% de interés compuesto anual y que se va a amortizar en 5 cuotas anuales.
   - Como la cuota de amortización es constante, esta será igual a: 10.000/5=2000€.
     - Lo primero que rellenamos en el cuadro de amortización será la cuota de amortización, después el total amortizado, luego el capital por amortizar.

3 Amortización de préstamos

Año	Anualidad	Intereses	Cuota de amortización	Total Amortizado	Capital por amortizar
0	0	0	0	0	10.000
1	2.600	600	2.000	2.000	8.000
2	2.480	480	2.000	4.000	6.000
3	2.360	360	2.000	6.000	4.000
4	2.240	240	2.000	8.000	2.000
5	2120	120	2.000	10.000	0

Paso 1

Paso 2

Paso 3

Paso 5:
Cuota de Amortización + Cuota de intereses =
= 2.000 + 600 = 2.600€

Paso 4:
(Capital por amortizar)*i =
= 10.000 * 0.06 = 600€

3 Amortización de préstamos

Prestamos con anualidades constantes:

- En este caso, cada año la cuota total pagada debe ser constante. Es decir, que la cuota de amortización del principal más los intereses deben ser constantes en el tiempo.
- Lo primero que debemos calcular es la cuota constante que se va a pagar cada año. Para ello debemos igualar el valor actual de todos los pagos que realiza el prestatario a la cantidad inicialmente prestada por el prestamista (*recordar como hemos calculado el valor de una anualidad constante*):,

$$\text{Capital inicial} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right]$$

- En el ejemplo, anterior sería:

$$10.000 = C\left[\frac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.06}\right] \Rightarrow \text{C} = 2.374€$$

3 Amortización de préstamos

- A continuación vamos a desarrollar el cuadro de amortización de este préstamo con cuotas constantes.
  - Lo primero que rellenamos es la columna de las anualidades constantes.
  - Luego los intereses (Capital por amortizar * i)
  - Después la cuota de amortización (Cuota anual – Intereses)
  - Después calculamos el capital por amortizar (Capital inicial – Capital total amortizado)
  - Este proceso se calcula para cada año del préstamo.

3 Amortización de préstamos

Año	Anualidad	Intereses	Cuota de amortización	Total Amortizado	Capital por amortizar
0	0	0	0	0	10.000
1					
2	2.374	493.6	1.884,4	3.654,4	6.345,6
3	2.374	380.7	1.993,3	5.647,7	4.352,3
4	2.374	261.1	2112.9	7.760,6	2.239,4
5	2.374	134	2.240	10.000	0

Paso 1

Paso 4:

Paso 5:
Capital por amortizar (t-1) – Cuota de amortización

Paso 2:
(Capital por amortizar)*i =
= 10.000 * 0.06 = 600€

Paso 3:
Cuota anual - Intereses =
= 2.374 - 600 = 1.774€

Bibliografía

1. Grinblatt , M. y S.Titman, “Mercados Financieros y Estrategia Empresarial”, McGraw-Hill 2003.

TEMA 9

2. Brealey, R., S. Myers y Allen, “Principios de Finanzas Corporativas” 8ª edición, Mcgraw-Hill 2006

TEMA 3

3. Navarro, E. y Nave, J. , “Fundamentos de Matemáticas Financieras”, Antoni Bosch Editor, SA. 2001

TEMAS 1 y 2.