Tema 4- TEORÍA DE CARTERAS

Material realizado por J. David Moreno y María Gutiérrez
Universidad Carlos III de Madrid
Asignatura: Economía Financiera

Advertencia

- Este material esta bajo la **Licencia Creative Commons BY-NC-SA.**

- **Por tanto, el material puede ser utilizado siempre que se cite esta fuente como fuente original.**

Tema 4- TEORIA DE CARTERAS
- Esquema del Tema

1. **ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN PARA DOS ACTIVOS**
   1. **3 casos atendiendo al coeficiente de correlación**
   2. **La cartera óptima**
2. **MODELO DE MARKOWITZ**
   - **Supuestos del Modelo Media-Varianza**
   - **Conjunto de oportunidades de inversión**
   - **Cartera eficiente y Frontera Eficiente**
   - **CAL: Línea de asignación de activos**
   - **Cartera óptima o tangente**

Tema 4- INVERSIÓN EN ACTIVOS FINANCIEROS - Objetivos del tema

- Estudiar el conjunto de posibilidades de inversión para el caso de 2 activos y diferentes valores del coeficiente de correlación.
- Estudiar el modelo media-varianza que constituye un modelo clásico en la gestión de activos.
- Aprender qué es una cartera eficiente y la frontera eficiente
- Conocer qué cartera eficiente elegirá un inversor si existe la posibilidad también de invertir en un activo libre de riesgo.
- Analizar como cambian los resultados si el tipo de interés al que se puede endeudar un inversor es superior al tipo de interés libre de riesgo.

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

- Suponer que tenemos dos activos con riesgo (1 y 2)
- La rentabilidad esperada y varianza de una cartera formada por ambos activos se puede definir

$$E[R_p] = w_1 E[R_1] + w_2 E[R_2] = w_1 E[R_1] + (1 - w_1) E[R_2]$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{1,2}$$

o también

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2} = (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}$$

5

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

CASO 1: COEFICIENTE CORRELACIÓN = +1

- En este caso los activos están perfectamente correlados.
- Basándonos en

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

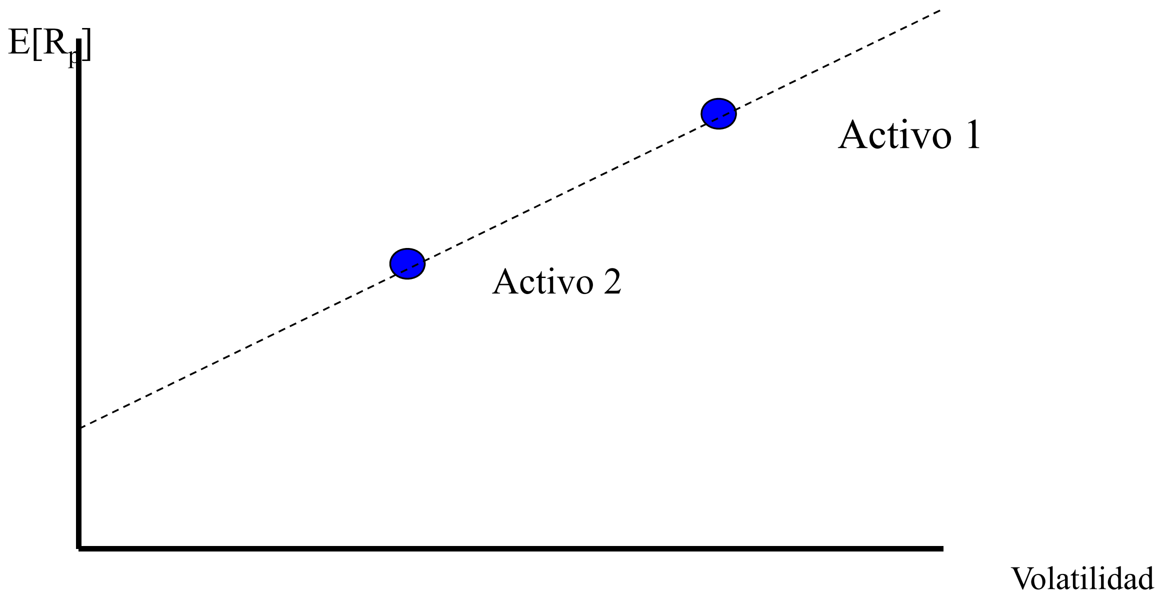
- Podemos escribir la volatilidad de la cartera como:

$$\sigma_p = (w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1-w_1)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)^{1/2} = w_1\sigma_1 + (1-w_1)\sigma_2$$

  - La volatilidad de la cartera es una combinación lineal de las volatilidades de los activos.

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

- En este caso no existe diversificación



Se puede conseguir una cartera de riesgo nulo, solo si se puede hacer ventas en corto

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

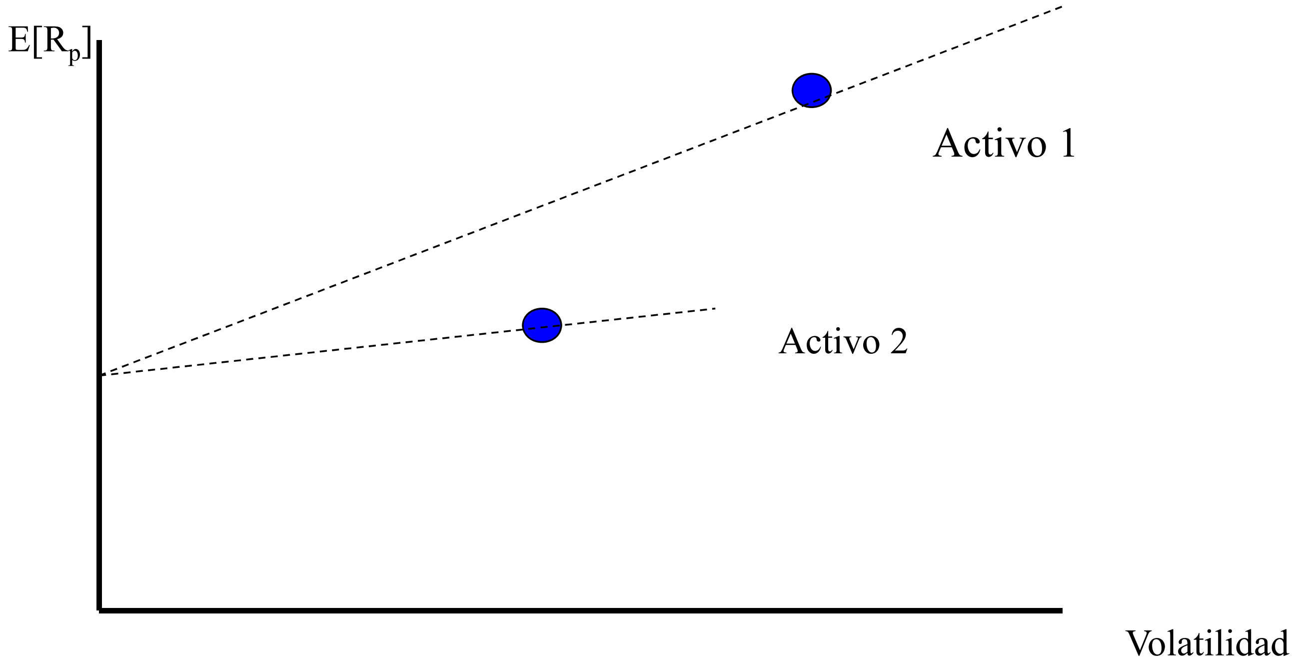
CASO 2: COEFICIENTE CORRELACIÓN = -1

- En este caso los activos están negativamente correlados de una forma perfecta.
- Basándonos en $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- Podemos escribir la volatilidad de la cartera como:

$$\sigma_p = [w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1-w_1)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2]^{1/2} = w_1\sigma_1 - (1-w_1)\sigma_2$$

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

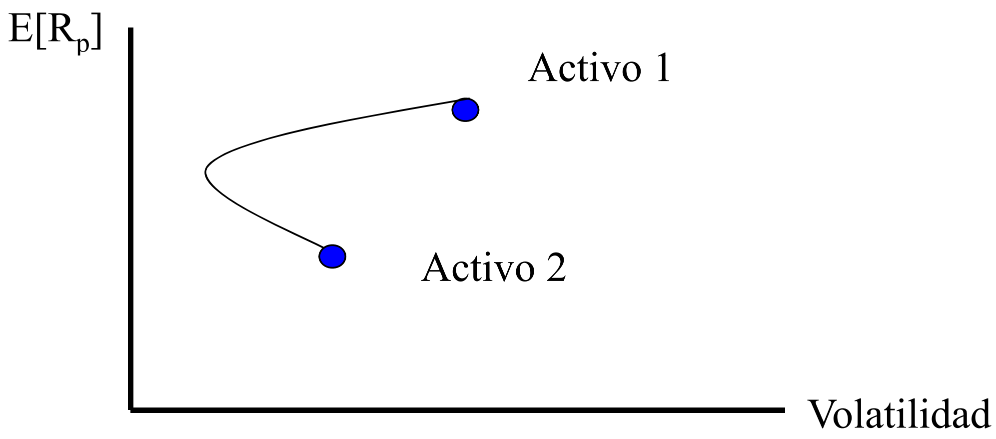
- En este caso como se muestra en el gráfico se puede conseguir una volatilidad nula sin necesidad de estrategias de ventas a corto



1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN

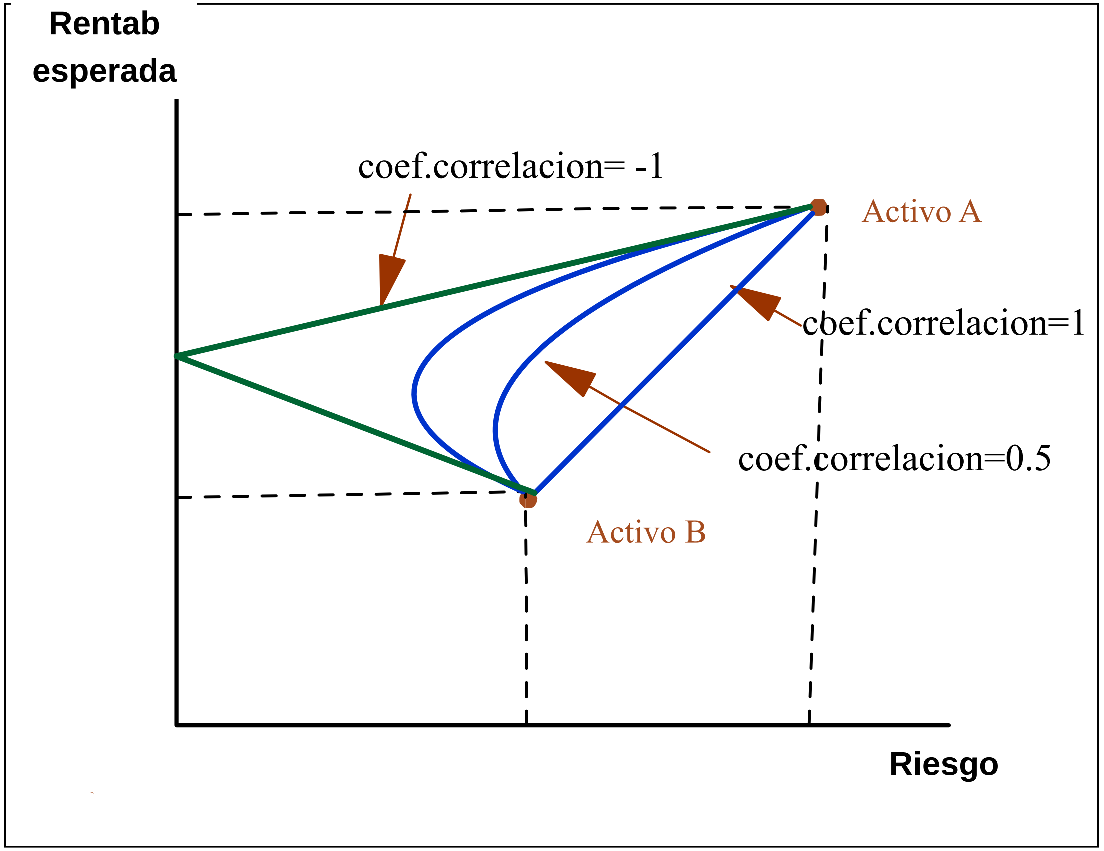
CASO 3: COEFICIENTE CORRELACIÓN ENTRE -1 y +1

- Dependiendo del valor del coeficiente de correlación la curvatura de la hipérbola será diferente. Menor riesgo cuanto menor correlación entre los activos.



10

1- ANÁLISIS DEL EFECTO DIVERSIFICACIÓN



En esta gráfica podemos resumir el conjunto de oportunidades de inversión dependiendo del coeficiente de correlación para 2 activos.

SI NO SE PERMITEN VENTAS EN CORTO

2- MODELO DE MARKOWITZ

INTRODUCCIÓN A TEORÍA DE CARTERAS

- La Teoría de Carteras estudia cómo construir carteras que maximicen la utilidad esperada del inversor.

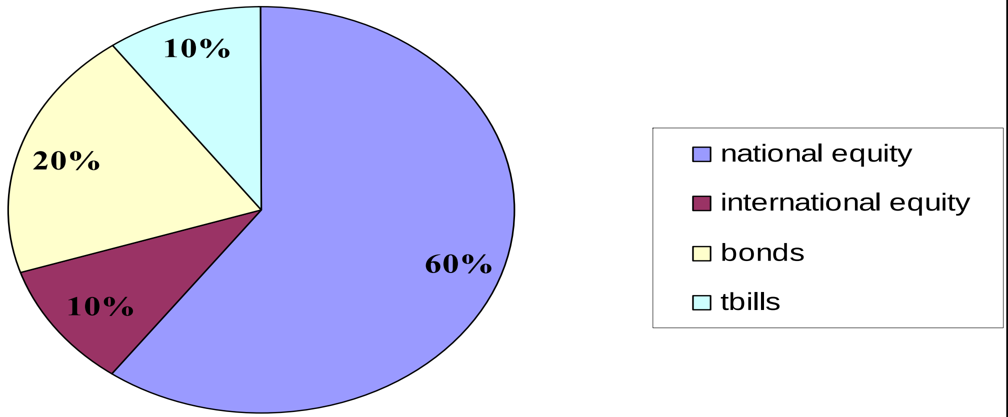
- Aunque existen diferentes modelos o teorías, pero quizás el modelo más importante históricamente en teoría de carteras ha sido el **Modelo de Markowitz** o **Modelo Media-Varianza** desarrollado en años 50, y por el cual conceden a Harry Markowitz el Premio Nobel en Economía.

- Recordar que podemos definir una cartera como un conjunto de activos (acciones, bonos, letras, derivados, etc.) invertidos in unas determinadas proporciones (w_i, *pesos*)

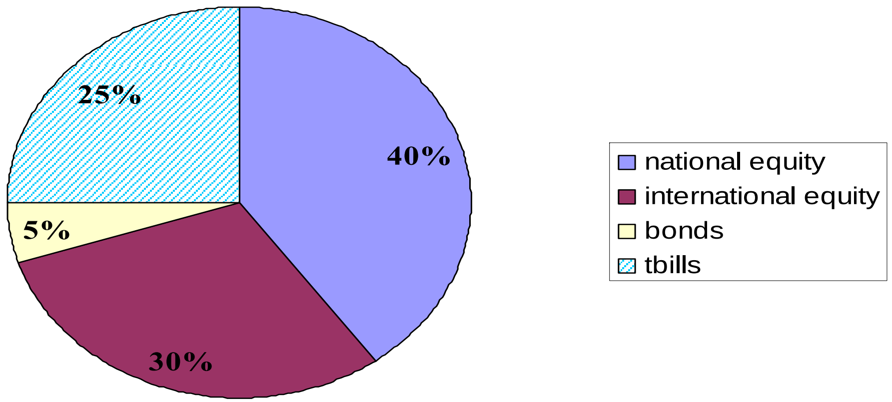
2- MODELO DE MARKOWITZ

- Estos son diversos ejemplos de lo que podrían constituir una cartera:

PORTFOLIO 1



PORTFOLIO 2



13

2- MODELO DE MARKOWITZ

- El Modelo Media-Varianza es denominado así, porque la elección de los activos para configurar una cartera se hace únicamente en función de:
  - Momento de primer orden, esto es, la rentabilidad esperada (media)
  - Momento de segundo orden, la varianza.

  - Este modelo es además un modelo estático (solamente se fija en el próximo periodo) y no considera otros momentos como la asimetría, o incluso la liquidez de los activos.
  - A pesar de estas limitaciones, este modelo ha sido uno de los pilares fundamentales de las finanzas y de la teoría de carteras.
  - Su conclusión fundamental se resume de forma práctica en que: "*no deben ponerse todos los huevos en la misma cesta*".

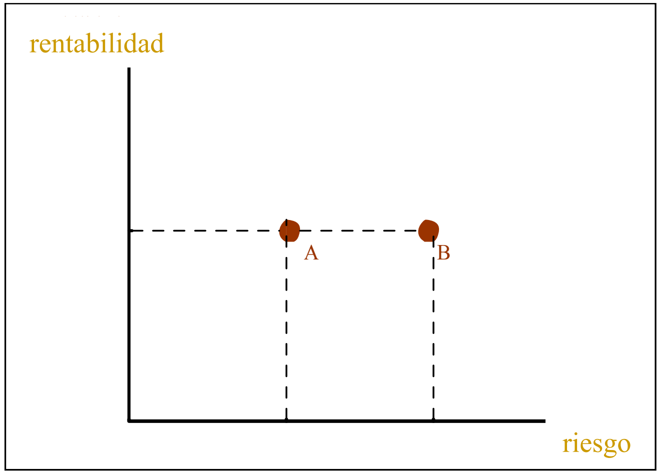
2- MODELO DE MARKOWITZ

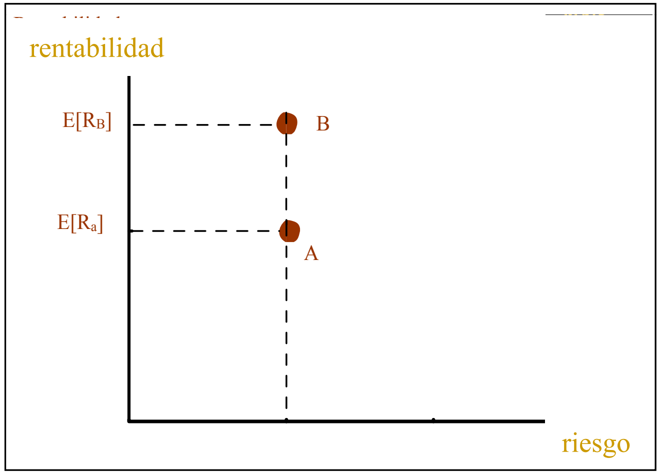
- Como hemos dicho anteriormente el modelo de Markowitz solamente se fija en la media y la varianza, pero para poder hacer esto es necesario que al menos uno de los siguientes supuestos se de:
  - Los rendimientos de los activos siguen una distribución normal
  - Los inversores están representados por una función de utilidad cuadrática.

- En el modelo de Markowitz suponemos que los inversores son **aversos al riesgo**, es decir, quieren
  - Maximizar la rentabilidad $(E(R_p))$
  - Minimizar el riesgo (σ_p)

15

2- MODELO DE MARKOWITZ





- En el modelo de Markowitz vamos a utilizar los siguiente gráficos para representar las posibles carteras y las preferencias de los inversores.
  - En el gráfico 1, prefieren A
  - En el gráfico 2, prefieren B

16

2- MODELO DE MARKOWITZ

- A continuación vamos a utilizar el siguiente ejemplo para ir analizando todos los elementos de la teoría de carteras y del modelo media-varianza.

- <u>Ejemplo:</u> Suponer que tenemos una cartera equiponderada formada por las acciones de las empresas ACCIONA y BBVA. Los datos obtenidos en el último año se muestran en la Tabla. Calcule rentabilidad y riesgo de la cartera.

Activo	R_i	Varianza	Covarianza
ACCIONA	10%	0.0076	-0.0024
BBVA	8%	0.00708	

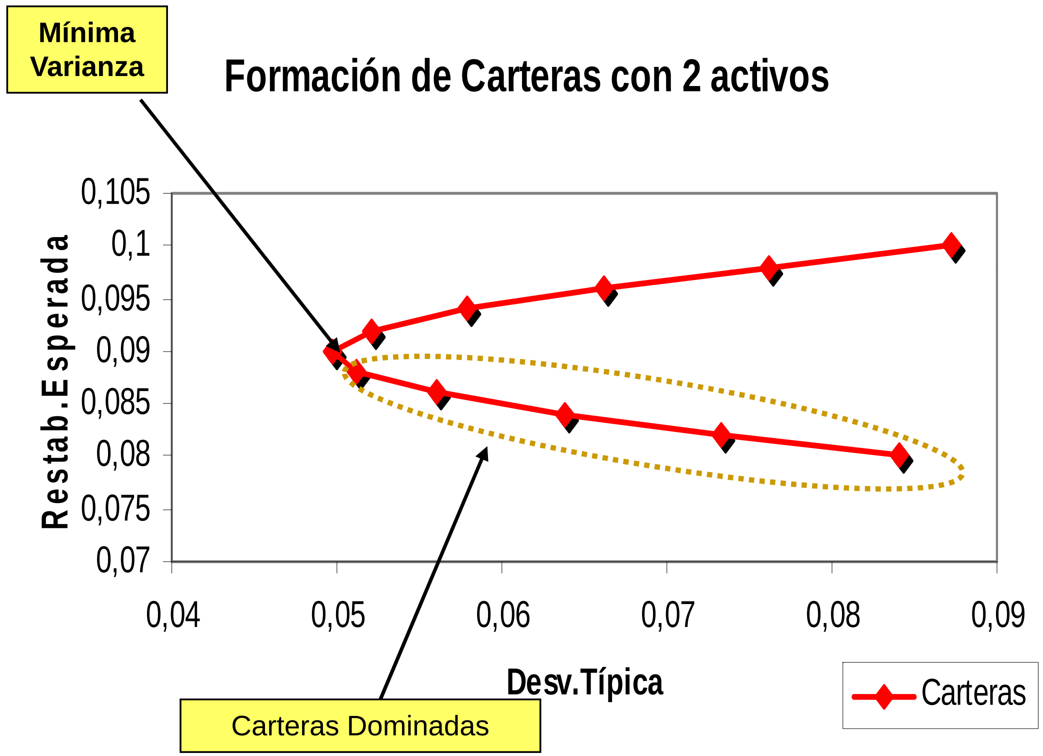
2- MODELO DE MARKOWITZ

- Vamos a calcular la rentabilidad y riesgo (desviación típica) para diferentes carteras, según cambiemos los pesos (w_1 y w_2).
  - Los resultados se muestran en la siguiente tabla.
  - Y luego lo representamos en los gráficos vistos anteriormente.

Acciona (w_1)	BBVA (w_2)	R_p	σ_p
0	1	0,08	0,08414
0,1	0,9	0,082	0,07334
0,2	0,8	0,084	0,06377
0,3	0,7	0,086	0,05608
0,4	0,6	0,088	0,05112
0,5	0,5	0,09	0,0497
0,6	0,4	0,092	0,05212
0,7	0,3	0,094	0,05791
0,8	0,2	0,096	0,06618
0,9	0,1	0,098	0,07612
1	0	0,1	0,08718

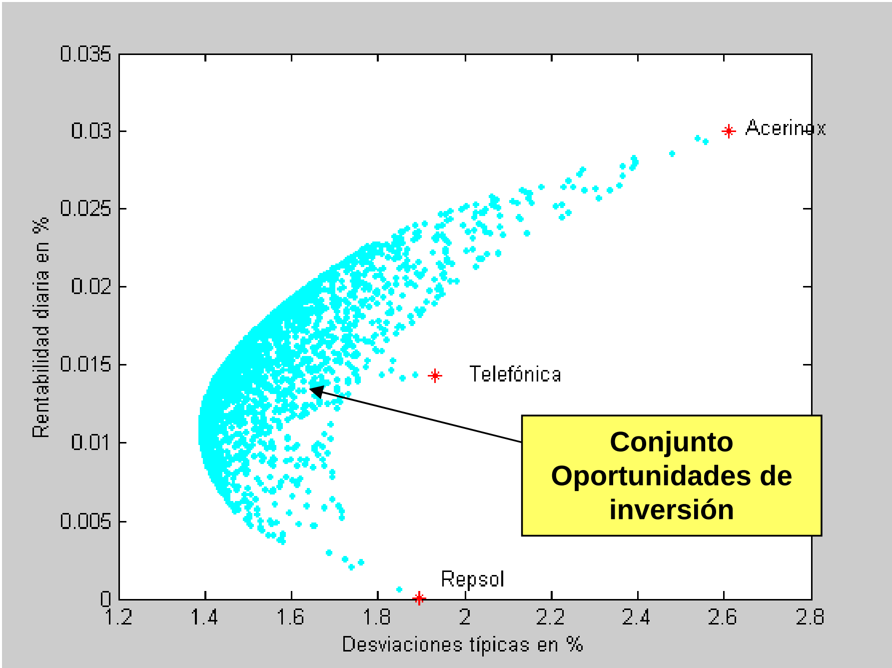
2- MODELO DE MARKOWITZ

- Todas las carteras que podemos formar están en la línea roja. Debemos destacar algunos conceptos como:
  - Cartera mínima varianza
  - Conjunto de oportunidades de inversión.
  - Conjunto carteras dominadas
  - Frontera eficiente



2- MODELO DE MARKOWITZ

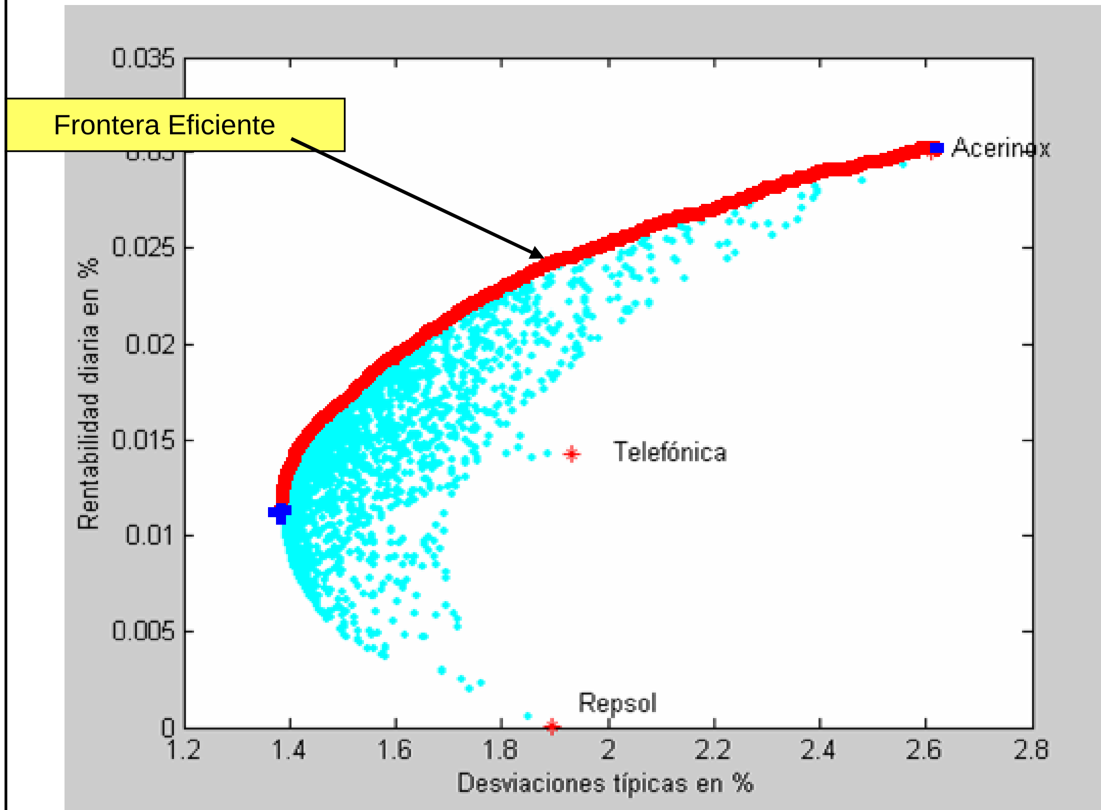
- Cuando tenemos 3 o más activos individuales
  - En este caso no solo tendremos carteras en la propia hipérbola, sino dentro también.



20

2- MODELO DE MARKOWITZ

- En este caso la frontera eficiente también va de la cartera de mínimo riesgo a la de máxima rentabilidad, como vemos en la gráfica.



CARTERAS EFICIENTES: Son aquellas que permiten maximizar la rentabilidad para cada nivel de riesgo.

FRONTERA EFICIENTE: Es el conjunto de todas las carteras eficientes.

21

2- MODELO DE MARKOWITZ

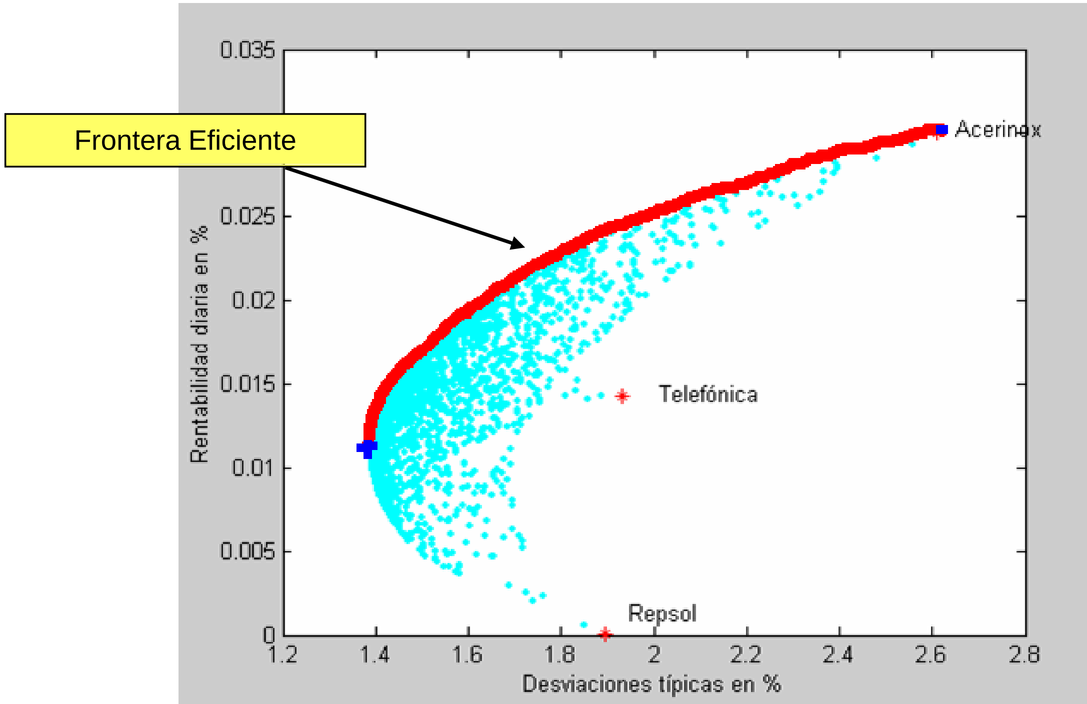
CARTERAS FORMADAS CON ACTIVOS CON RIESGO.

- En el ejemplo anterior (formación de una cartera con dos acciones) hemos visto como se pueden formar diferentes carteras dando diferentes pesos a cada activo.
- Estas carteras tenían diferentes valores para el binomio rentabilidad-riesgo.
- Pero **¿Cómo saber que proporción es la mejor de cada activo?**
  - Podemos observar que:
    1. Existen una combinación de los activos que lleva a obtener la cartera de mínima varianza.
    2. Existen algunas carteras que están dominadas.

22

2- MODELO DE MARKOWITZ

- **CARTERAS EFICIENTES:** Son aquellas que permiten maximizar la rentabilidad para cada nivel de riesgo.
- **FRONTERA EFICIENTE:** Es el conjunto de todas las carteras eficientes.
- En el ejemplo anterior con 3 acciones sería:



El inversor elegirá siempre una cartera de entre las que están en la frontera eficiente

2- MODELO DE MARKOWITZ

- **¿Cómo encontrar las combinaciones de activos que llevan a las carteras de la frontera eficiente?**
  - Matemáticamente consiste en resolver un problema de optimización cuadrática:

$$Mimimizar\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$s.a$$

$$E[R_p] = \phi$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1,.., N$$

Este es un problema dual, también se puede ver como:

$$Maximizar \quad E[R_p] = \sum_{i=1}^{N} w_i\, E[R_i]$$

$$s.a$$

$$\sigma_p^2 = \lambda$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1,.., N$$

24

2- MODELO DE MARKOWITZ

- Hasta ahora hemos analizado cómo construir y analizar una cartera combinando activos con riesgo. Sin que exista ningún activo libre de riesgo.
- Sin embargo, en la realidad los inversores pueden combinar activos con riesgo y sin riesgo en sus carteras.

- El **Modelo de Markowitz** analiza cómo formar una cartera óptima si:
  - Existen activos con riesgo y activo libre de riesgo (r_f).
  - Todos los agentes son aversos al riesgo.
  - Es posible tomar prestado y prestar al mismo tipo de interés.

2- MODELO DE MARKOWITZ

- El inversor debe elegir un porcentaje de su cartera en una cartera con riesgo (w), y el resto en activo libre de riesgo (1-w)

- Así la rentabilidad esperada y varianza de la cartera serán:

$$E(R_p) = (1-w)r_f + wE(R_c) = r_f + wE(R_c - r_f)$$
$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_c^2$$

- Si despejamos w de la varianza y sustituimos en $E(R_p)$

$$w = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$$

- Obtenemos la rentabilidad esperada de la cartera como función de su desviación típica

$$\boxed{E(R_p) = r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_c} E(R_c - r_f)}$$

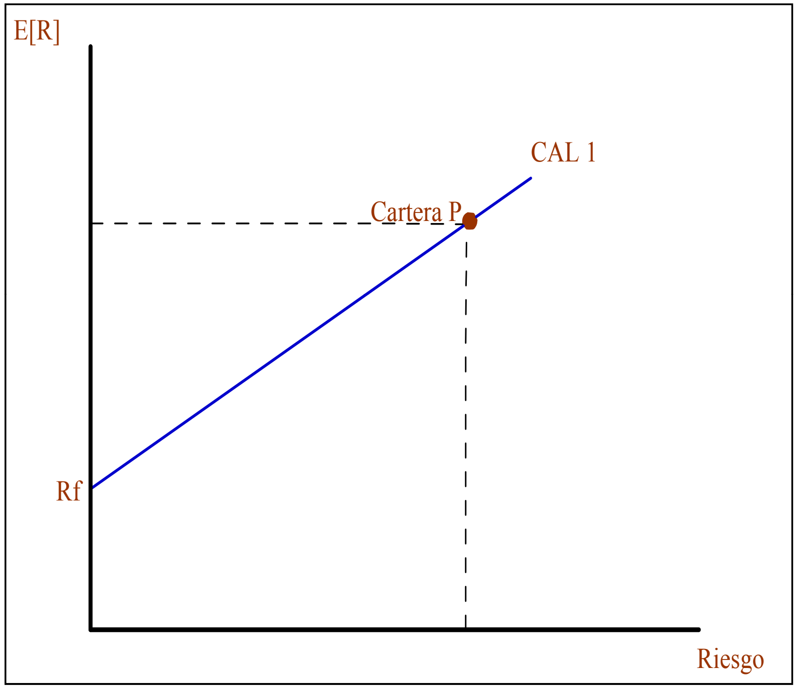
Podemos analizar gráficamente esta relación rentabilidad-riesgo

A través de una recta, denominada CAL

26

2- MODELO DE MARKOWITZ

- Gráfica de la relación entre rentabilidad esperada y desviación típica de la cartera.



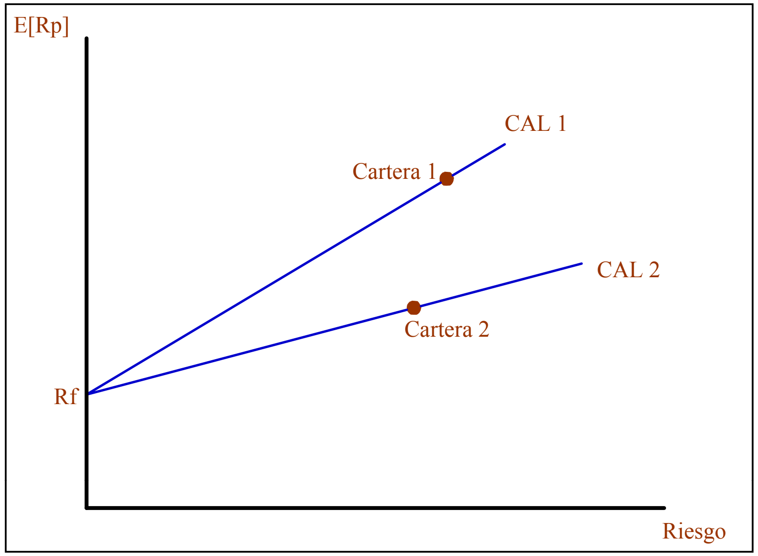
- En la recta denominada **CAL** (Línea de asignación de activos o *Capital Allocation Line*) se encuentran todas las carteras que puede formar el inversor con la cartera con riesgo (*cartera C*) y con el activo libre de riesgo.
  - Puede situarse por encima del punto donde está la *cartera c*.
  - La pendiente de la recta será:

$$\frac{\partial E[R_p]}{\partial \sigma_p} = \frac{E[R_c] - r_f}{\sigma_c}$$

27

2- MODELO DE MARKOWITZ

- Esta línea de asignación de activos no es la única donde puede invertir un inversor. Vamos a poder formar distintas rectas CAL dependiendo de donde se sitúe la cartera con riesgo que elijamos.



- **¿Qué línea de asignación de activos elegirá el inversor? Y ¿Qué cartera con riesgo elegirá?**

Elegirá aquella CAL con MAYOR PENDIENTE.

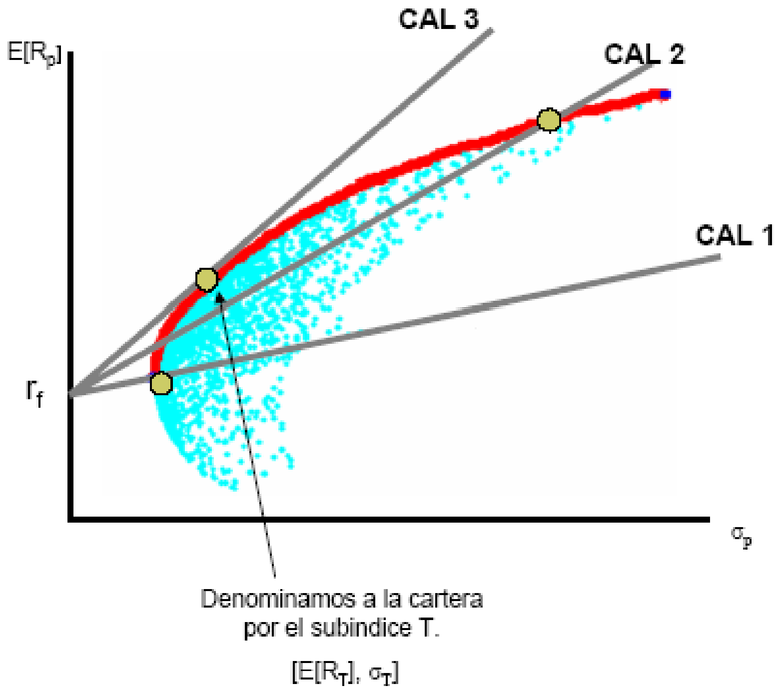
La pendiente de la CAL es:

- Ratio Sharpe

2- MODELO DE MARKOWITZ

¿Qué cartera con riesgo elegirá el inversor?

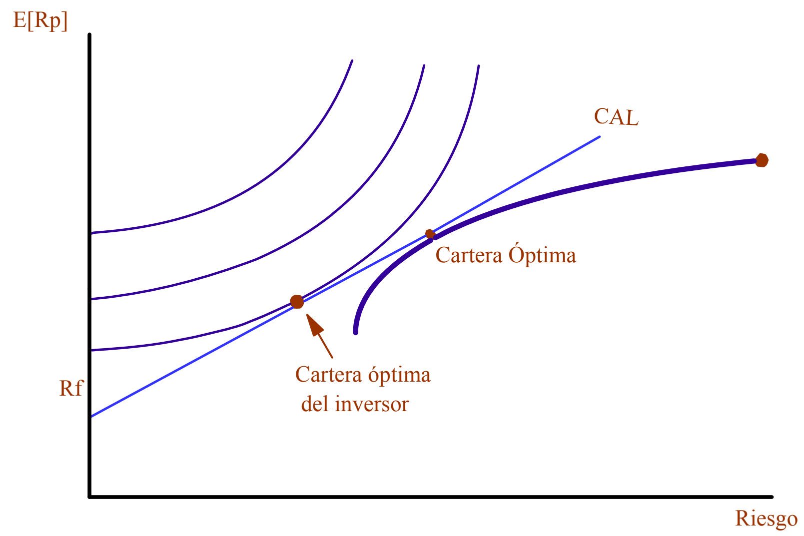
- El inversor elegirá una de las carteras de la frontera eficiente.
- La que le permite conseguir una mayor rentabilidad-ajustada al riesgo es la CAL 3.
- Esto siempre ocurre donde la Línea asignación activos es **<u>tangente a la Frontera eficiente.</u>**



29

2- MODELO DE MARKOWITZ

- **¿Qué cartera final elegirá el inversor?**
  - Proporción de activo libre de riesgo (1-w) y de cartera con riesgo (w).



- **TEOREMA DE SEPARACIÓN DE FONDOS.**

  Cualquier inversor maximizará su utilidad esperada, con independencia de su comportamiento frente al riesgo, repartiendo su presupuesto únicamente entre R_f y la cartera tangente.

Solución del problema en 2 etapas:

1. Determinar composición cartera T
2. Decidir proporción a invertir en T y que parte prestar o pedir prestada a Rf, según sus preferencias

30

BIBLIOGRAFÍA

- Bodie, Kane and Marcus (2006) Principios de Inversiones. McGraw Hill
  - Capítulos 6 y 7
- Brealey, R.A. y Myers, S.C. (2003). *Principios de Finanzas Corporativas*. McGraw Hill
  - Parte II: Capítulos 7 y 8
- Brigham E.F. y Daves, P. R. (2002). *International Financial Mangement*. South-Western.
  - Capítulo 2.
- Grinblatt, M. y Titman, S. (2002). *Mercados Financieros y Estrategia Empresarial*. McGraw Hill
  - Capítulos 4 y 5.

31

DIRECCIONES ÚTILES DE INTERNET

- BANCO DE ESPAÑA:
  - **http://www.bde.es**
- DIRECICIÓN GENERAL DEL TESORO:
  - **http://www.tesoro.es**
- MERCADO AIAF:
  - **http://www.aiaf.es**
- BOLSA DE MADRID
  - **http://www.bolsamadrid.es**