Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

## Master en Mecánica Estructural Avanzada

# Mecánica de Materiales Compuestos

## Tema 4. Análisis de laminados

### Curso 2010/2011

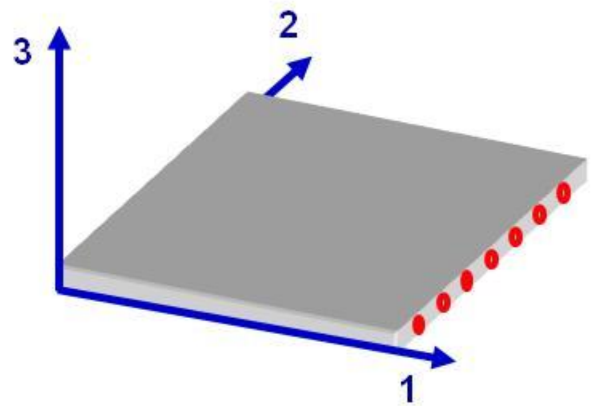
Autores: Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

# Tema 4. Análisis de laminados

## ÍNDICE

# Hipótesis de estudio

- **Cada lámina se considera un material cuasi-homogéneo y ortótropo**
- **Las láminas tienen un comportamiento elástico lineal hasta rotura**




$$\{\sigma\}^{12} = [Q]\cdot\{\varepsilon\}^{12}$$

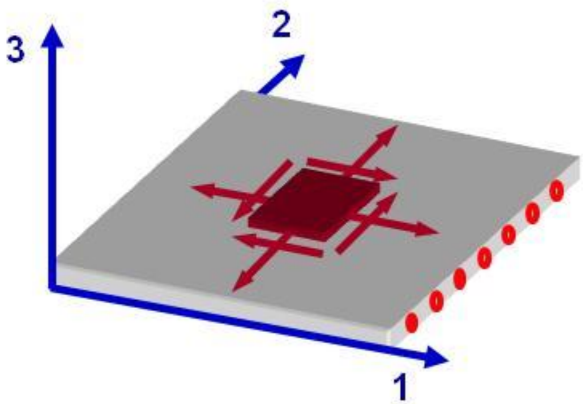
$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{SS} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{21}\cdot E_2}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{12}\cdot E_1}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

# Hipótesis de estudio

- **Las láminas están perfectamente unidas entre si**
- **El laminado y todas las láminas se encuentran en un estado de tensión plana**




$$\sigma_z = 0 \qquad \sigma_x \neq 0$$

$$\tau_{yz} = 0 \qquad \sigma_y \neq 0$$

$$\tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{xy} \neq 0$$

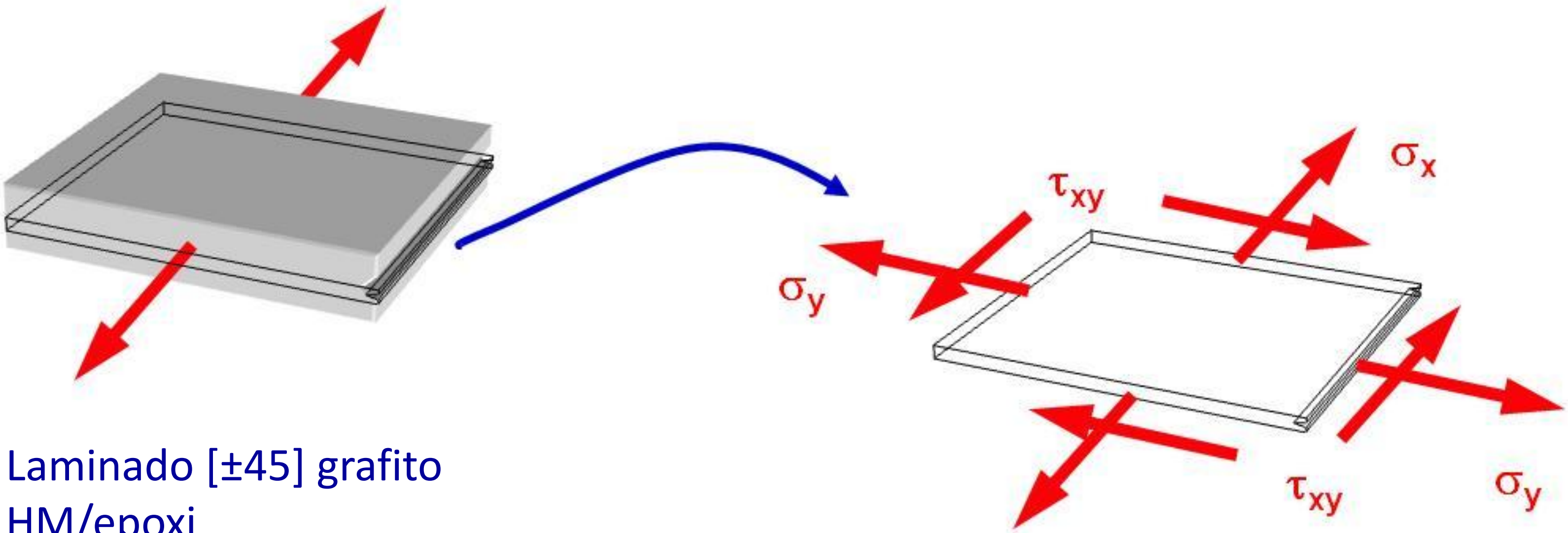
**¡ Existen situaciones en la que esta hipótesis no se cumple !**

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

# Hipótesis de estudio

## Situaciones en las que la hipótesis de tensión plana no son aplicables

### Borde libre




Laminado [±45] grafito HM/epoxi

(Piper R.B. y Pagano N.J., 1970)

Lámina a 45º

# Hipótesis de estudio

## Situaciones en las que la hipótesis de tensión plana no son aplicables

**Borde libre**

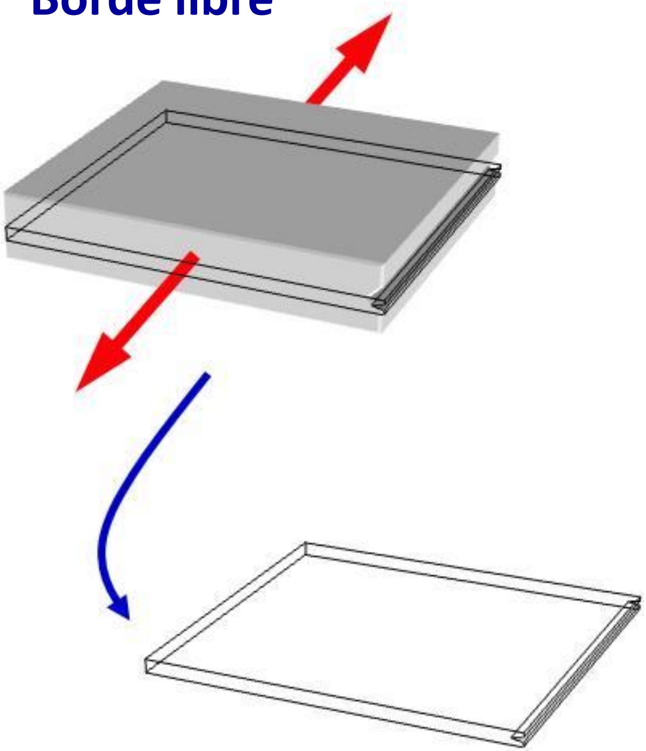
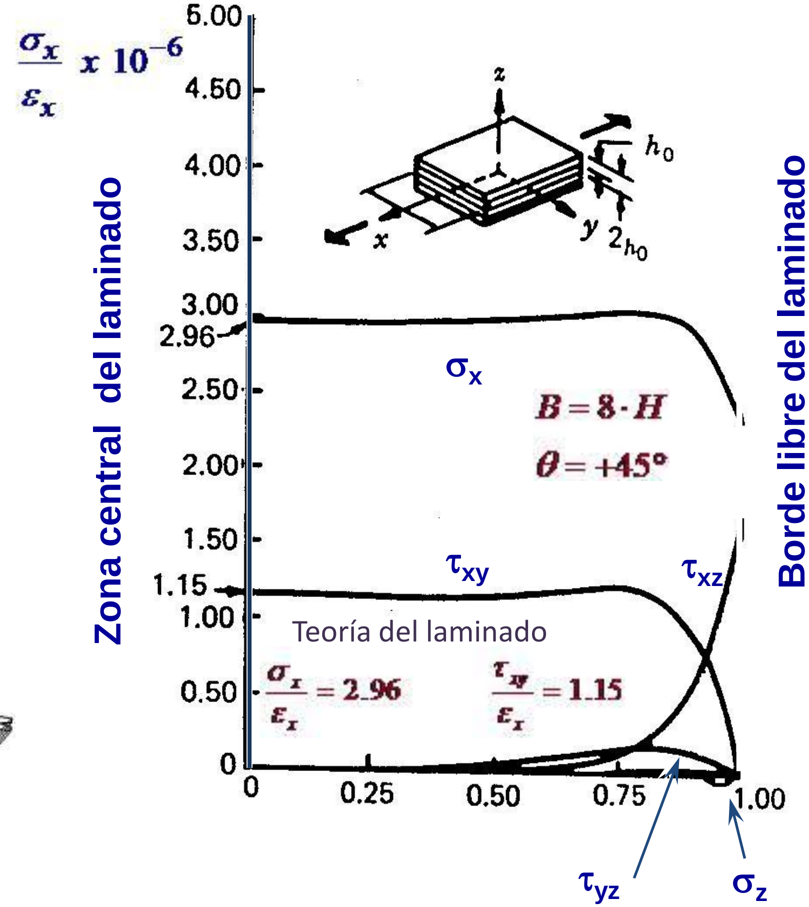


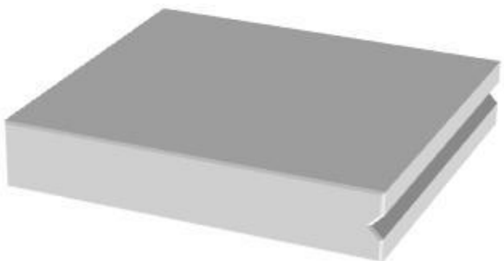
Lámina a 45º



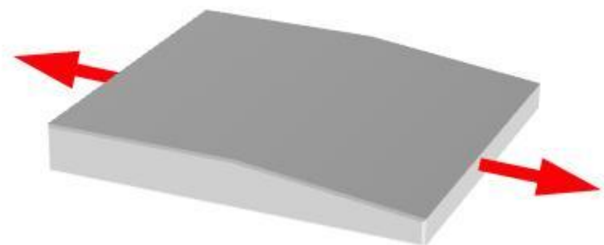
# Hipótesis de estudio

## Situaciones en las que la hipótesis de tensión plana no son aplicables

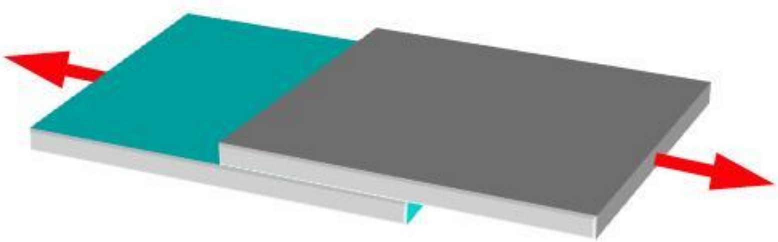
### Borde libre



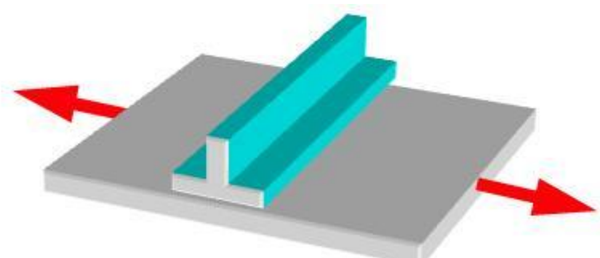
### Laminados de espesor variable



### Uniones adhesivas



### Placas rigidizadas



# Hipótesis de estudio

- **Los desplazamientos y sus derivadas son pequeños**
- **Se verifica la hipótesis de Kirchhoff**

Una sección normal al plano medio del laminado permanece plana y normal a la superficie media deformada

$$\gamma_{yz} = 0$$

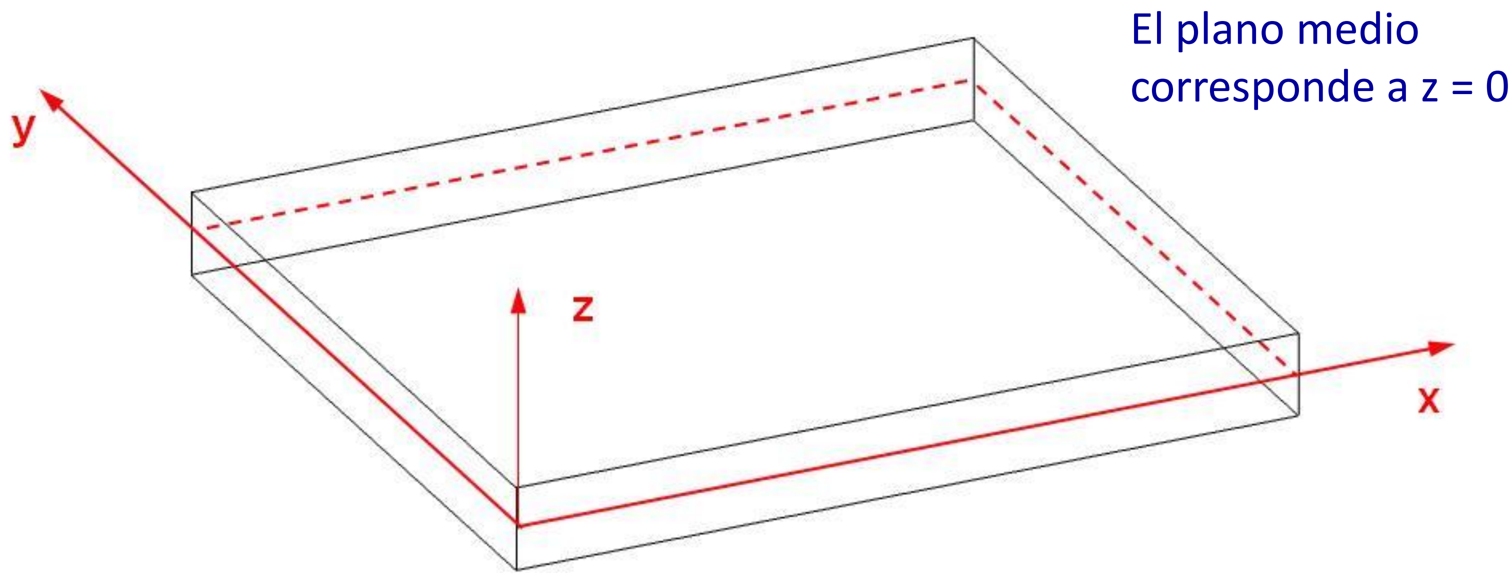
$$\gamma_{xz} = 0$$

El laminado no cambia de espesor

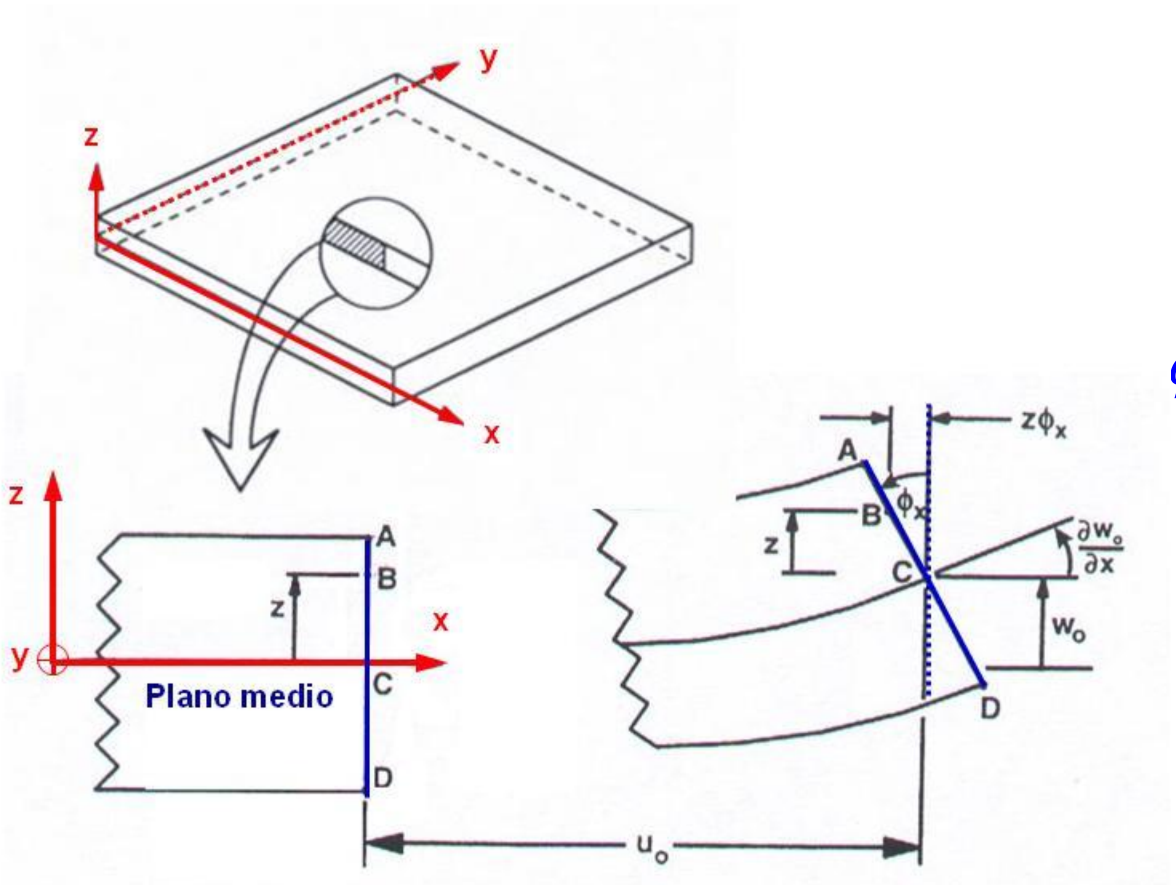
$$\varepsilon_z = 0$$

**Es posible expresar el desplazamiento de cada punto del laminado en función de los desplazamientos del plano medio y de las rotaciones de la sección del laminado**

## Definición de los ejes del laminado



# Campo de desplaz. y def.




$$\phi_x = \frac{\partial w_o}{\partial x}$$

**Sección XZ sin deformar** **Sección XZ deformada**

# Campo de desplaz. y def.

## Desplazamientos

$$u(x,y,z) = u_o(x,y) - \phi_x \cdot z$$
$$v(x,y,z) = v_o(x,y) - \phi_y \cdot z$$
$$w(x,y,z) = w_o(x,y)$$

En la teoría del laminado

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_x = \dfrac{\partial w_o}{\partial x} \\ \phi_y = \dfrac{\partial w_o}{\partial y} \end{array} \right.$$

## Deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}$$
$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - z \cdot 2 \cdot \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \cdot \partial y}$$
$$\gamma_{xz} = 0$$
$$\gamma_{yz} = 0$$

# Campo de desplaz. y def.

Definiendo

**Deformaciones del plano medio**

$$\begin{cases} \varepsilon_x^o = \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \varepsilon_y^o = \dfrac{\partial v_o}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^o = \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{cases}$$

**Curvaturas**

$$\begin{cases} k_x = -\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ k_y = -\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ k_{xy} = -2\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x \cdot \partial y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}}$$

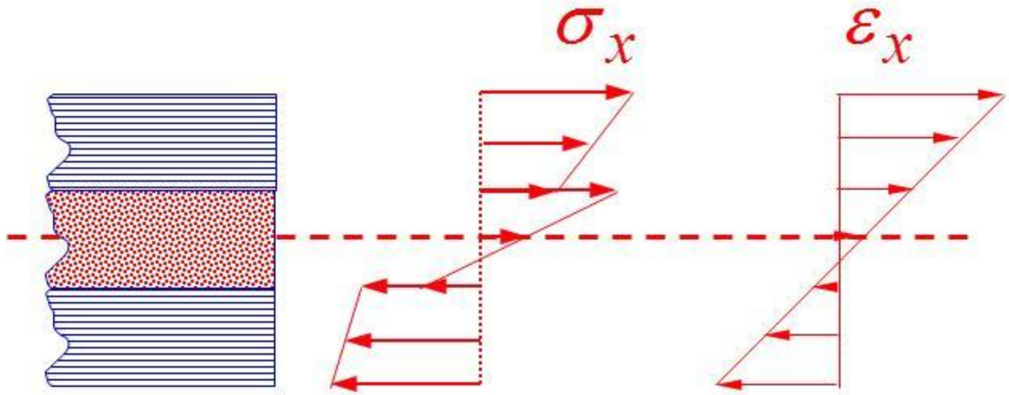
**¡ La deformación varía linealmente a lo largo del espesor !**

## Tensiones en el laminado

$$\{\sigma\}_i = [\bar{Q}]_i \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z \cdot \{k\}$$

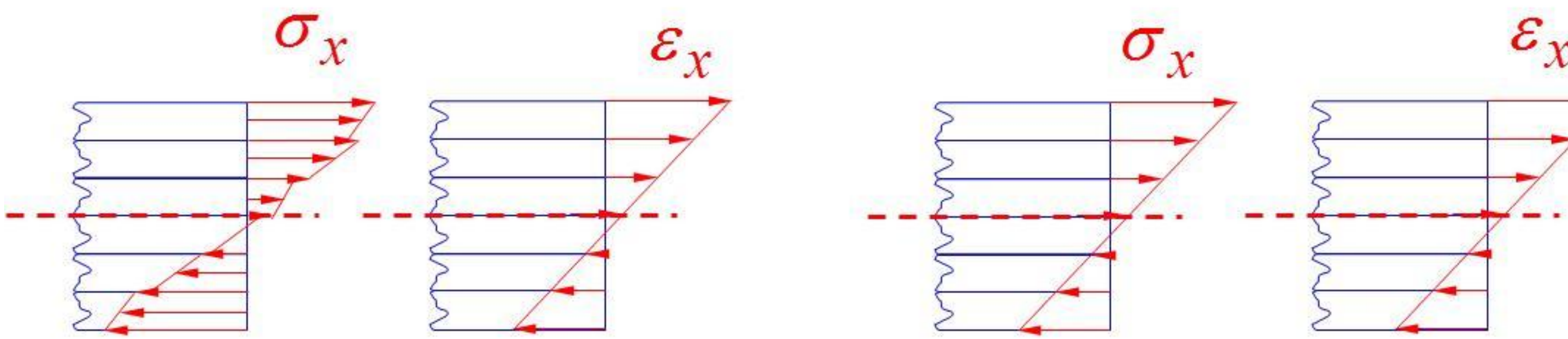
**La tensión es una función discontinua de z**



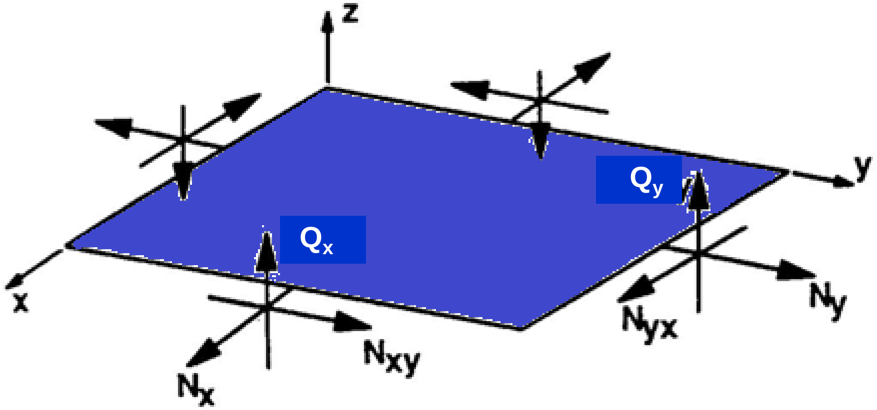
## Tensiones en el laminado

**Laminado**

**Material isótropo**

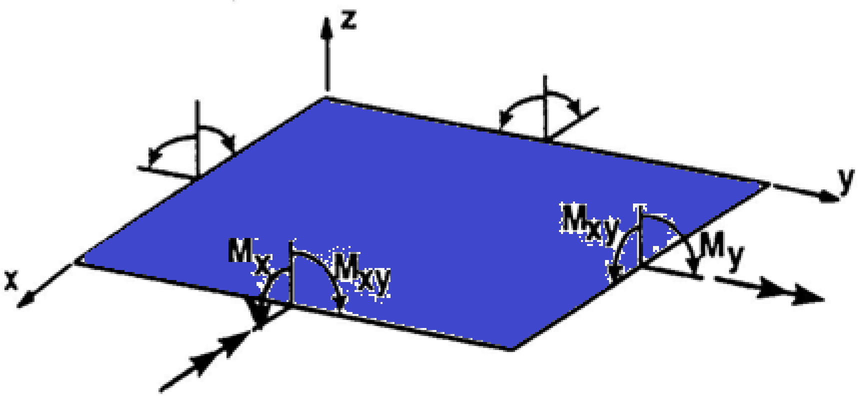


## Definición de los esfuerzos por unidad de longitud

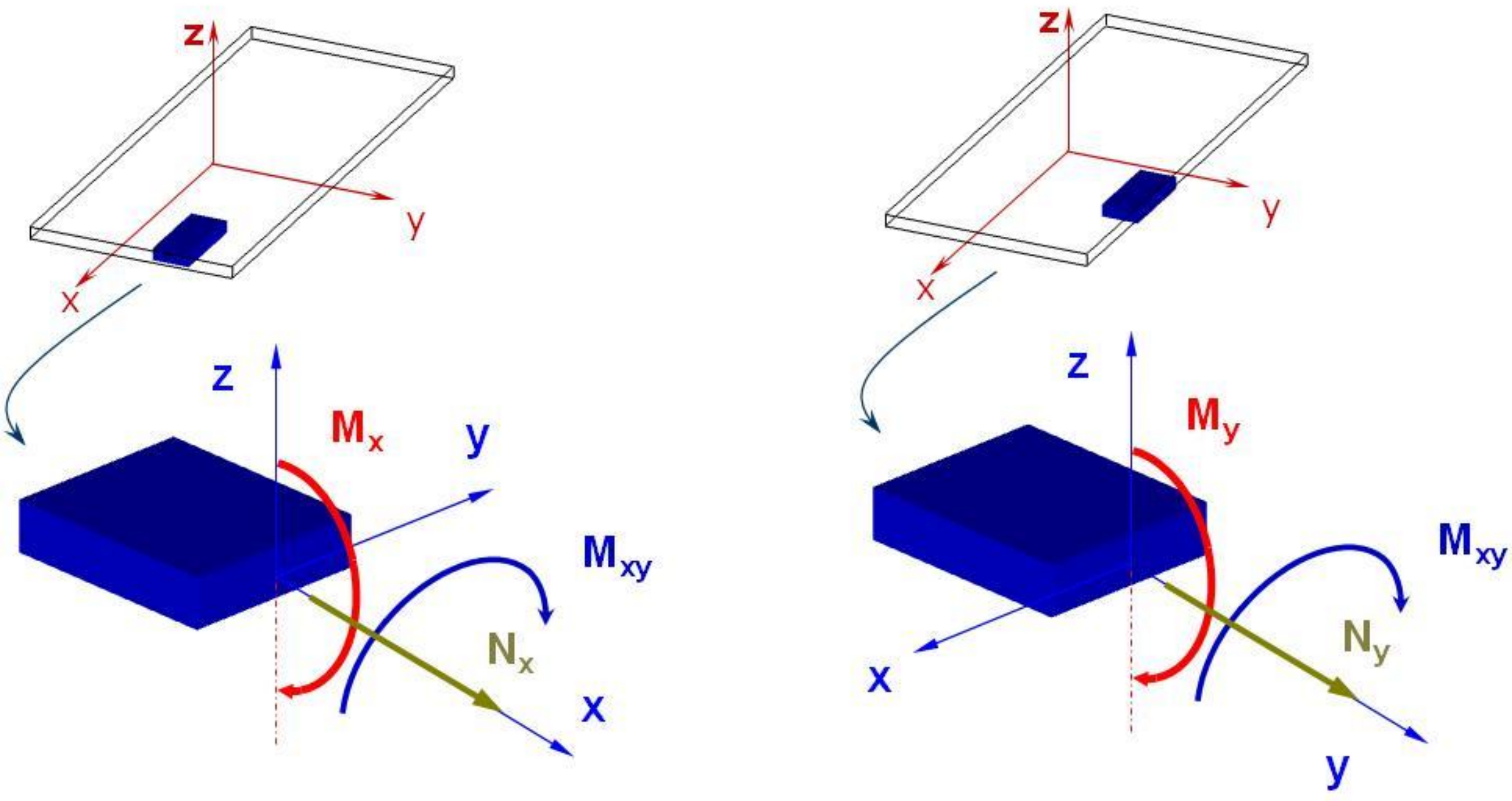



Esfuerzos planos

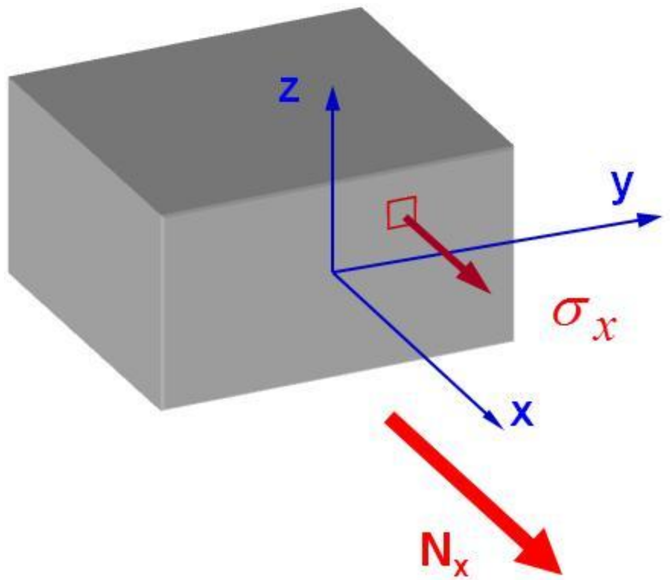
Momentos



## Definición de los esfuerzos por unidad de longitud



## Definición de los esfuerzos por unidad de longitud



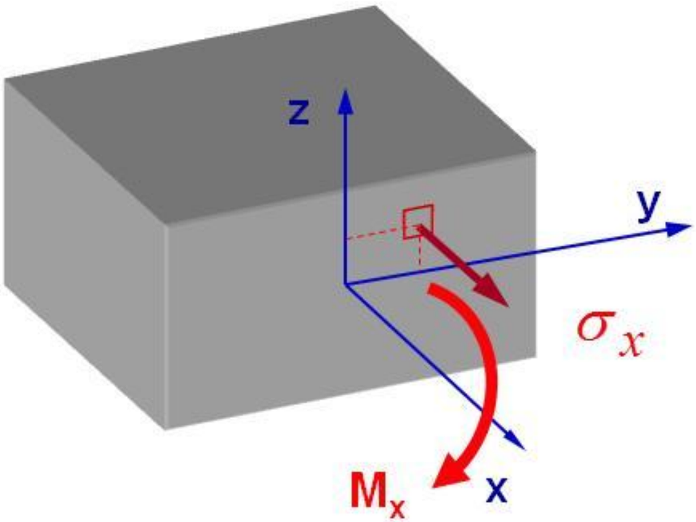

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dz \qquad \{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dz$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

## Definición de los esfuerzos por unidad de longitud




$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \qquad \{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

# Matrices de rigidez

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z \cdot \{k\}$$

$$\{\sigma\}_i = [\bar{Q}]_i \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot dz$$

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} + [B] \cdot \{k\}$$

$$[A] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot dz$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz$$

# Matrices de rigidez

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{o}\} + z \cdot \{k\}$$

$$\{\sigma\}_i = [\bar{Q}]_i \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot z \cdot dz$$

$$\{M\} = [B] \cdot \{\varepsilon^{o}\} + [D] \cdot \{k\}$$

$$[D] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z^2 \cdot dz$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

## Matriz de rigidez plana

$$[A] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot dz \quad \Rightarrow \quad [A] = \sum_{i}^{N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} [\bar{Q}]_i \cdot dz$$

$$\Downarrow$$


$$\boxed{[A] = \sum_{i}^{N} [\bar{Q}]_i \cdot h_i}$$

# Matrices de rigidez

$$[A] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot dz$$

$$[D] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z^2 \cdot dz$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz$$

$\Rightarrow$

Matriz de rigidez plana

$$[A] = \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot h_i$$

Matriz de rigidez a flexión

$$[D] = \frac{1}{3} \cdot \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot \left( Z_i^3 - Z_{i-1}^3 \right)$$

Matriz de rigidez de acoplamiento

$$[B] = \frac{1}{2} \cdot \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot \left( Z_i^2 - Z_{i-1}^2 \right)$$

# Matrices de rigidez

$$\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^o\} + [B]\cdot\{k\}$$

$$\{M\} = [B]\cdot\{\varepsilon^o\} + [D]\cdot\{k\}$$

$$\{\varepsilon^o\} = [a]\cdot\{N\} + [b]\cdot\{M\}$$

$$\{k\} = [c]\cdot\{N\} + [d]\cdot\{M\}$$

$$[a] = [A]^{-1} - \left\{\left[B^c\right]\cdot\left[D^c\right]^{-1}\right\}\cdot\left[C^c\right]$$

$$[b] = \left[B^c\right]\cdot\left[D^c\right]^{-1}$$

$$[c] = -\left[D^c\right]^{-1}\cdot\left[C^c\right]$$

$$[d] = \left[D^c\right]^{-1}$$

$$\left[B^c\right] = -[A]^{-1}\cdot[B]$$

$$\left[C^c\right] = [B]\cdot[A]^{-1}$$

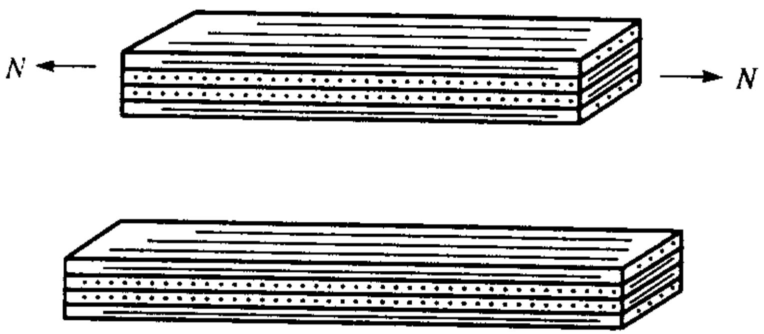
$$\left[D^c\right] = [D] - \left\{[B]\cdot[A]^{-1}\right\}\cdot[B]$$

# Matrices de rigidez

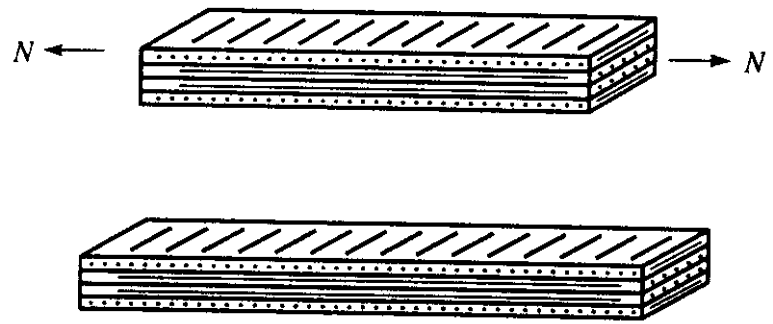
## Matriz de rigidez plana

$$[A] = \sum_{i}^{N} [\bar{Q}]_i \cdot h_i$$

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las deformaciones planas
- Es independiente de la secuencia de apilamiento




Laminado $[0/90]_S$



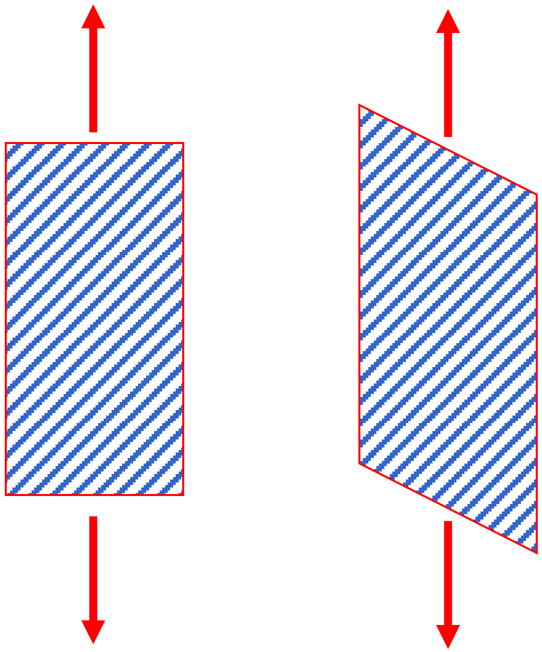

Laminado $[90/0]_S$

# Matrices de rigidez

## Matriz de rigidez plana

$$[A] = \sum_{i}^{N} [\bar{Q}]_i \cdot h_i$$

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las deformaciones planas
- Es independiente de la secuencia de apilamiento
- Si $A_{1S} \neq 0$ y $A_{2S} \neq 0$ existe acoplamiento entre el tracción-compresión y cortadura

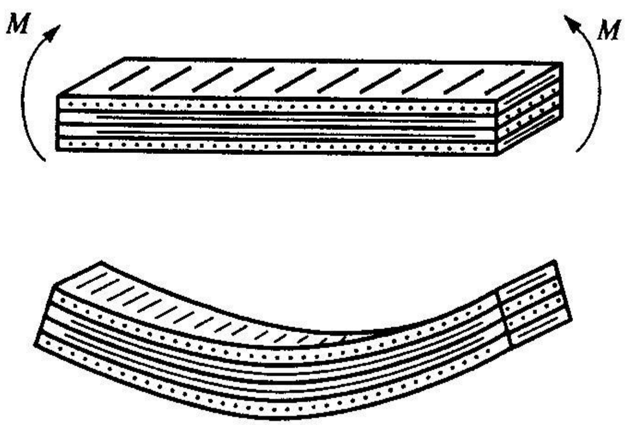


$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1s} \\ A_{12} & A_{22} & A_{2s} \\ A_{1s} & A_{2s} & A_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

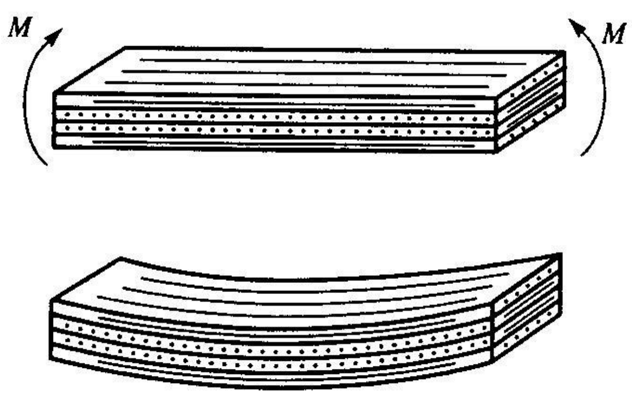
## Matriz de rigidez a flexión

$$[D]=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i}^{N}[\bar{Q}]_i\cdot\left(z_i^3-z_{i-1}^3\right)$$

- Relaciona los momentos con las curvaturas
- Es fuertemente dependiente de la secuencia de apilamiento




Laminado $[90/0]_S$

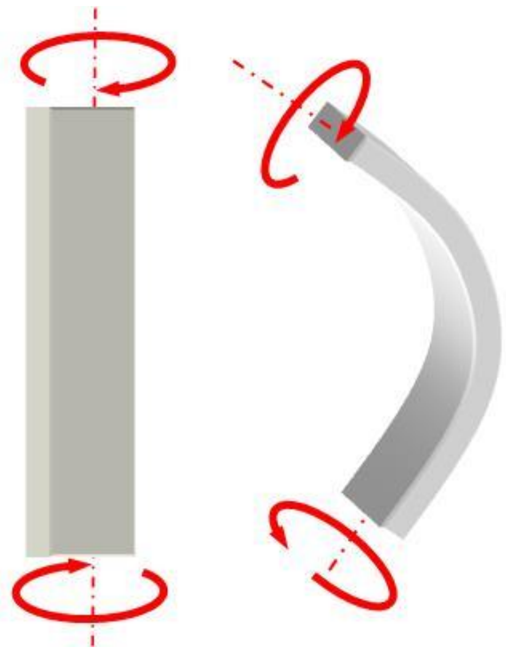



Laminado $[0/90]_S$

# Matrices de rigidez

## Matriz de rigidez a flexión

$$[D]=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i}^{N}[\bar{Q}]_i\cdot\left(z_i^3-z_{i-1}^3\right)$$



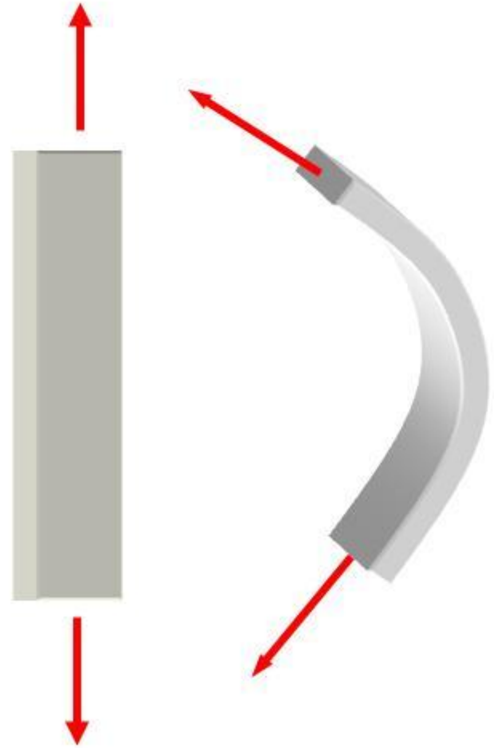
- Relaciona los momentos con las curvaturas
- Es fuertemente dependiente de la secuencia de apilamiento
- Si $D_{1S}\neq 0$ y $D_{2S}\neq 0$ existe acoplamiento entre flexión y torsión

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{1s} \\ D_{12} & D_{22} & D_{2s} \\ D_{1s} & D_{2s} & D_{ss} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

## Matriz de rigidez de acoplamiento

$$[B]=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i}^{N}[\bar{Q}]_i\cdot\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right)$$

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las curvaturas o los momentos con las deformaciones planas
- Es dependiente de la secuencia de apilamiento
- Si $B_{1S} \neq 0$ y $B_{2S} \neq 0$ existe acoplamiento entre tracción y torsión



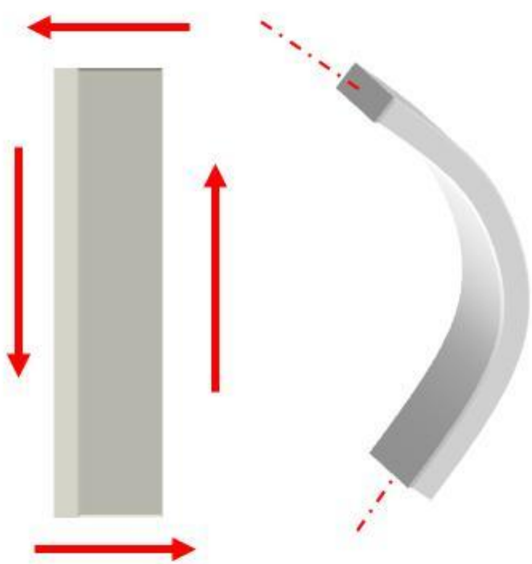
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{1s} \\ B_{12} & B_{22} & B_{2s} \\ B_{1s} & B_{2s} & B_{ss} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Matrices de rigidez

## Matriz de rigidez de acoplamiento

$$[B]=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i}^{N}[\bar{Q}]_i\cdot\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right)$$

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las curvaturas o los momentos con las deformaciones planas
- Es dependiente de la secuencia de apilamiento
- Si $B_{1S} \neq 0$ y $B_{2S} \neq 0$ existe acoplamiento entre cortadura y torsión

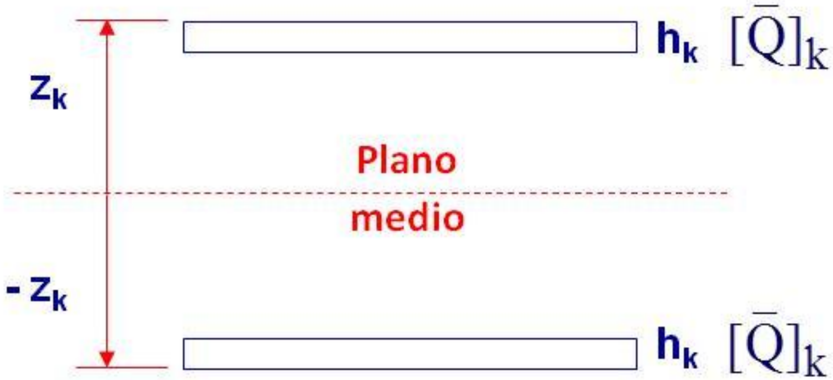


$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{1s} \\ B_{12} & B_{22} & B_{2s} \\ B_{1s} & B_{2s} & B_{ss} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Tipos de laminados

## Laminado simétrico

Un laminado es simétrico si por cada lámina que existe a un lado del plano medio, existe otra a la misma distancia al otro lado con las mismas características (espesor, orientación y propiedades elásticas



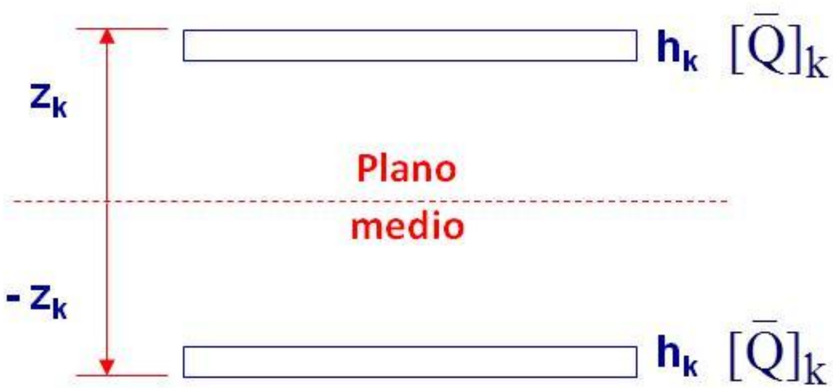

$$[B]=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i}^{N}[\bar{Q}]_i\cdot\left(Z_i^2-Z_{i-1}^2\right)$$

$$[B]=[0]$$

# Tipos de laminados

## Laminado simétrico

Un laminado es simétrico si por cada lámina que existe a un lado del plano medio, existe otra a la misma distancia al otro lado con las mismas características (espesor, orientación y propiedades elásticas




$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\}$$

$$\{M\} = [D] \cdot \{k\}$$

$$[a] = [A]^{-1}$$

$$[d] = [D]^{-1}$$

# Tipos de laminados

## Laminado equilibrado

Un laminado es equilibrado si consta de igual número de láminas idénticas orientadas a +θ y a -θ

$$\bar{Q}_{xs}^{+\theta} = m^3 \cdot n \cdot (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{ss}) + m \cdot n^3 \cdot (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{SS})$$

$$m = \cos\theta$$

$$n = sen\,\theta$$

$$\bar{Q}_{xs}^{-\theta} = -m^3 \cdot n \cdot (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{ss}) - m \cdot n^3 \cdot (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{SS})$$

$$A_{xs} = \sum_{i}^{N} \bar{Q}_{xs_i} \cdot h_i = 0$$

# Tipos de laminados

## Laminado equilibrado

Un laminado es equilibrado si consta de igual número de láminas idénticas orientadas a $+\theta$ y a $-\theta$

$$A_{xs} = \sum_{i}^{N} \bar{Q}_{xs_i} \cdot h_i = 0$$

$$A_{ys} = \sum_{i}^{N} \bar{Q}_{ys_i} \cdot h_i = 0$$

Un laminado equilibrado puede ser simétrico, antimétrico o asimétrico

Simétrico: $[\pm\theta_1/ \pm\theta_2]_S$ (8 láminas)

Antimétrico: $[\theta_1/ \theta_2/ -\theta_1/ -\theta_2]$ (4 láminas)

Asimétrico: $[\theta_1/ -\theta_2/ -\theta_1/ \theta_2]$ (4 láminas)

En general existe acoplamiento flexión/torsión salvo que el laminado sea antimétrico

# Tipos de laminados

**Laminado cuasi-ortotropos**

Un laminado es cuasi-ortotropo si los ejes de ortotropía del material coincide con los ejes del laminado

En estos laminados: $A_{xs} = A_{ys} = 0$

Si además son simétricos: $D_{xs} = D_{ys} = 0$

# Tipos de laminados

**Laminado cuasi-isótropos**

Un laminado es cuasi-isótropo si se cumple que:

$$A_{xx} = A_{yy}$$

$$A_{xx} - A_{xy} = 2 \cdot A_{ss}$$

$$A_{xs} = A_{ys} = 0$$

Ejemplo:

$[0/90/+45/-45]_S$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de membrana (Laminados simétricos)

Tensiones medias en el laminado

$$\sigma_x^o = \frac{N_x}{H}$$

$$\sigma_y^o = \frac{N_y}{H}$$

$$\tau_{xy}^o = \frac{N_{xy}}{H}$$

$$H = \sum_i^N h_i$$

$$\boxed{\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^o\}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\{\sigma^o\} = \left|A^*\right|\cdot\{\varepsilon^o\}}$$

Matriz de rigidez normalizada plana $\left[A^*\right] = \dfrac{[A]}{H}$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de membrana (Laminados simétricos)

$$\{\sigma^o\} = |A^*| \cdot \{\varepsilon^o\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\varepsilon^o\} = |a^*| \cdot \{\sigma^o\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{1s}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{2s}^* \\ a_{s1}^* & a_{s2}^* & a_{ss}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x^o \\ \sigma_y^o \\ \tau_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de membrana (Laminados simétricos)

### Constantes ingenieriles planas

$$E_x^o = \frac{1}{a_{11}^*} \qquad \nu_{yx}^o = -\frac{a_{21}^*}{a_{11}^*}$$

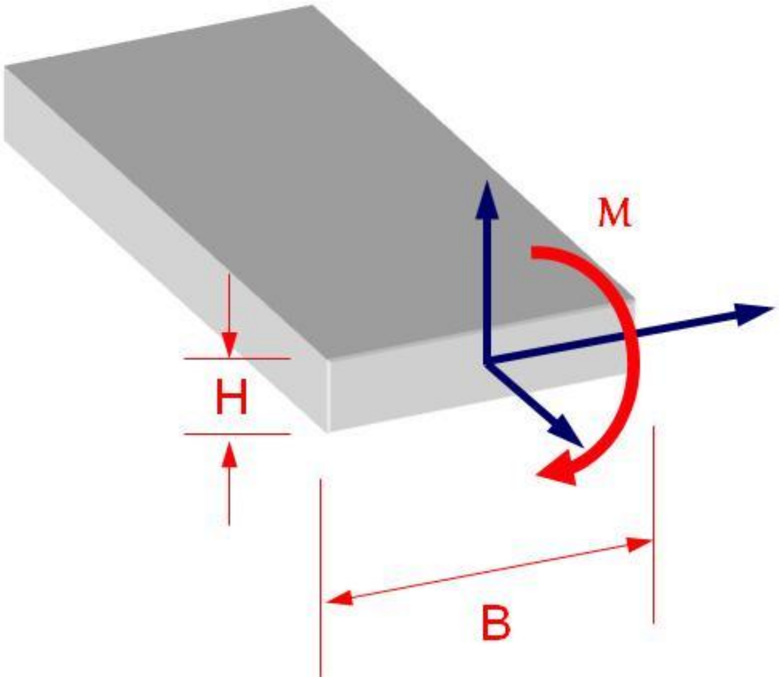
$$E_y^o = \frac{1}{a_{22}^*} \qquad \nu_{xy}^o = -\frac{a_{12}^*}{a_{22}^*}$$

$$G_{xy}^o = \frac{1}{a_{ss}^*}$$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de flexión-torsión (láminados simétricos)

En un material isótropo




$$\sigma_x = \frac{M \cdot z}{I} \qquad I = \frac{1}{12} \cdot B \cdot H^3$$

$$\varepsilon_x \Big|_{max.} = \frac{H}{2} \cdot k_x$$

$$\sigma_x \Big|_{max.} = \frac{6}{B \cdot H^2} \cdot M$$

$$M_x = \frac{M}{B}$$

$$\sigma_x \Big|_{max.} = \frac{6}{H^2} \cdot M_x$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

# Constantes aparentes del laminado

**Esfuerzos de flexión-torsión (láminados simétricos)**

Tensiones (medias) máximas del laminado

$$\sigma_x^f = \frac{6 \cdot M_x}{H^2}$$

$$\sigma_y^f = \frac{6 \cdot M_y}{H^2}$$

$$\tau_{xy}^f = \frac{6 \cdot M_{xy}}{H^2}$$

Deformaciones máximas del laminado

$$\{\varepsilon\}\big|_{max.} = z_{max.} \cdot \{k\}\big|$$

$$\varepsilon_x^f = \frac{H \cdot k_x}{2}$$

$$\varepsilon_y^f = \frac{H \cdot k_y}{2}$$

$$\gamma_{xy}^f = \frac{H \cdot k_{xy}}{2}$$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de flexión-torsión (láminados simétricos)

$$\boxed{\{M\} = [D] \cdot \{k\}}$$

$$\boxed{\{\sigma^f\} = [D^*] \cdot \{\varepsilon^f\}}$$

Matriz de rigidez normalizada a flexión $[D^*] = \dfrac{12 \cdot [D]}{H^3}$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de flexión-torsión (láminados simétricos)

$$\left\{\sigma^f\right\} = \left|D^*\right| \cdot \left\{\varepsilon^f\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\varepsilon^f\right\} = \left|d^*\right| \cdot \left\{\sigma^o\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* & d_{1s}^* \\ d_{21}^* & d_{22}^* & d_{2s}^* \\ d_{s1}^* & d_{s2}^* & d_{ss}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x^f \\ \sigma_y^f \\ \tau_{xy}^f \end{Bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Constantes aparentes del laminado

## Esfuerzos de flexión-torsión (láminados simétricos)

### Constantes ingenieriles a flexión

$$E_x^f = \frac{1}{d_{11}^*} \qquad \nu_{yx}^f = -\frac{d_{21}^*}{d_{11}^*}$$

$$E_y^f = \frac{1}{d_{22}^*} \qquad \nu_{xy}^f = -\frac{d_{12}^*}{d_{22}^*}$$

$$G_{xy}^f = \frac{1}{d_{ss}^*}$$

# Constantes aparentes del laminado

## Laminados no simétricos

$$\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^o\} + [B]\cdot\{k\}$$

$$\{M\} = [B]\cdot\{\varepsilon^o\} + [D]\cdot\{k\}$$

$$\{\sigma^o\} = \left|A^*\right|\cdot\{\varepsilon^o\} + \left|B^*\right|\cdot\{\varepsilon^f\}$$

$$\{\sigma^f\} = 3\cdot\left|B^*\right|\cdot\{\varepsilon^o\} + \left|D^*\right|\cdot\{\varepsilon^f\}$$

$$\{\sigma^o\} = \frac{\{N\}}{H}$$

$$\{\sigma^f\} = \frac{6\cdot\{M\}}{H^2}$$

$$\{\varepsilon^f\} = \frac{H\cdot\{k\}}{2}$$

$$\left[A^*\right] = \frac{[A]}{H} \qquad \left[D^*\right] = \frac{12\cdot[D]}{H^3}$$

Matriz de acoplamiento normalizada

$$\left[B^*\right] = \frac{2\cdot[B]}{H^2}$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

## En el laminado

MATRICES DE RIGIDEZ

[A] ; [B] ; [D]

ESTADO DE CARGA

{N} ; {M}

DEFORMACIONES Y GIROS

$$\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^0\} + [B]\cdot\{k\}$$

$$\{M\} = [B]\cdot\{\varepsilon^0\} + [D]\cdot\{k\}$$

DISTRIBUCION DE DEFORMACIONES

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\cdot\{k\}$$

# Rotura de laminados

## En la lámina

DISTRIBUCION DE DEFORMACIONES

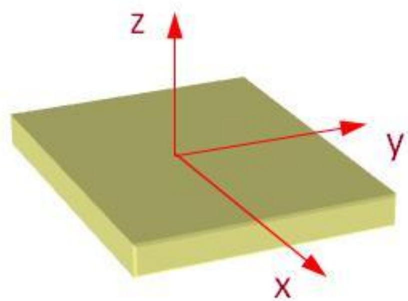
$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \cdot \{k\}$$

↓

DISTRIBUCION DE TENSIONES

(En cada lámina)

$$\{\sigma\}^{xy}{}_i = [\overline{Q}]_i \cdot \left(\{\varepsilon^0\} + z \cdot \{k\}\right)$$



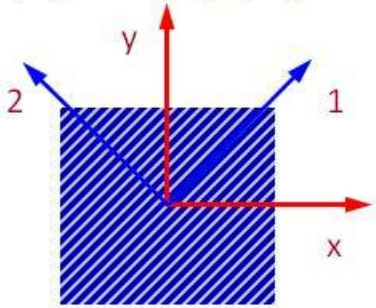
# Rotura de laminados

## En la lámina

DISTRIBUCION DE TENSIONES

(En ejes lámina)

$$\{\sigma\}^{12}_{i} = [T]\cdot\{\sigma\}_{i}^{xy}$$




CRITERIO DE ROTURA

$$-X' \leq \sigma_1 \leq X$$

$$-Y' \leq \sigma_2 \leq Y$$

$$|\tau_{12}| \leq S$$

## Proceso de diseño