Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Master en Mecánica Estructural Avanzada

Mecánica de Materiales Compuestos

Tema 2. Análisis de la lámina

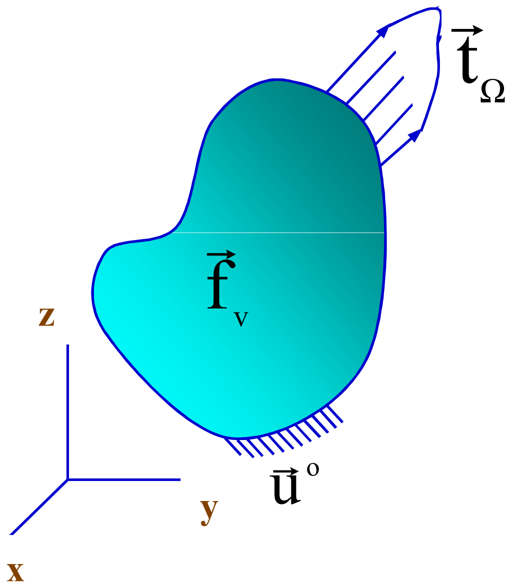
Curso 2010/2011

Autores: Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

Tema 2.1
Introducción a la Elasticidad Anisótropa

- Planteamiento del problema elástico
- Relación de comportamiento
- Ecuaciones constitutivas
- Simetrías materiales
- Materiales ortótropos
- Láminas

Planteamiento del problema elástico

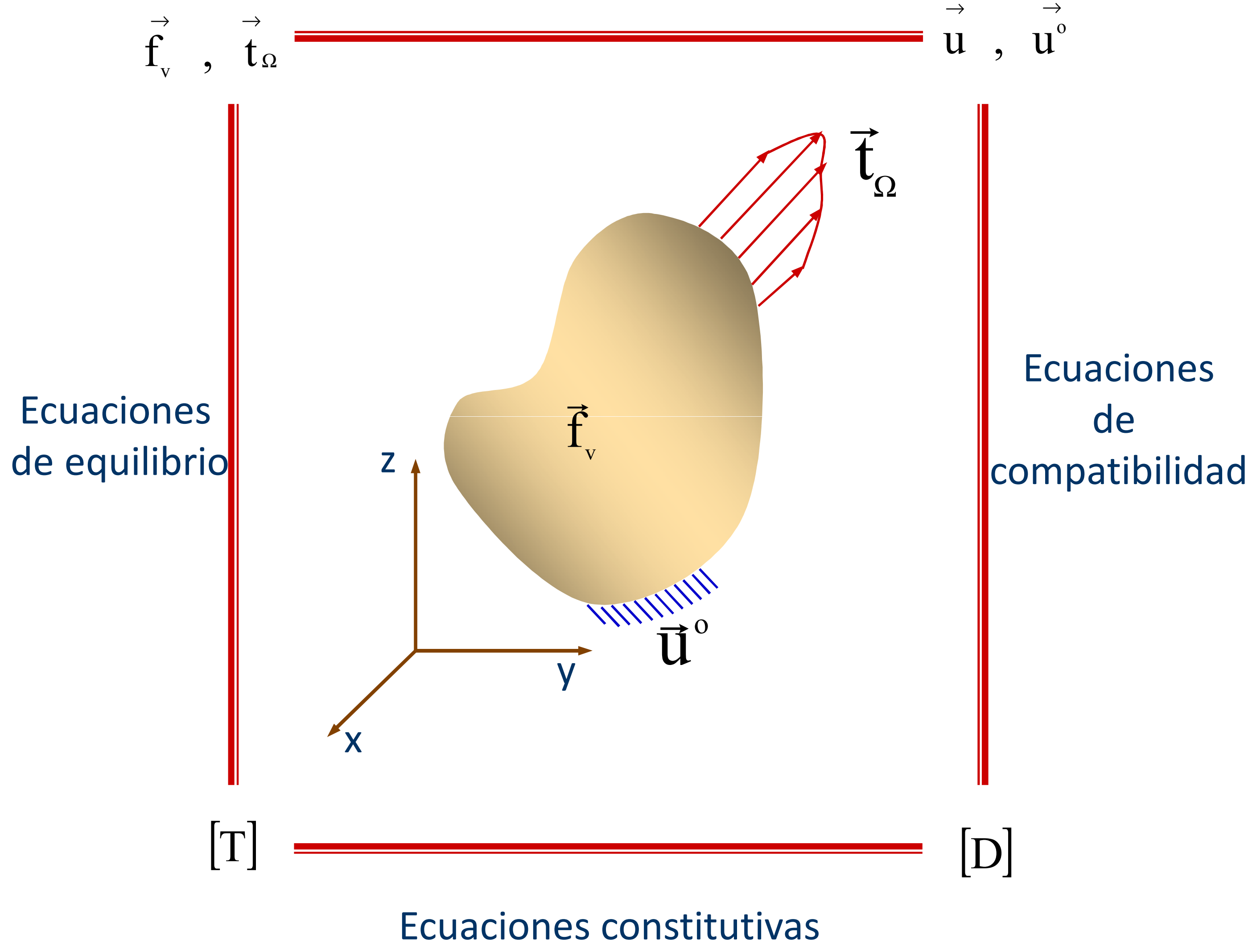


Problema elástico

Conocidas las acciones exteriores determinar el campo de desplazamientos, el tensor de tensión y el tensor de deformación

$$\boxed{\vec{f}_v \,,\ \vec{t}_\Omega \quad \vec{u}^o} \Longrightarrow \boxed{[T] \quad \vec{u} \quad [D]}$$

Planteamiento del problema elástico



Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

Relación de comportamiento

[T] ⟺ Movimiento, temperatura, tiempo

$$\left[T\right]=F\left(\overline{\phi}\left(t\right),\overline{\theta}\left(t\right),t,\overline{r}\right)$$

Material viscoelástico → La relación de comportamiento es lineal

Material elástico lineal → Material viscoelástico en el que no existe dependencia del tiempo

Material hiperelástico → $$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}$$

Material hipoelástico → $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}=C\cdot\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

Material elástico lineal

Relación lineal más general entre tensiones y deformaciones, en notación indicial

Relación de Duhamel-Neumann

$$\boxed{\sigma_{ij} = \left(\sigma_{ij}\right)^0 + C_{ijkl}\cdot\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0\right) - \gamma_{ij}\cdot\left(\theta - \theta^0\right)}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}$$

Generalmente se suele emplear la notación:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

Material elástico lineal

El tensor [C] es simétrico. Para materiales completamente anisótropos se requieren 21 constantes elásticas independientes

También se puede emplear el tensor inverso:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Simetría materiales

Un plano de simetría elástica implica que el comportamiento del material es el mismo en las dos direcciones perpendiculares al plano

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

Materiales con simetría monoclínica

1 plano de simetría elástica → **13** constantes elásticas

Si el plano es el xy

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

Materiales con simetría ortótropa

3 planos ortogonales entre si de simetría elástica $\longrightarrow$ 9 constantes elásticas

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

Las constantes tienen un significado físico

Materiales transversalmente isótropos

3 planos ortogonales entre si de simetría elástica, uno de los planos es isótropo $\longrightarrow$ 5 constantes elásticas

Si el plano es el xy

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

Las constantes tienen un significado físico

Materiales isótropos

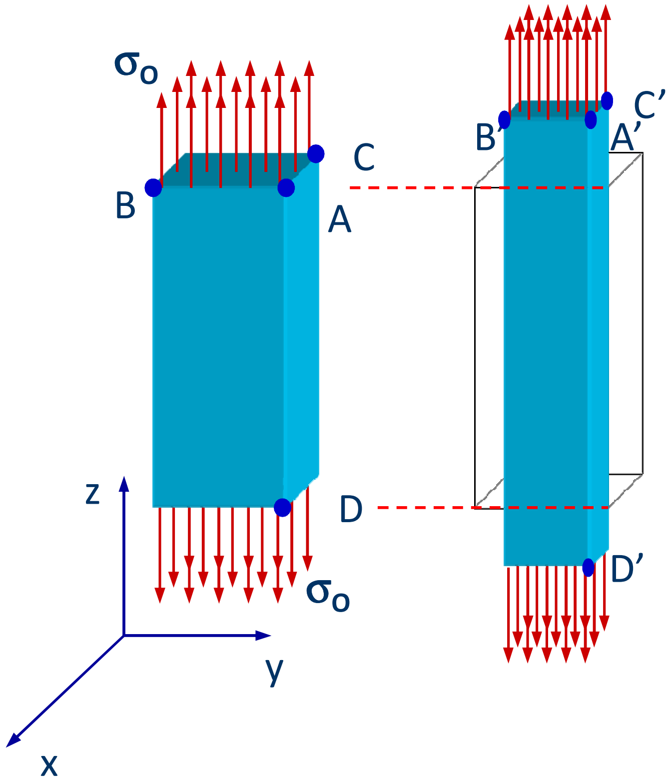
2 constantes elásticas

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

Las constantes tienen un significado físico

Materiales ortótropos

Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson



$$\sigma_z = \sigma_o$$

$$\varepsilon_z = \frac{A'D' - AD}{AD}$$

$$\varepsilon_x = \frac{A'C' - AC}{AC}$$

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

Experimentalmente se observa:
(Material lineal elástico)

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}}$$

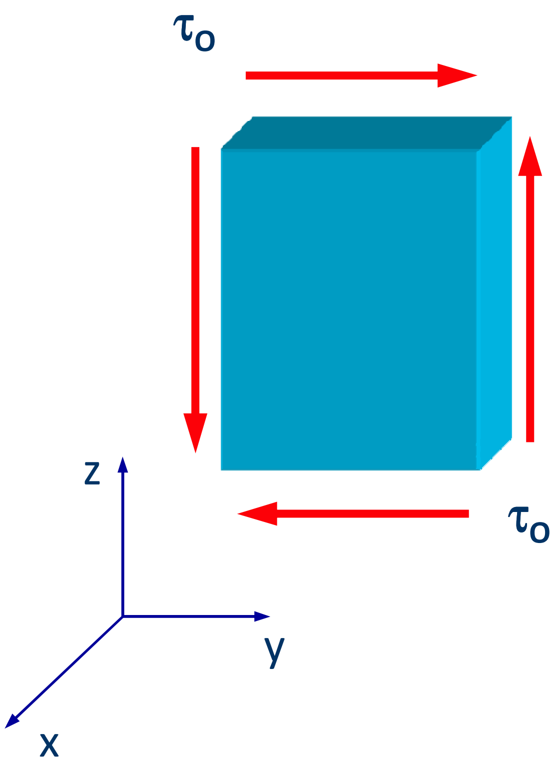
Ley de Hooke

$$\varepsilon_x < 0$$
$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_z$$
$$\varepsilon_y < 0$$
$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z$$

Efecto Poisson

E = Módulo de elasticidad o de Young (GPa)
ν = Coeficiente de Poisson

Módulo de elasticidad a cortadura



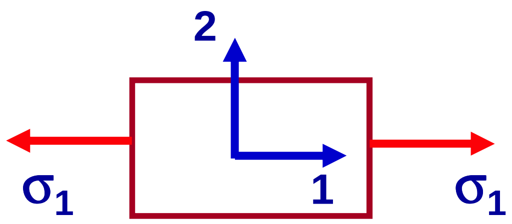
$$\tau_{xy} = \tau_o$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}}$$

Ley de Hooke

G = Módulo de elasticidad a cortadura (GPa)

Significado físico de las constantes



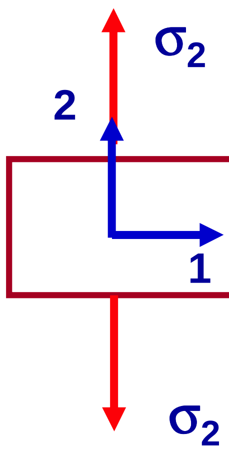
Ley de Hooke

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$$

Efecto Poisson

$$\varepsilon_2 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \sigma_1$$

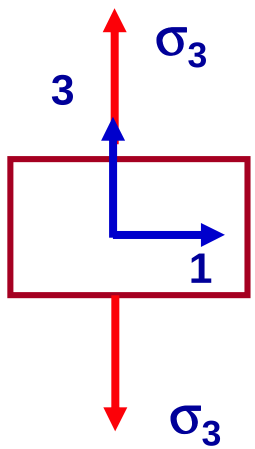
$$\varepsilon_3 = -\nu_{31} \cdot \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \cdot \sigma_1$$



$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\varepsilon_1 = -\nu_{12} \cdot \varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_2} \cdot \sigma_2$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{32} \cdot \varepsilon_2 = -\frac{\nu_{32}}{E_2} \cdot \sigma_2$$

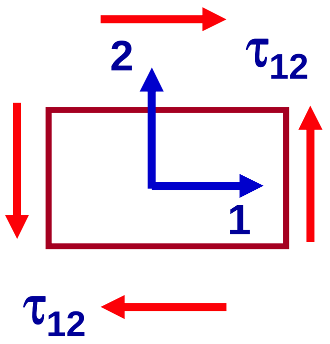


$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3}$$

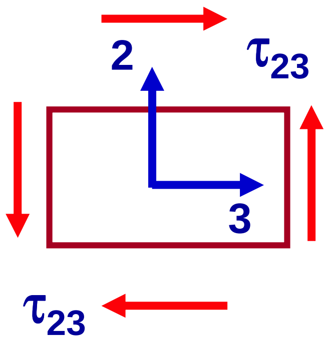
$$\varepsilon_1 = -\nu_{13} \cdot \varepsilon_3 = -\frac{\nu_{13}}{E_3} \cdot \sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{23} \cdot \varepsilon_3 = -\frac{\nu_{23}}{E_3} \cdot \sigma_3$$

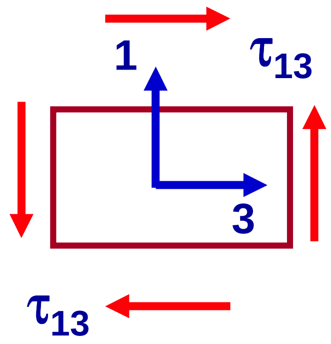
Significado físico de las constantes



$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$



$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}$$



$$\gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}}$$

Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez

Significado físico de las constantes

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\cdot\sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3}\cdot\sigma_3 \qquad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\cdot\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_3}\cdot\sigma_3 \qquad \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_1}\cdot\sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2}\cdot\sigma_2 \qquad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}$$

Significado físico de las constantes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$s_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad s_{12} = \frac{1}{E_2} \qquad s_{33} = \frac{1}{E_3}$$

Significado físico de las constantes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$s_{23} = \frac{1}{G_{23}} \qquad s_{55} = \frac{1}{G_{13}} \qquad s_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Significado físico de las constantes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$s_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} \qquad s_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3} \qquad s_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_3}$$

Significado físico de las constantes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$s_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \qquad s_{31} = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \qquad s_{32} = -\frac{\nu_{32}}{E_2}$$

Significado físico de las constantes

Restricciones al valor de las constantes elásticas

Debido a que la matriz [S] es simétrica

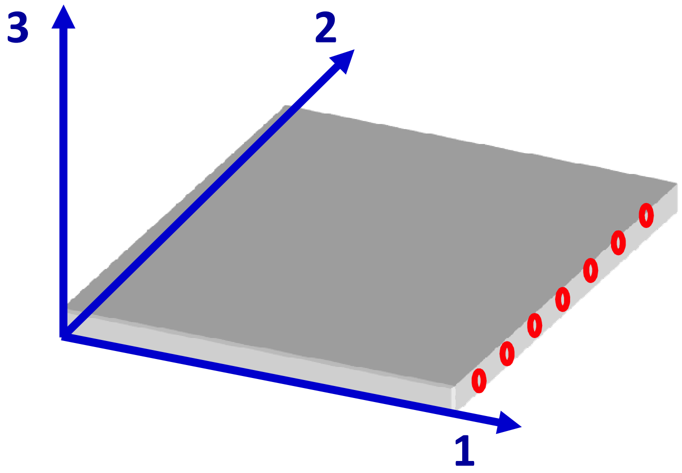
$$\frac{\nu_{ji}}{E_i} = \frac{\nu_{ij}}{E_j} \quad , \quad \mathrm{i,j=1...3} \quad , \quad \mathrm{i \neq j}$$

Debido a que los términos de la diagonal principal de [S] y [C] son positivos

$$0 < \nu_{ij} < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}} \quad , \quad i,j = 1...3 \quad , \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} -$$
$$-2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13} > 0$$

Ecuaciones constitutivas



Estado tensión plana

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \cdot \sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \sigma_1$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\}$ **Matriz de flexibilidad**

$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}$ **Matriz de rigidez**