



Universidad  
Carlos III de Madrid  
www.uc3m.es

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Máster en Mecánica Estructural Avanzada

# Mecánica de Materiales Compuestos

Tema 3. Determinación de las propiedades de una lámina

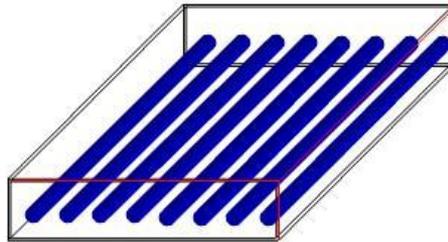
Curso 2010/2011

## Tema 3.1. : Modelización del comportamiento de una lámina

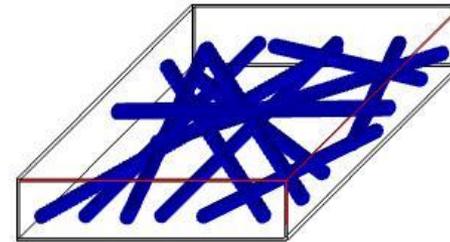
### ÍNDICE

- Introducción
- Conceptos básicos
- Comportamiento en dirección longitudinal a las fibras
- Comportamiento en dirección transversal a las fibras
- Comportamiento a cortadura

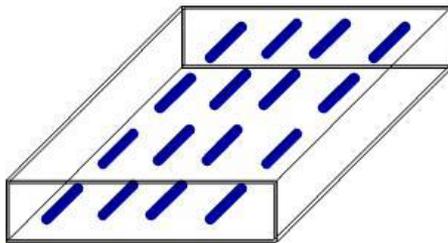
## Tipos de materiales compuestos



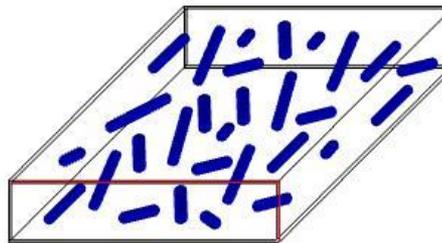
**Fibras largas  
unidireccionales**



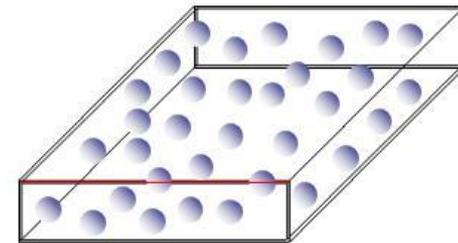
**Fibras largas con  
orientación aleatoria**



**Fibras cortas con  
alineadas**

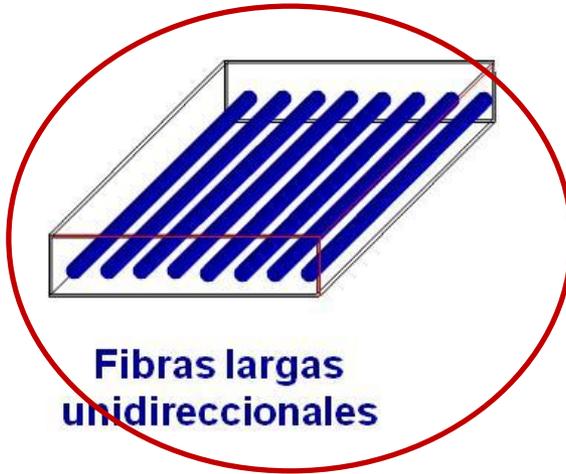


**Fibras cortas con  
orientación aleatoria**

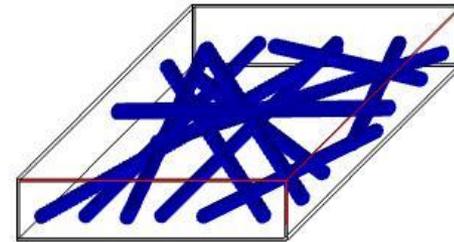


**Partículas**

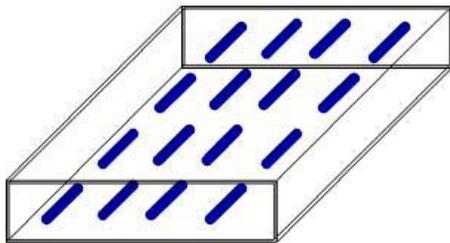
## Tipos de materiales compuestos



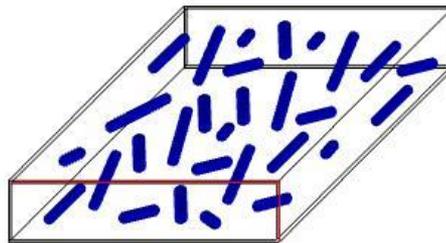
**Fibras largas  
unidireccionales**



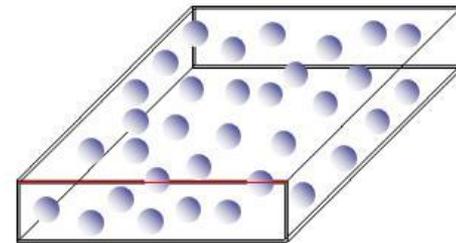
**Fibras largas con  
orientación aleatoria**



**Fibras cortas con  
alineadas**

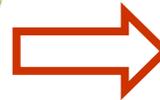
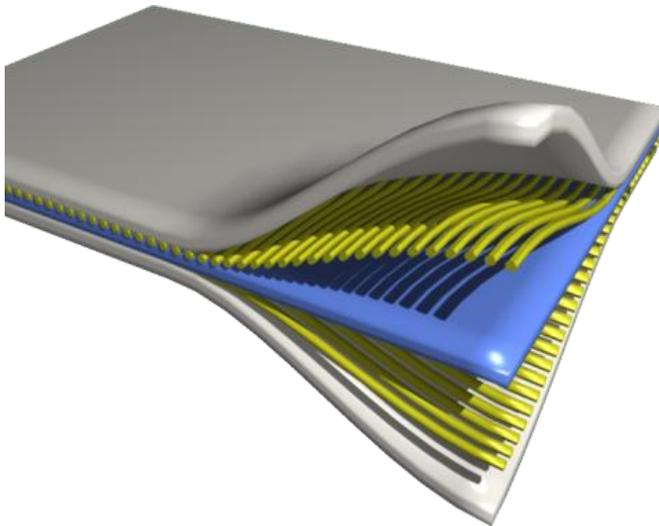


**Fibras cortas con  
orientación aleatoria**



**Partículas**

## Propiedades mecánicas de un material compuesto



### Propiedades elásticas

$$E_1, E_2, E_3$$

$$G_{12}, G_{13}, G_{23}$$

$$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

### Propiedades resistentes

$$X, Y, Z$$

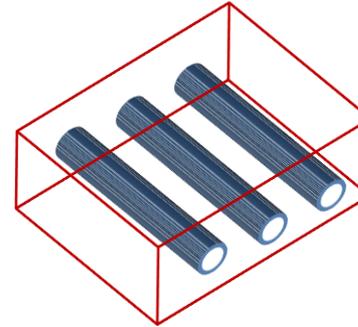
$$X', Y', Z'$$

$$S_{12}, S_{13}, S_{23}$$

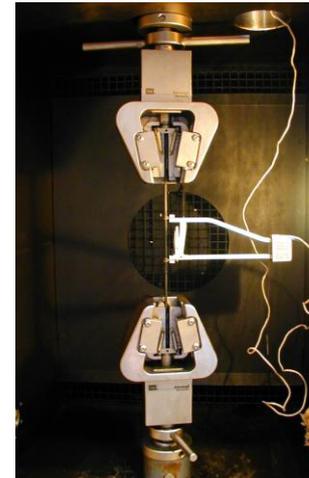
## Medida de las propiedades de una lámina

Aproximaciones:

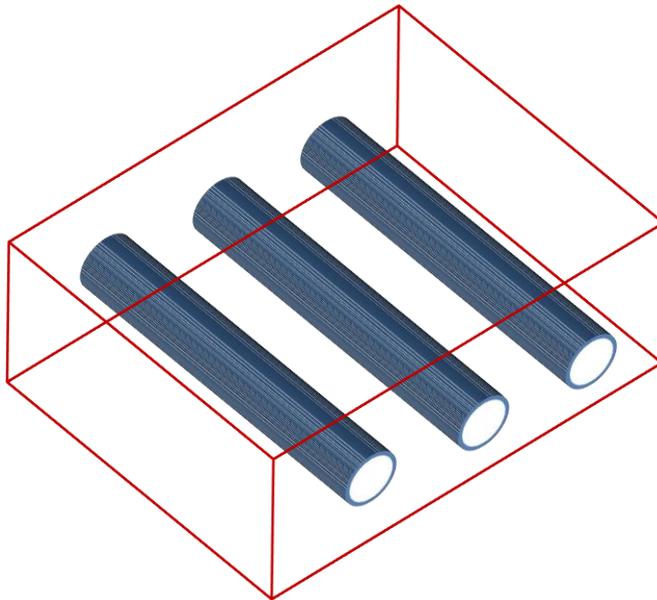
a) Modelos teóricos



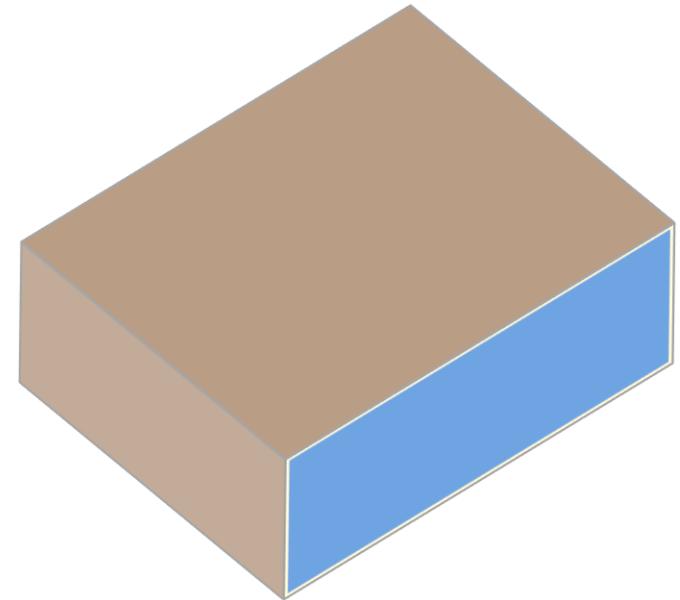
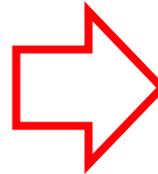
b) Determinación experimental



## Objetivo de los modelos teóricos



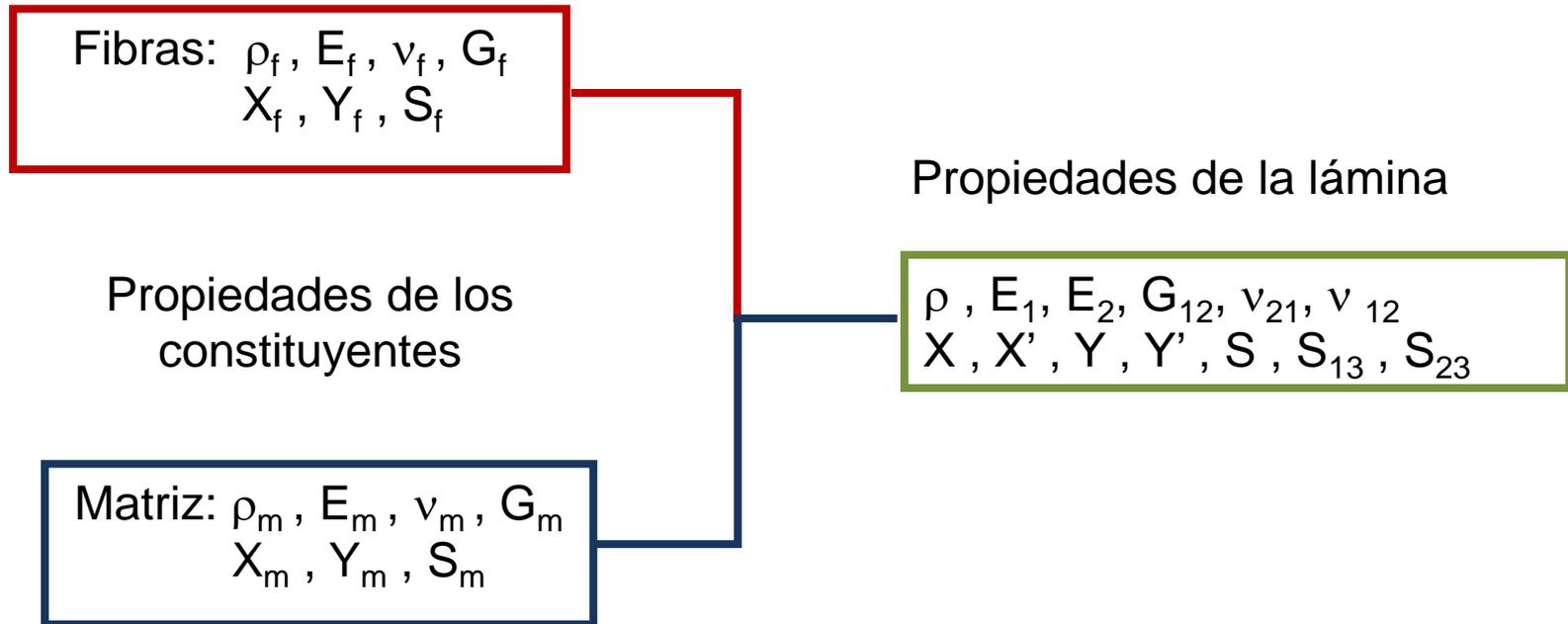
Material heterogéneo



Material homogéneo anisótropo

Estudiar el comportamiento de la lámina considerando las interacciones de los materiales constituyentes

## Objetivo de los modelos teóricos



## Contenido volumétrico de refuerzo

$$V_f = \frac{\text{Volumen de fibras}}{\text{Volumen total}}$$

$$V_m = \frac{\text{Volumen de matriz}}{\text{Volumen total}}$$

$$V_f + V_m = 1$$



## Contenido volumétrico de refuerzo

$$M_f = \frac{\text{Masa de fibras}}{\text{Masa total}}$$

$$M_m = \frac{\text{Masa de matriz}}{\text{Masa total}}$$

$$M_f + M_m = 1$$

## Relación $V_f$ y $M_f$

---

$$V_f = \frac{M_f / \rho_f}{M_f / \rho_f + M_m / \rho_m}$$

$$M_f = \frac{V_f \cdot \rho_f}{V_f \cdot \rho_f + V_m \cdot \rho_m}$$



## Volúmenes de fibra típicos

PROCESO DE FABRICACIÓN	$V_f$ (%)
Por contacto	30
Por presión	40
Por enrollamiento continuo (filament winding)	60-85
Por bolsa de vacío	50-80

## Densidad del compuesto

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\rho_f = \frac{M_f}{V_f}$$

$$\rho_m = \frac{M_m}{V_m}$$

$$\rho = \frac{M_f + M_m}{V}$$

$$\rho = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m$$

Regla de las mezclas

## Nivel de porosidad

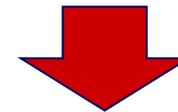
$$\rho_{teo} = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m$$

$$V_{poros} \% = \frac{\rho_{teo} - \rho_{exp}}{\rho_{teo}} \times 100$$

Afecta a las propiedades mecánicas

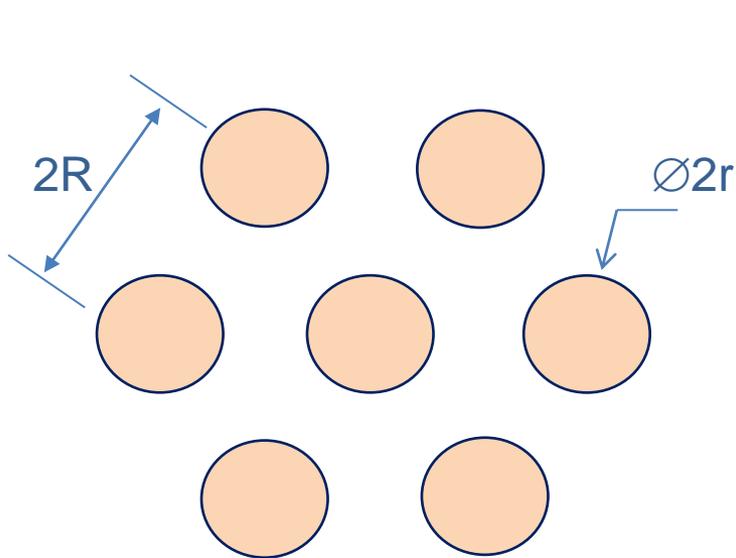
Rigidez y resistencia a cortadura  
Resistencias a compresión  
Resistencia a tracción transversal  
Resistencia a la fatiga  
Resistencia a la humedad

2-10% ↓



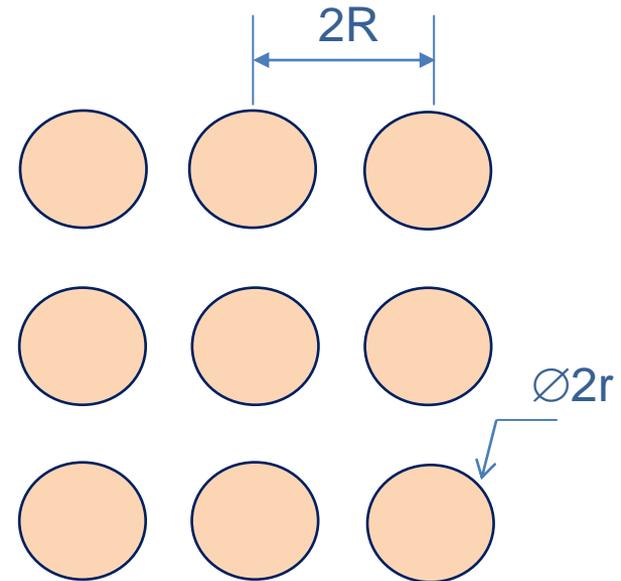
1% ↑  $V_{poros}$

## Relación $V_f$ - geometría



$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{hexagonal})$$

$V_f$  máximo: 91% aprox.

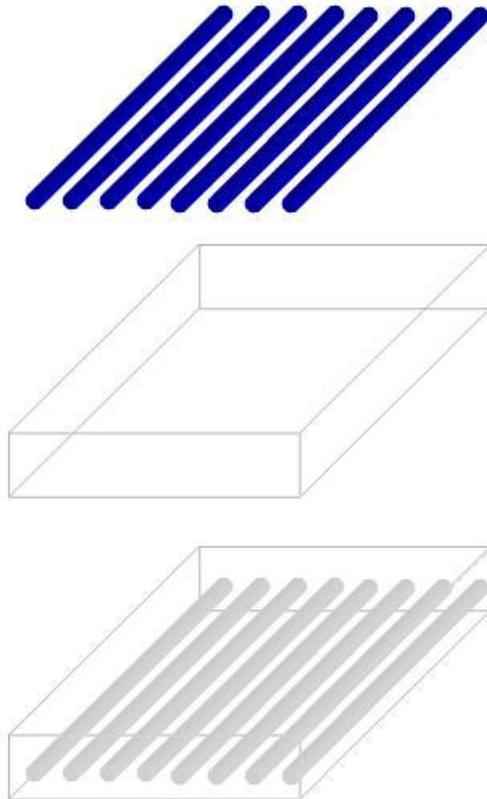


$$V_f = \frac{\pi}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{cuadrado})$$

$V_f$  máximo: 78% aprox.

## Hipótesis

---



### Material fibras

- Homogéneo
- Elástico lineal
- Isótropo

### Configuración

- Fibras regularmente espaciadas
- Fibras perfectamente alineadas

## Propiedades de las fibras

### FIBRAS

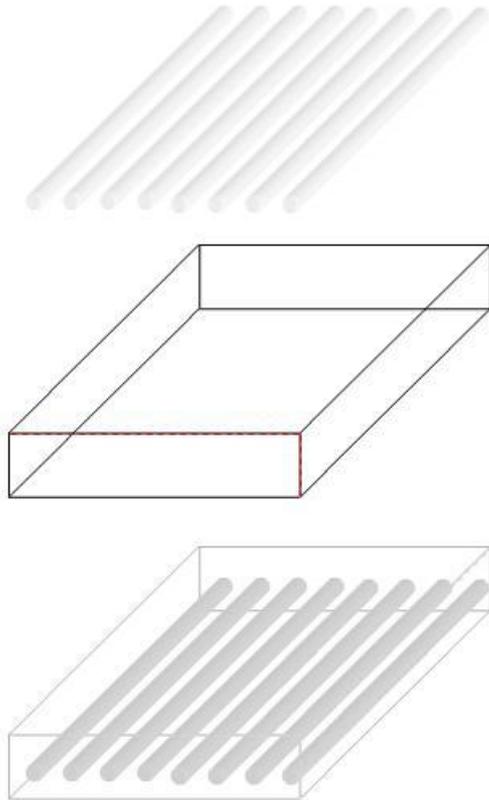
	Vidrio	Kevlar	Carbono H.R.	Carbono H.M.
$E_{f1}$ (GPa)	85	124	230	390
$E_{ft}$ (GPa)	85	8	15	6
$G_f$ (GPa)	22	12	50	20
$\nu_{ft1}$	0,25	0,37	0,30	0,35

Fibras  
isótropas

Fibras  
anisótropas

## Hipótesis

---



### Material Matriz

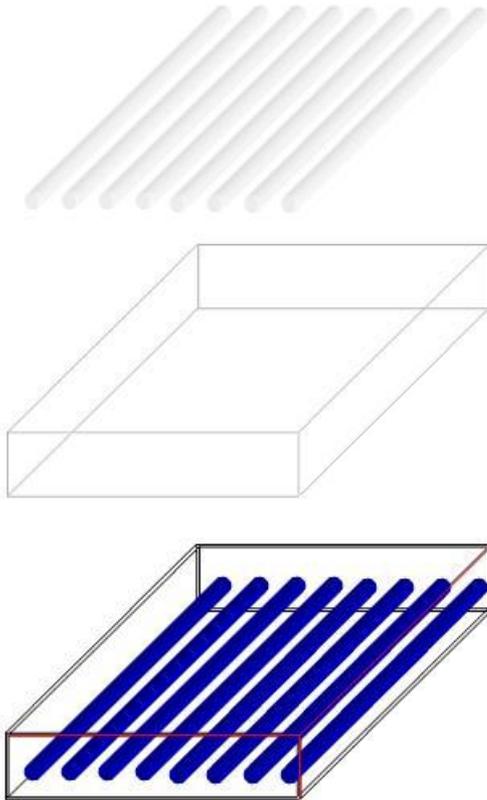
- Homogéneo
- Elástico lineal
- Isótropo

## Propiedades de las matrices

### MATRICES

	Epoxi	Poliamida	Aluminio
$E_{lm}$ (GPa)	3,4	3,5	70
$E_{tm}$ (GPa)	3,4	3,5	70
$G_m$ (GPa)	1,3	1,3	26,9
$\nu_m$	0,3	0,35	0,3

## Hipótesis



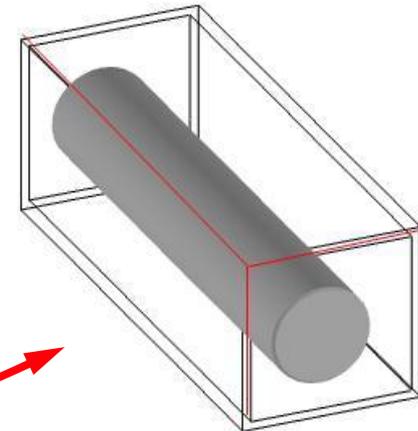
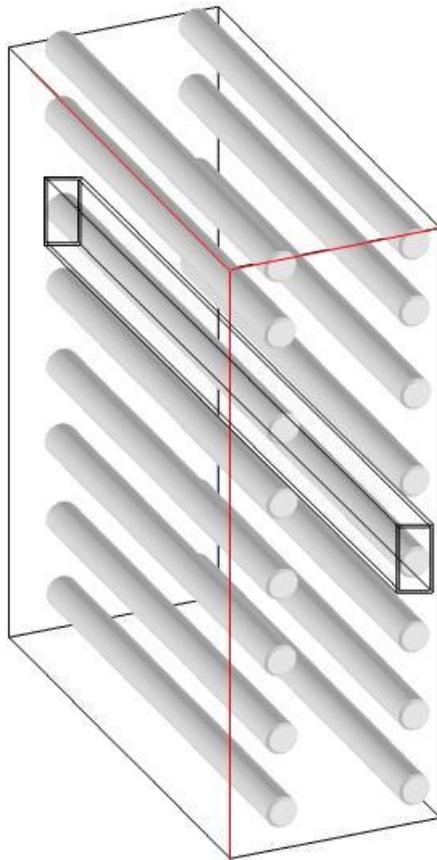
### Material lámina

- Macroscópicamente homogéneo
- Elástico lineal
- Macroscópicamente ortótropo

### Configuración

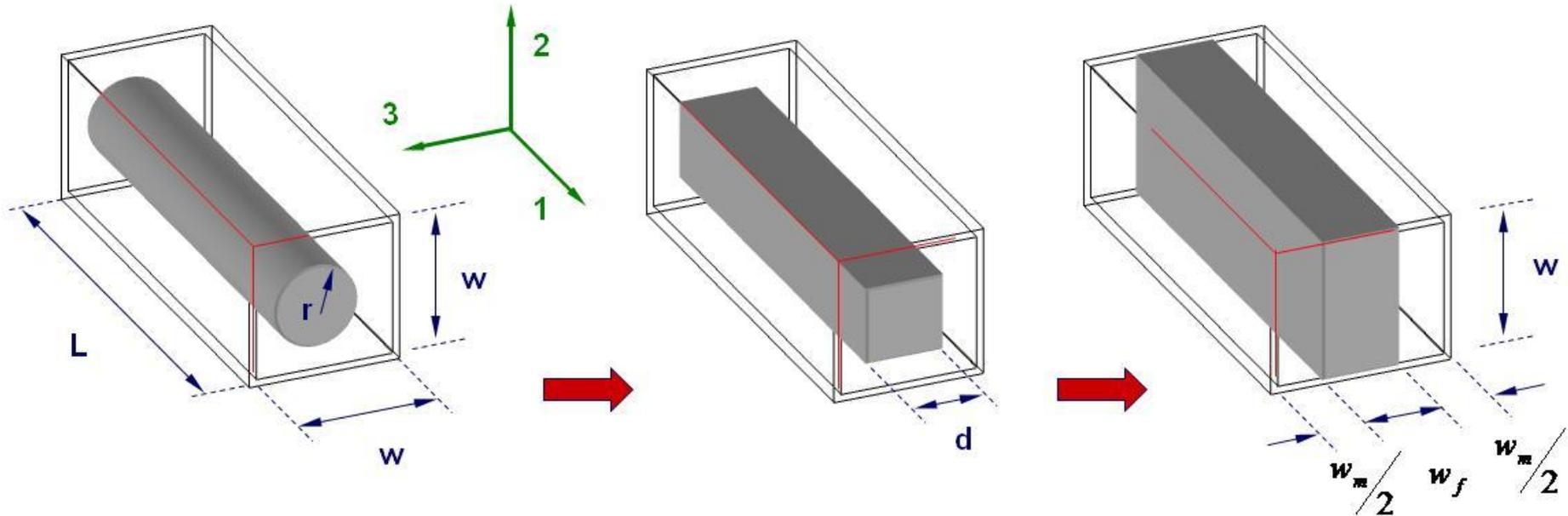
- Ausencia de tensiones iniciales
- Unión fibra-matriz perfecta
- Ausencia de porosidad

## Hipótesis



Celdilla unidad

## Celdilla unidad



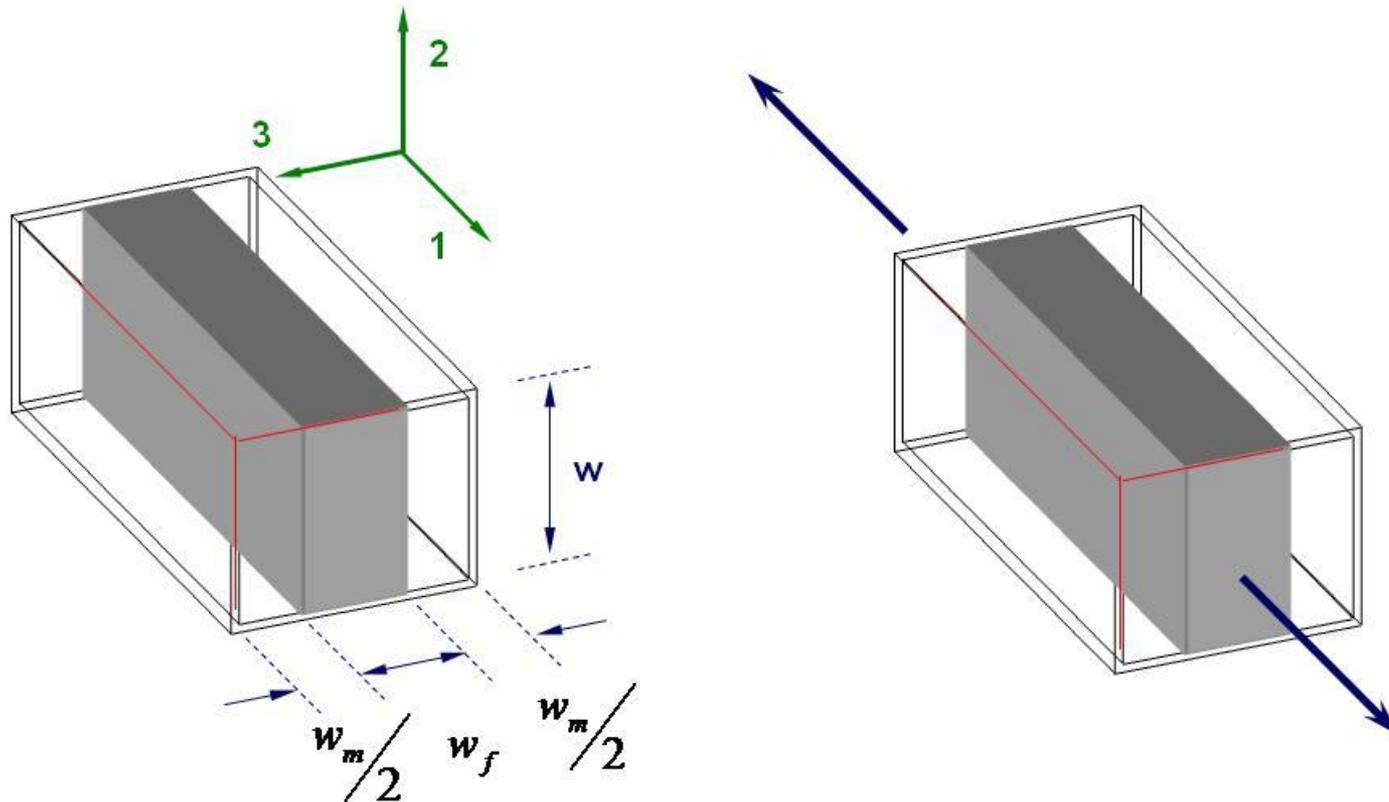
$$V_f = \frac{\pi \cdot r^2}{w^2}$$

$$V_f = \left(\frac{d}{w}\right)^2$$

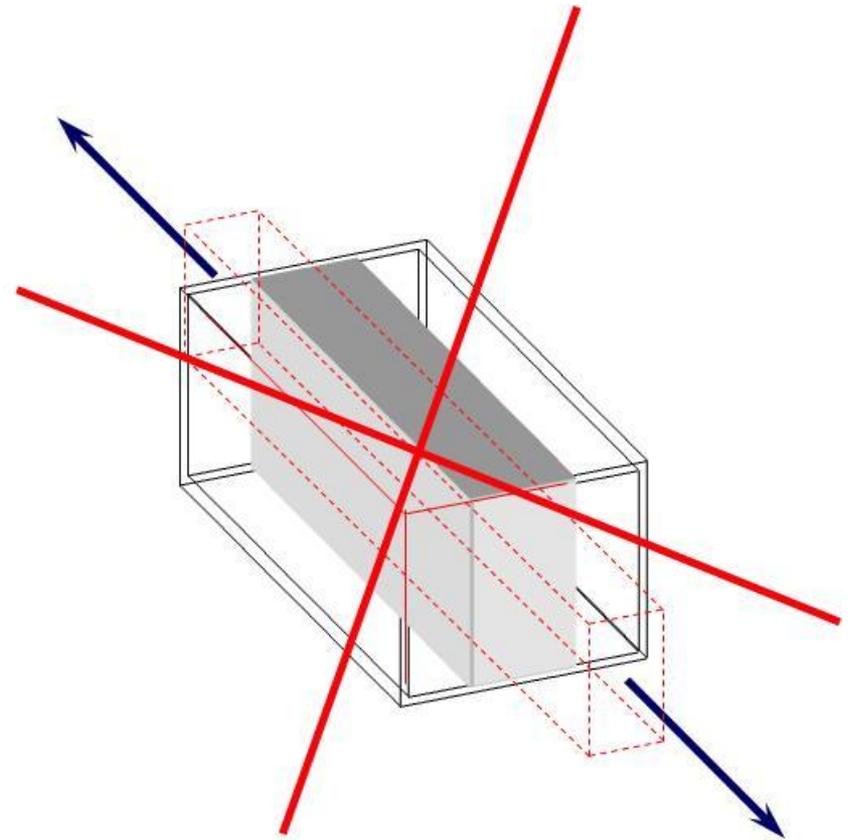
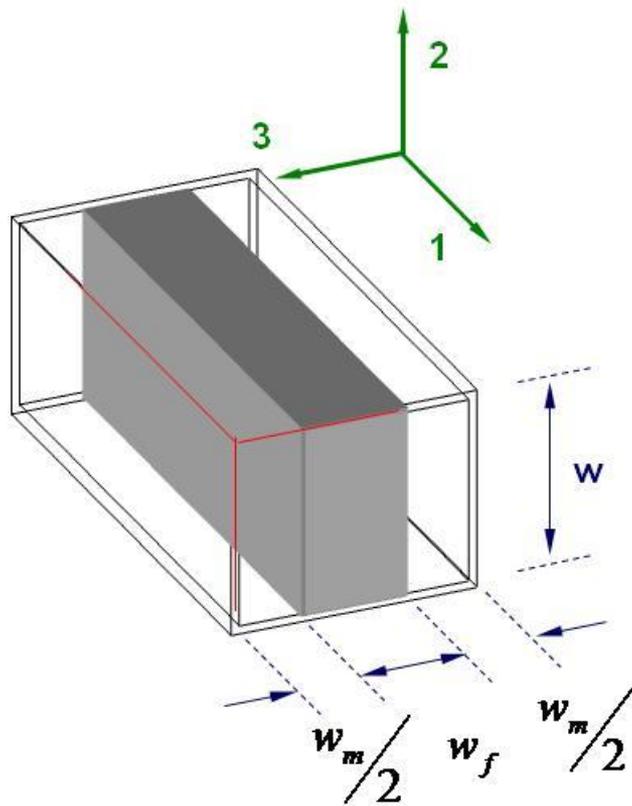
$$w = w_f + w_m$$

$$V_f = \frac{w_f}{w}$$

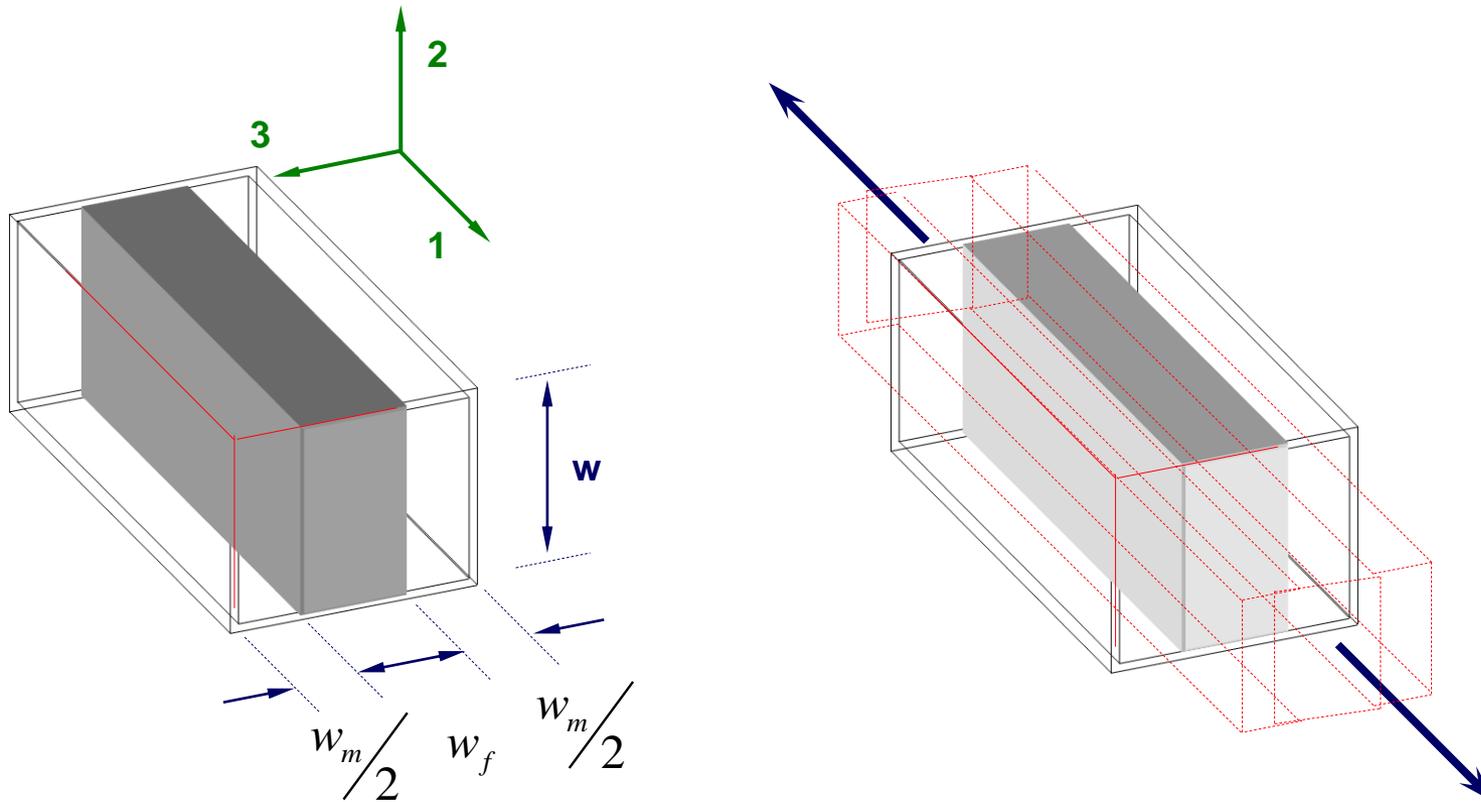
## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$



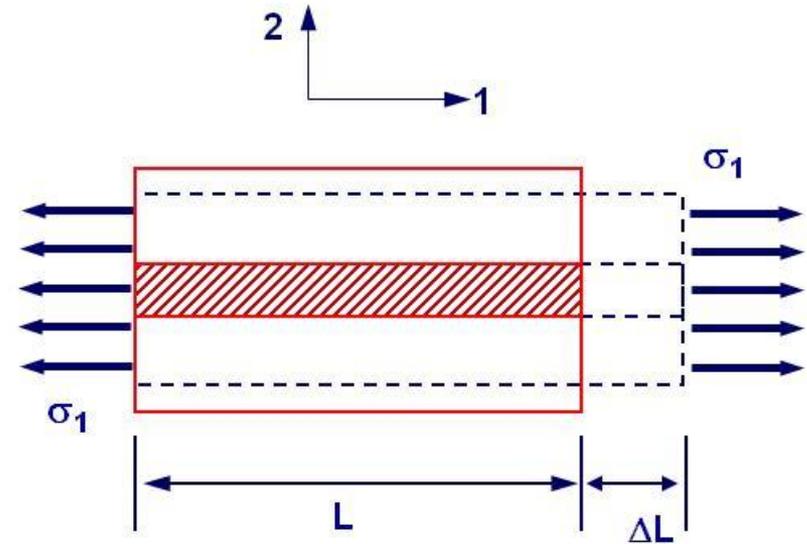
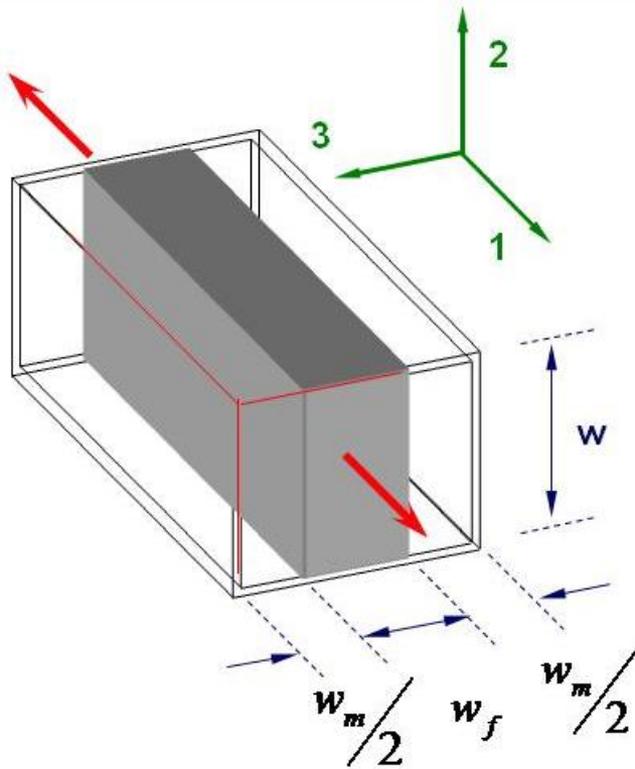
## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$



## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$



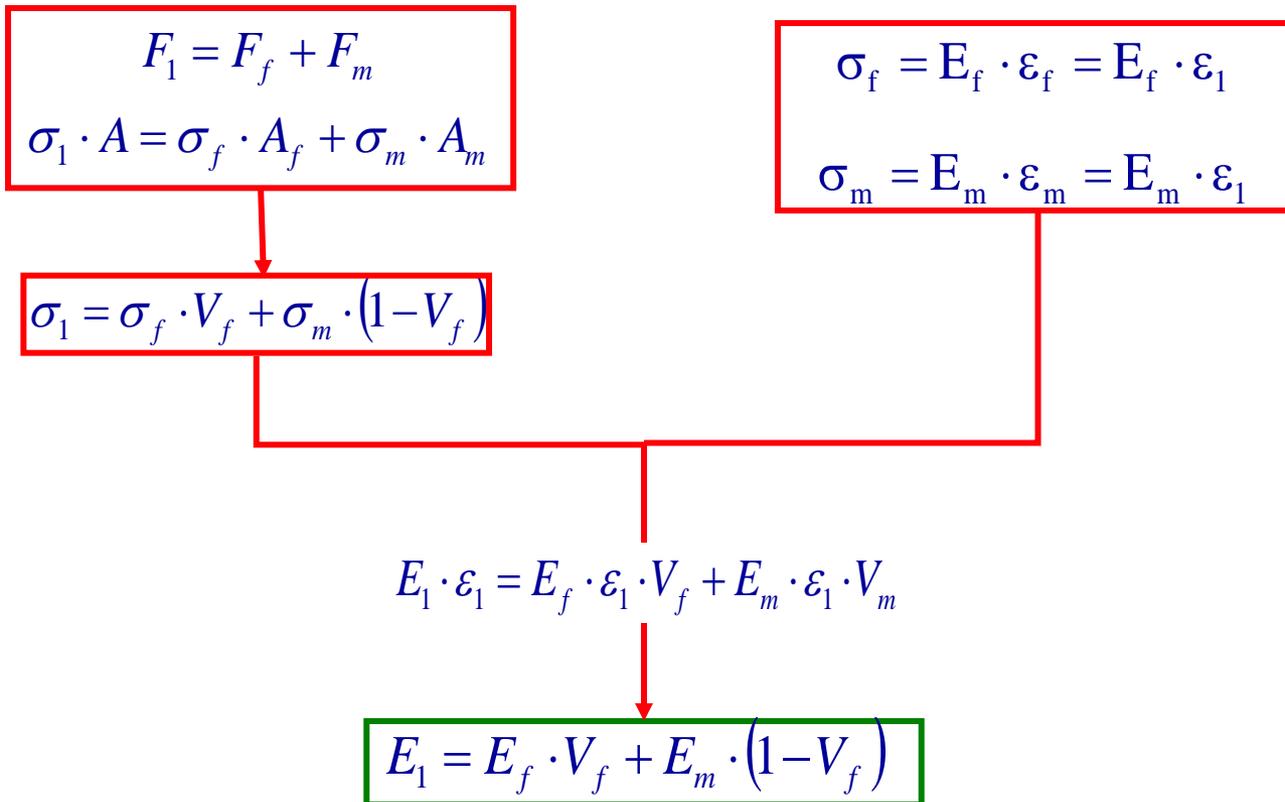
## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$



$$F_1 = F_f + F_m$$

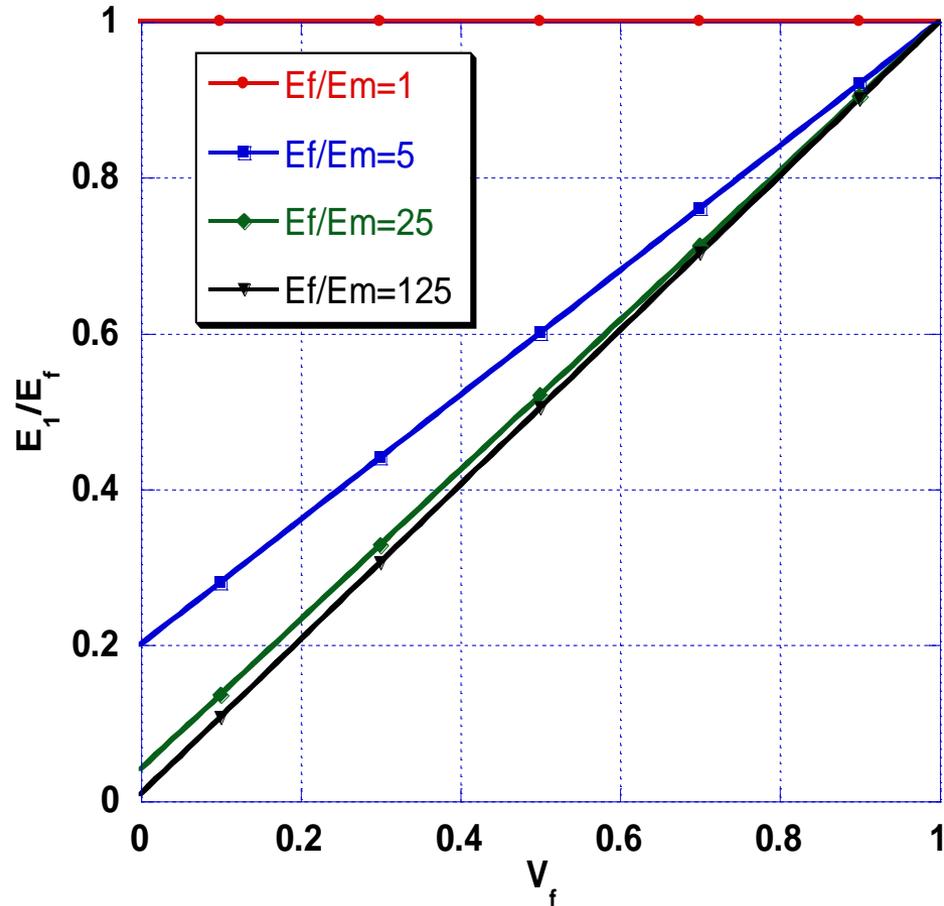
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m$$

## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$



## Predicción del módulo de elasticidad $E_1$

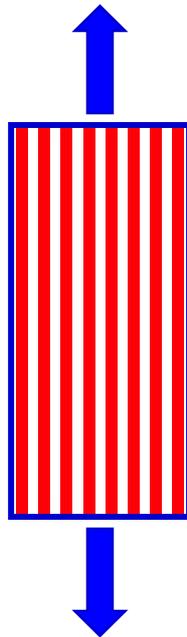
$E_1$  cambia  
significativamente  
con el porcentaje  
de fibra



# Comportamiento en dirección longitudinal a las fibras

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

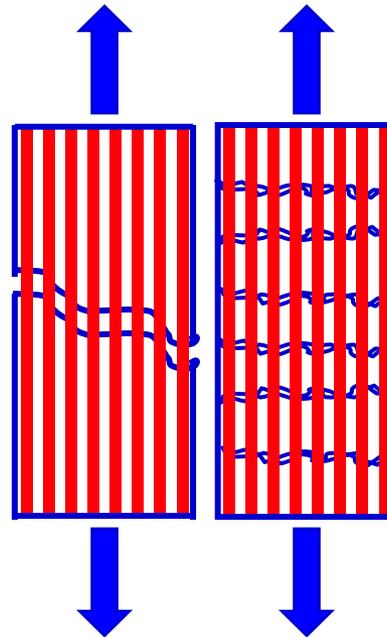
### Modos de fallo



Modelo de Kelly-Davis (1965)

$V_f$  bajos

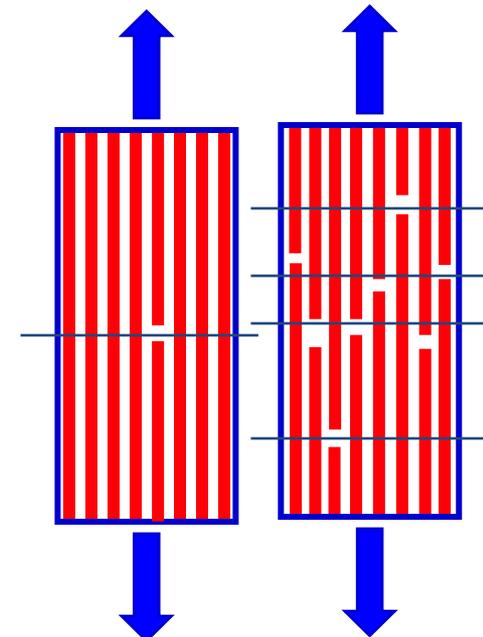
$V_f$  altos



Modo de fallo  
por rotura de la  
matriz

$V_f$  altos

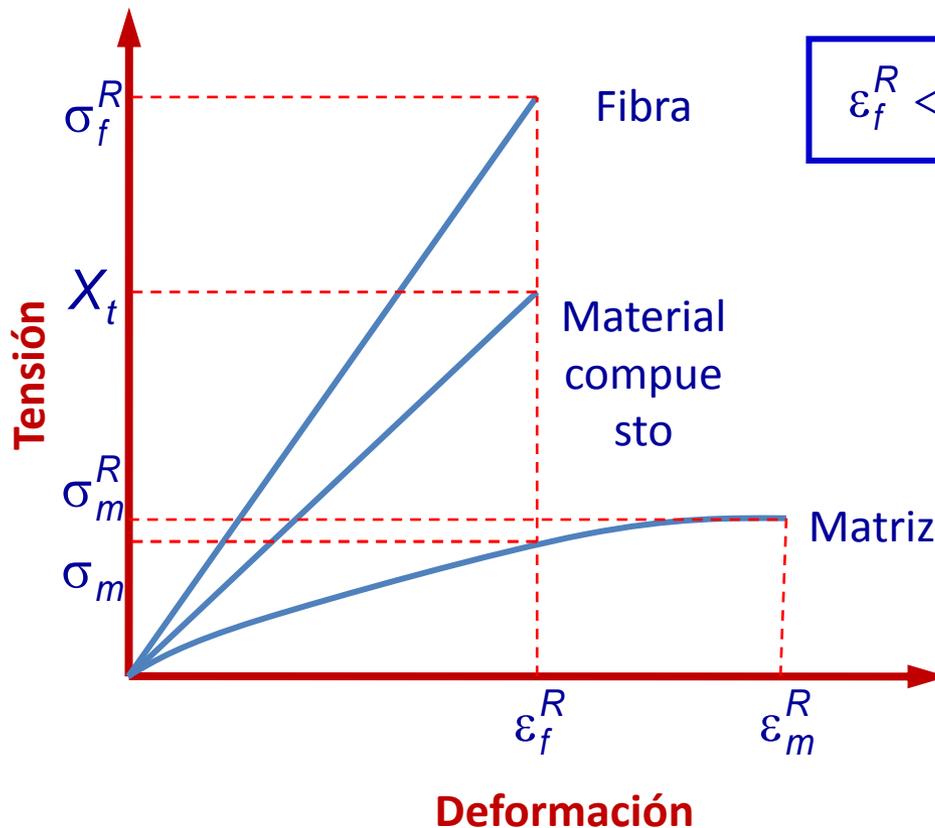
$V_f$  bajos



Modo de fallo  
por rotura de  
las fibras

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

a) La fibra posee una deformación de rotura inferior a la de la matriz



$$\sigma_{MC} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m$$

Para  $V_f$  bajos

Al romper las fibras

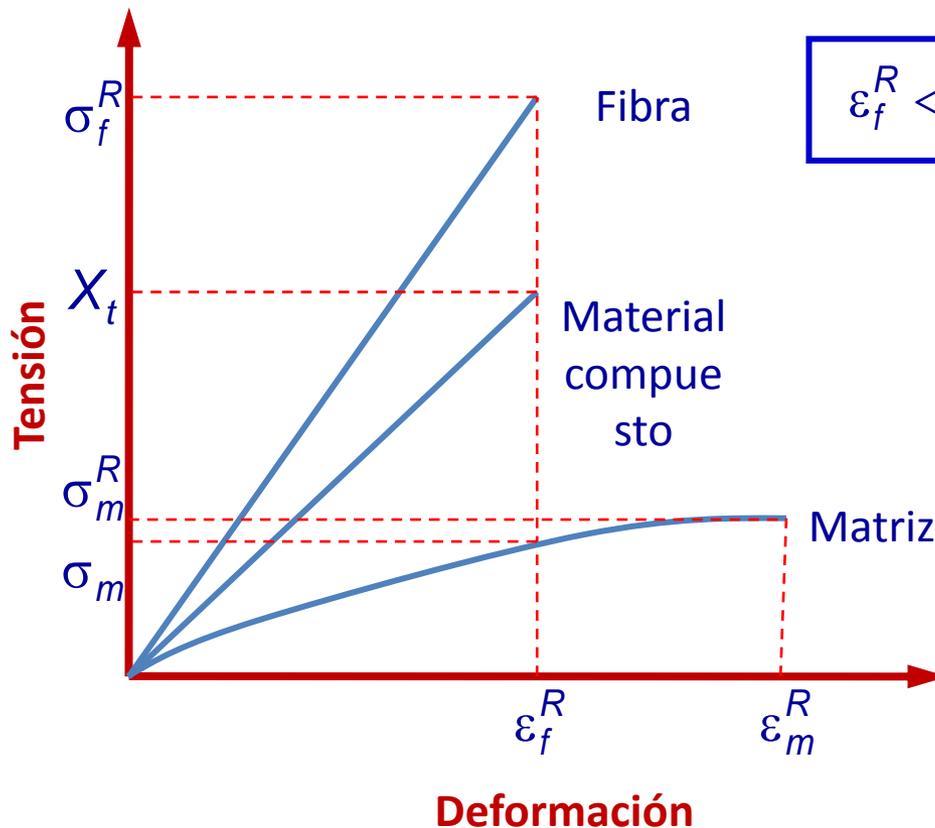
$$\sigma_{MC} = \sigma_m \cdot V_m$$



$$X_t = \sigma_m^R \cdot (1 - V_f)$$

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

a) La fibra posee una deformación de rotura inferior a la de la matriz



$$\sigma_{MC} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m$$

Para  $V_f$  altos

Al romper las fibras

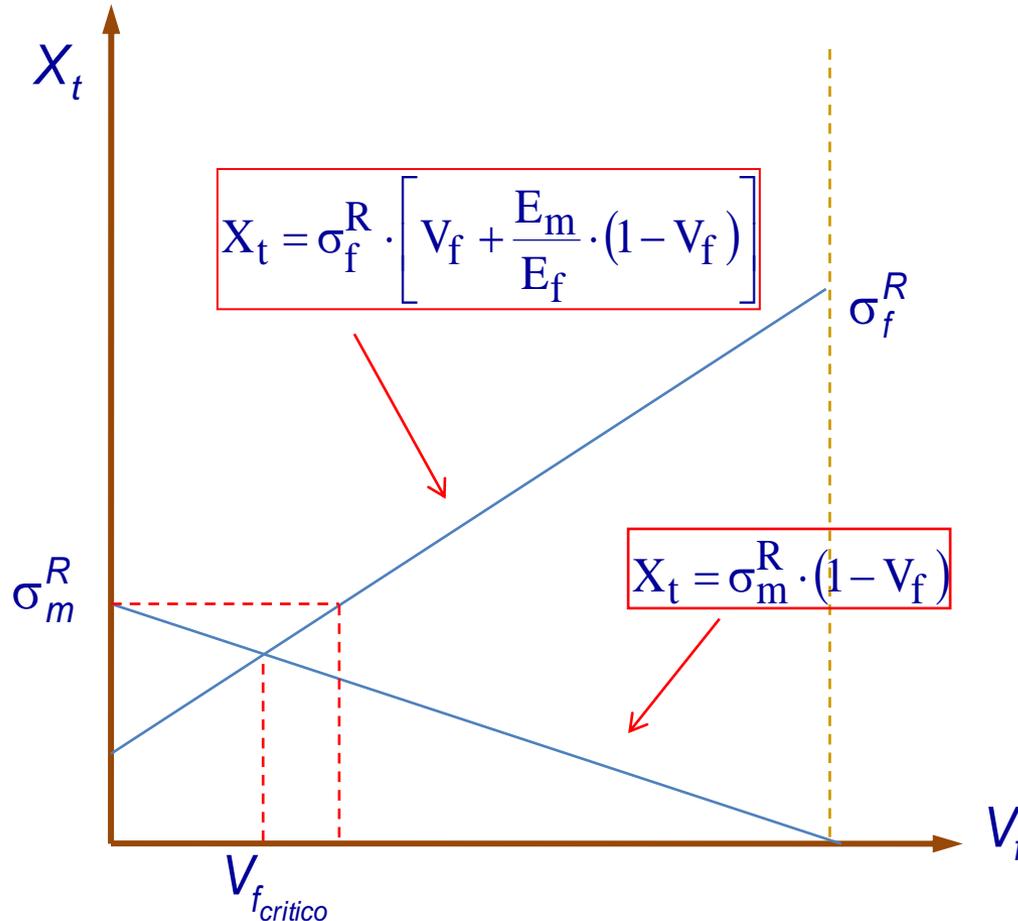
$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_f^R \cdot V_f + E_m \cdot \epsilon_f^R \cdot V_m \\ &= \sigma_f^R \cdot V_f + \frac{E_m}{E_f} \cdot \sigma_f^R \cdot V_m \end{aligned}$$

$$X_t = \sigma_f^R \cdot \left[ V_f + \frac{E_m}{E_f} \cdot (1 - V_f) \right]$$

Si  $E_f \gg E_m$  :  $X_t \approx \sigma_f^R \cdot V_f$

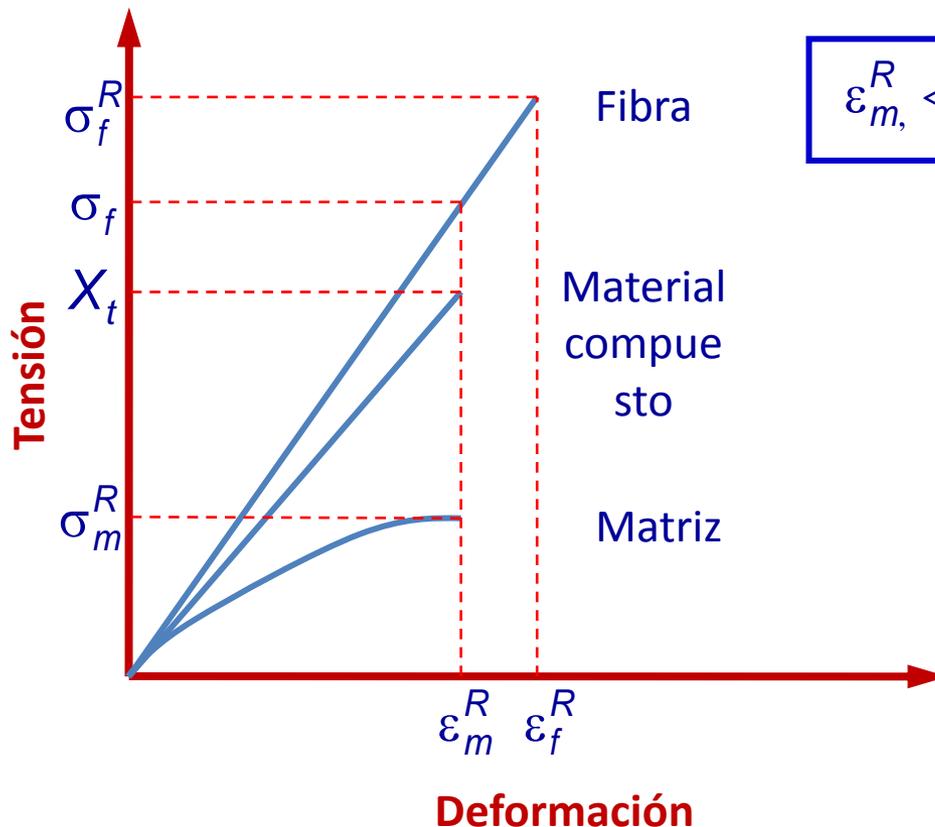
## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

a) La fibra posee una deformación de rotura inferior a la de la matriz



## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

b) La fibra posee una deformación de rotura superior a la de la matriz



$$\sigma_{MC} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m$$

Para  $V_f$  bajos

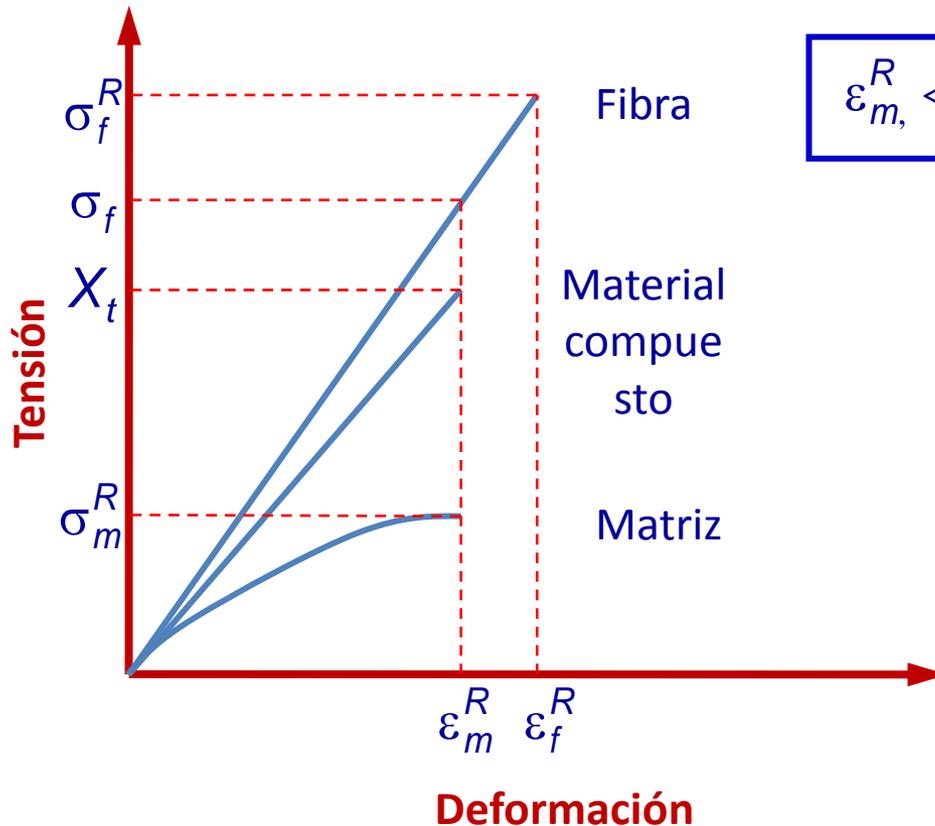
Al romper la matriz

$$\begin{aligned} X_t &= E_f \cdot \varepsilon_m^R \cdot V_f + \sigma_m^R \cdot V_m \\ &= \frac{E_f}{E_m} \cdot \sigma_m^R \cdot V_f + \sigma_m^R \cdot V_m \end{aligned}$$

$$X_t = \sigma_m^R \cdot \left[ V_f \cdot \frac{E_f}{E_m} + (1 - V_f) \right]$$

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

b) La fibra posee una deformación de rotura superior a la de la matriz



$$\sigma_{MC} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m$$

Para  $V_f$  altos

Al romper la matriz

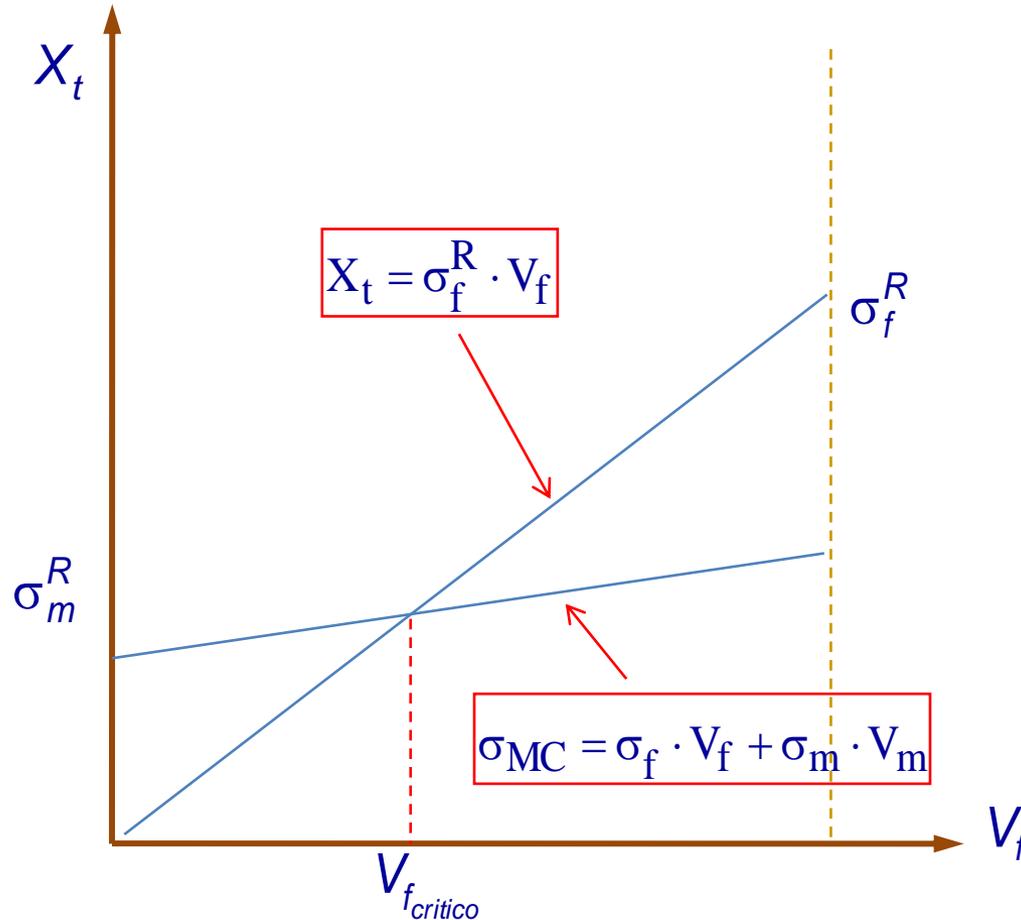
$$\sigma_{MC} = \sigma_f \cdot V_f$$



$$X_t = \sigma_f^R \cdot V_f$$

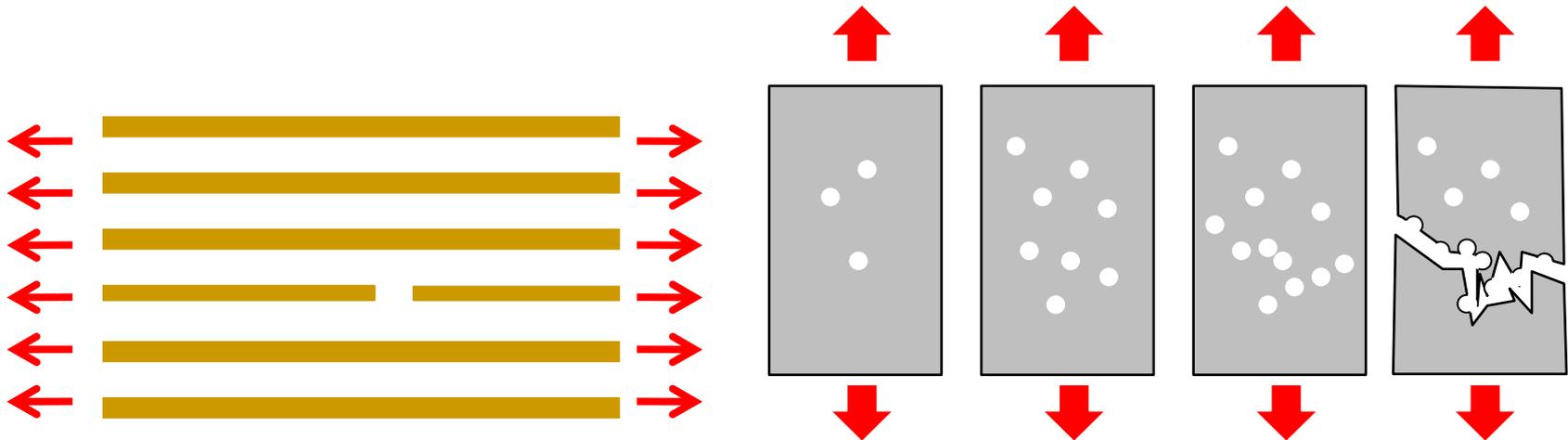
## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

b) La fibra posee una deformación de rotura superior a la de la matriz



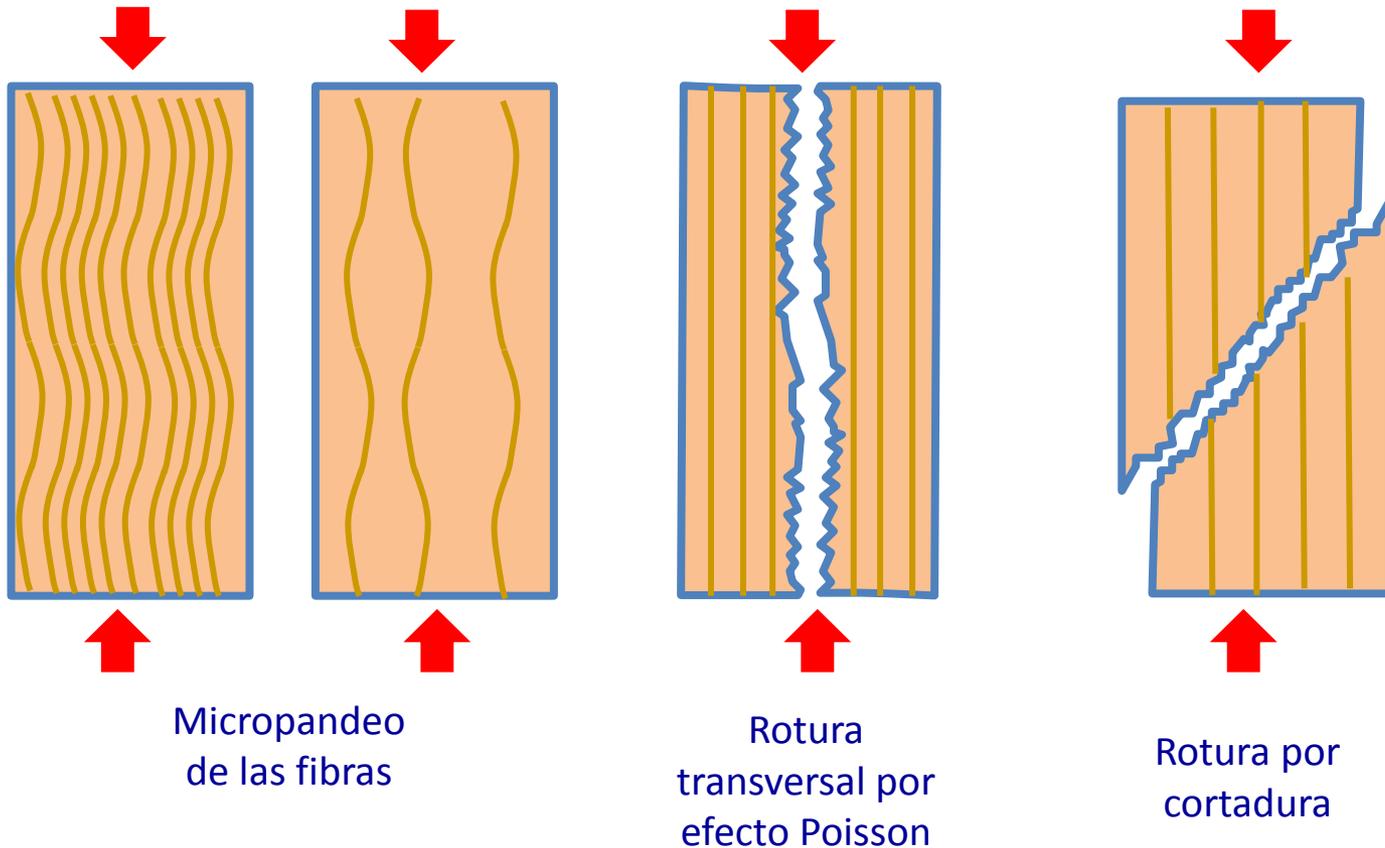
## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $X_t$

Todos los resultados anteriores no tienen en consideración la distribución estadística de las resistencias a la tracción de fibra y matriz



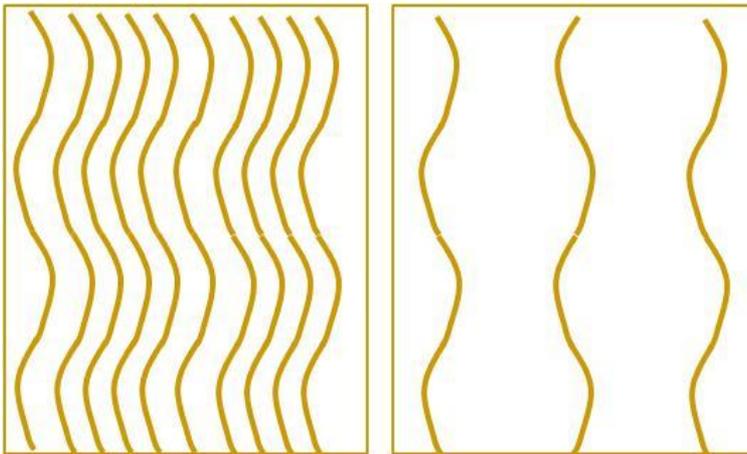
## Predicción de la resistencia mecánica a compresión $X_c$

### Modos de fallo en compresión en dirección de las fibras



## Predicción de la resistencia mecánica a compresión $X_c$

### Micropandeo de las fibras



Rotura en fase  
(Modo de corte)

$$D \approx d$$

Rotura fuera de fase  
(Modo extensional)

$$D \gg d$$

Cuando el volumen específico de fibras es bajo, predomina el Modo extensional

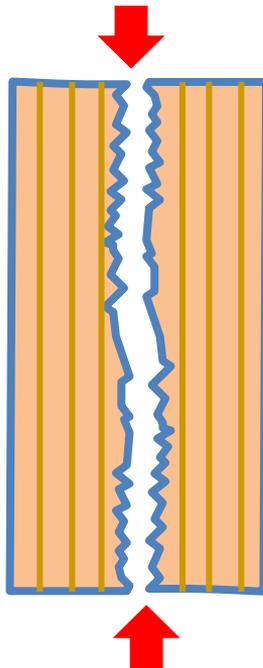
$$X_c = 2 \cdot V_f \cdot \sqrt{\frac{E_m \cdot E_f \cdot V_f}{3 \cdot (1 - V_f)}}$$

Para valores más altos de  $V_f$ , el modo de rotura de corte es el predominante.  
**(Rosen, 1965)**

$$X_c = \frac{G_m}{1 - V_f}$$

## Predicción de la resistencia mecánica a compresión $X_c$

### Rotura transversal por efecto Poisson

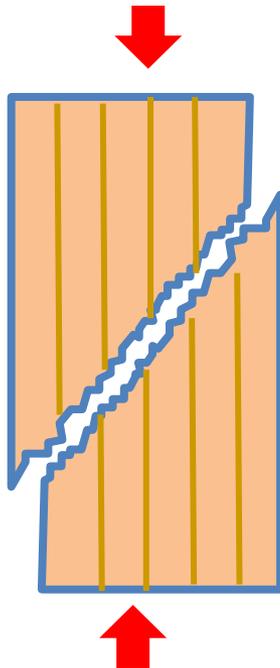


El fallo se produce cuando la deformación transversal a tracción, producida por efecto Poisson, alcanza un valor crítico (Deformación a rotura transversal)

$$X_c = \frac{(E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m) \cdot \left(1 - V_f^{1/3}\right)}{v_f \cdot V_f + v_m \cdot V_m} \cdot \varepsilon_m^R$$

## Predicción de la resistencia mecánica a compresión $X_c$

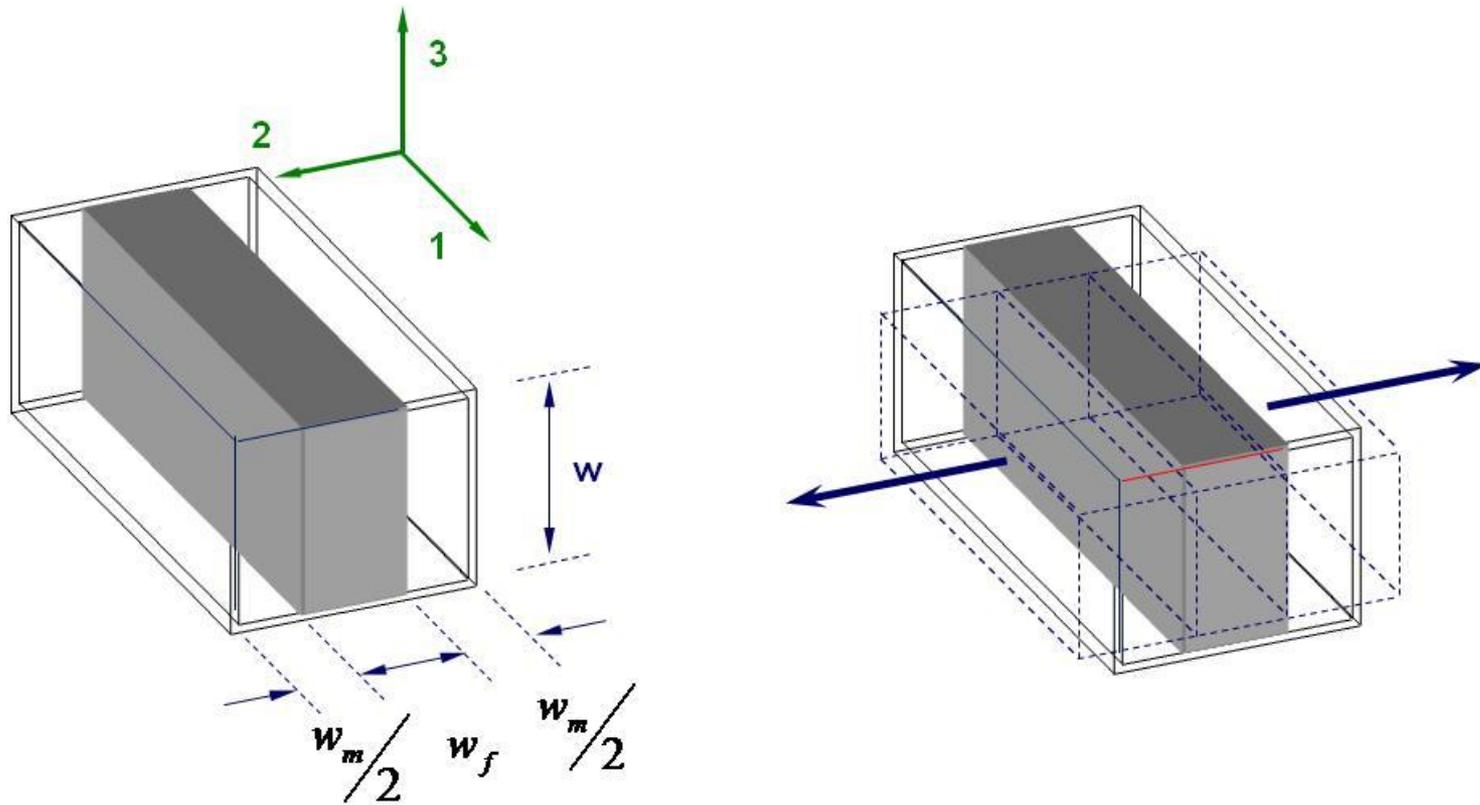
### Rotura por cortadura de las fibras



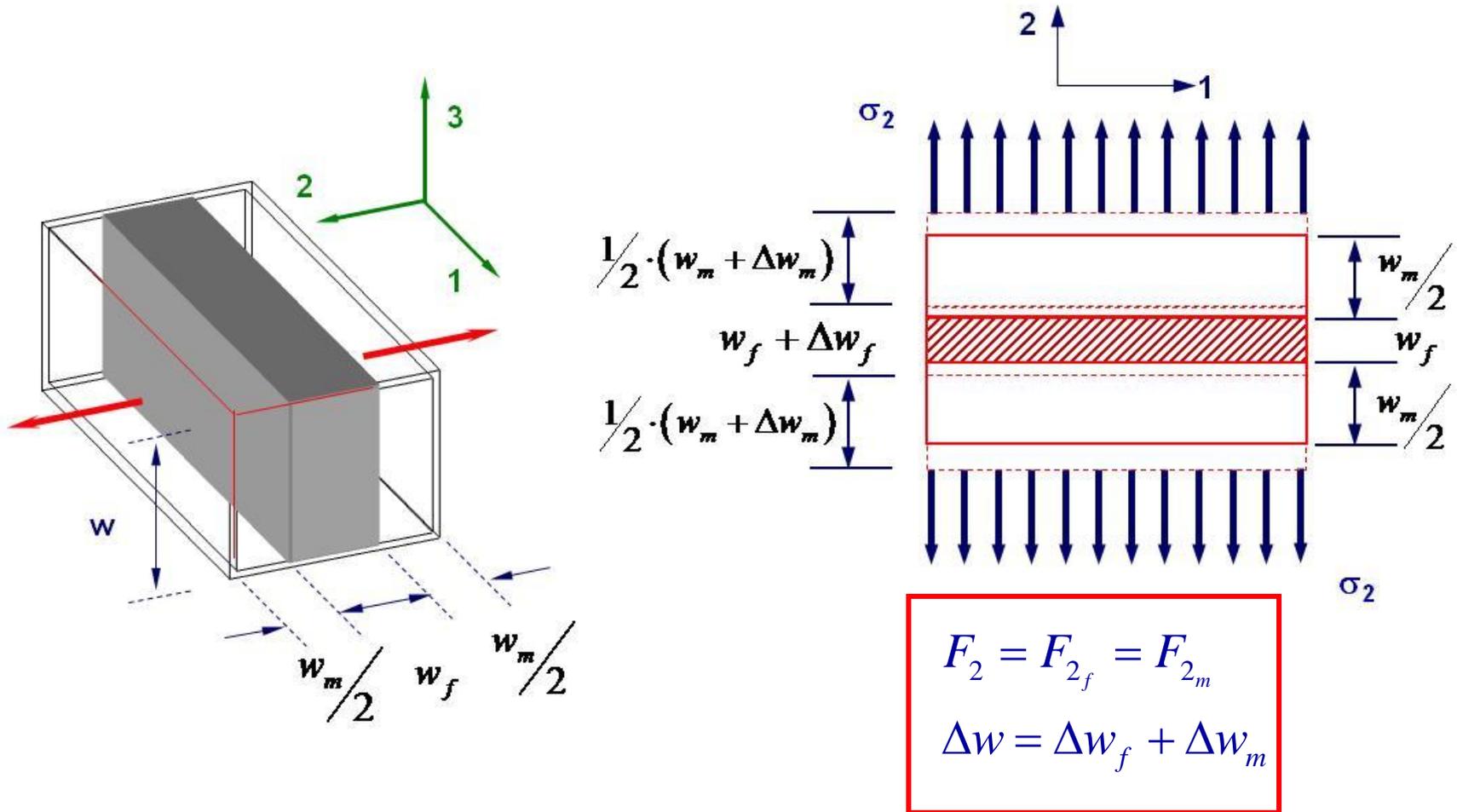
Aparece con cierta frecuencia en láminas con un alto contenido de fibras, está gobernado por el fallo a cortante de las propias fibras

$$X_c = 2 \cdot S_f \cdot \left[ V_f + (1 - V_f) \cdot \frac{E_m}{E_f} \right]$$

## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$



## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$



## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\Delta W}{W} & \varepsilon_{2_f} &= \frac{\Delta w_f}{w_f} & \varepsilon_{2_m} &= \frac{\Delta w_m}{w_m} \\ \varepsilon_2 \cdot W &= \varepsilon_{2_f} \cdot W_f + \varepsilon_{2_m} \cdot W_m \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2_f} \cdot \frac{W_f}{W} + \varepsilon_{2_m} \cdot \frac{W_m}{W} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2_f} \cdot V_f + \varepsilon_{2_m} \cdot V_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} & \varepsilon_{2_f} &= \frac{\sigma_2}{E_{2_f}} & \varepsilon_{2_m} &= \frac{\sigma_2}{E_{2_m}} \\ \sigma_2 &= E_2 \cdot \varepsilon_2 = E_2 \cdot \left( \frac{\sigma_2}{E_f} \cdot V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} \cdot V_m \right)\end{aligned}$$

$$E_2 = E_m \left( \frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f} \right)$$

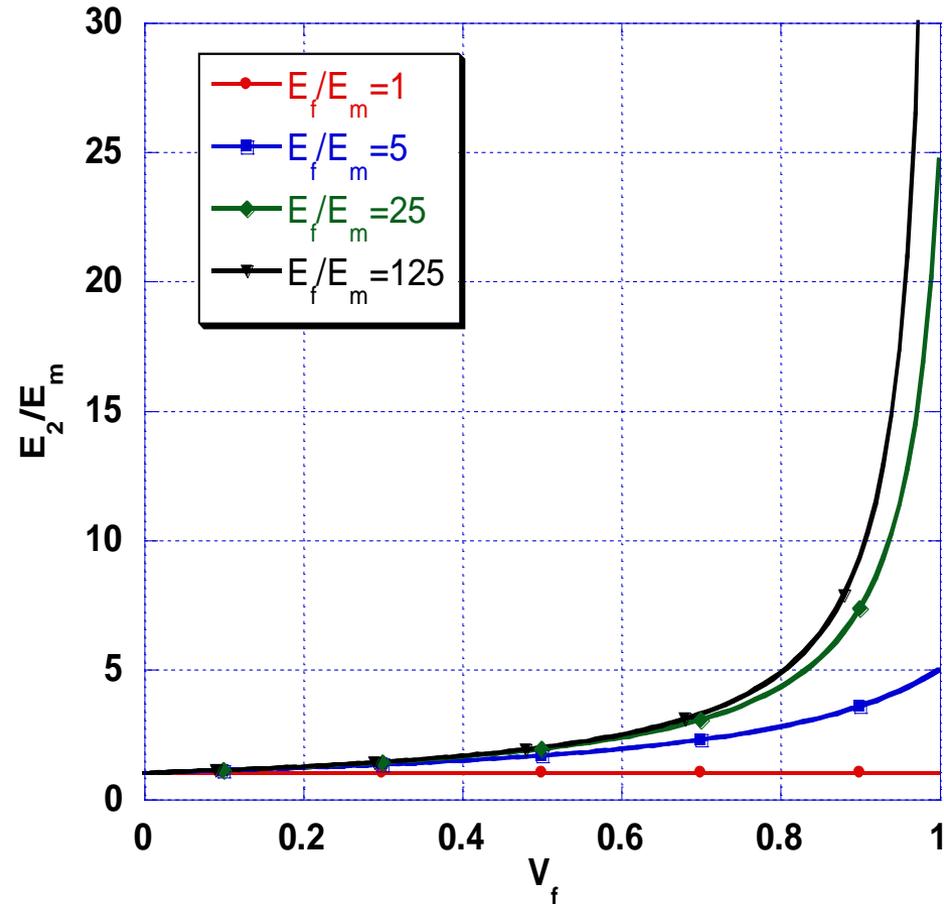
# Comportamiento en dirección transversal a las fibras

## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$

$E_2$  sólo cambia significativamente para contenidos altos de fibra



Puede que no sean físicamente posible



## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$

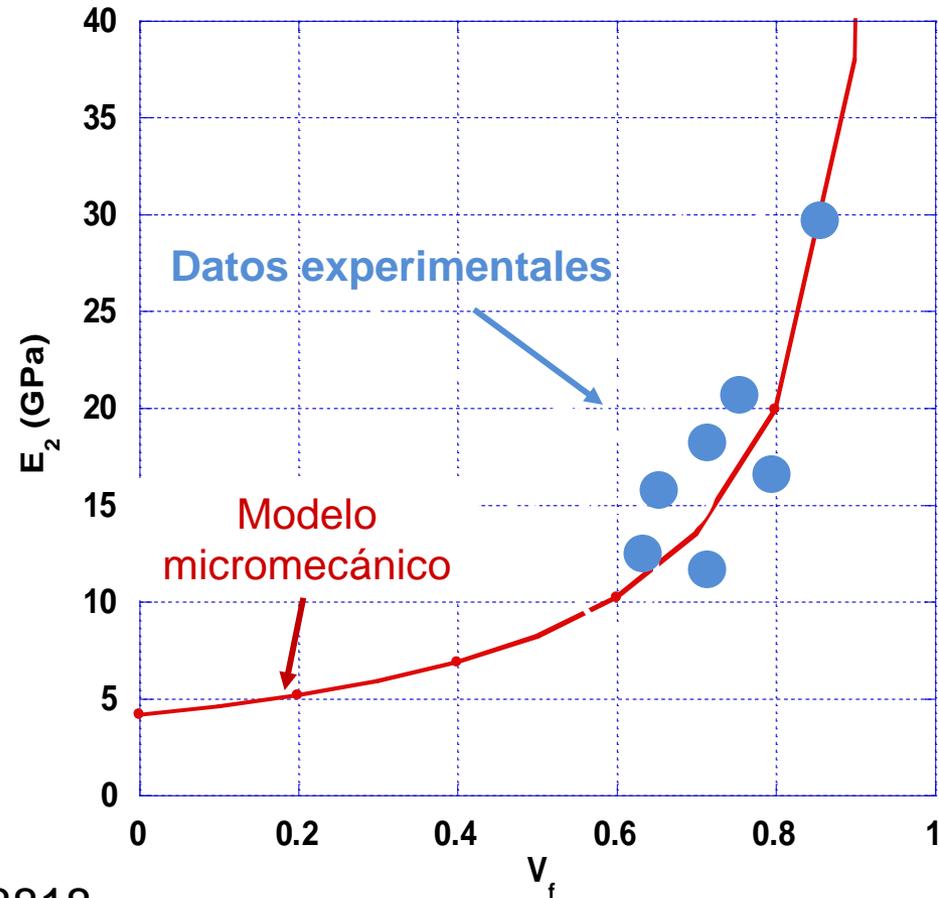
Material boro/epoxi

$E_f = 414$  GPa

$\nu_f = 0,2$

$E_m = 4,14$  GPa

$\nu_m = 0,35$



Z. Hashin, 1970

NASA Technical Report NAS1-8818

## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$

Efecto de la concentración de Poisson

$$E_2 = \frac{E'_m \cdot E_f}{E_f \cdot (1 - V_f) + V_f \cdot E'_m}$$

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}$$

Ecuación de Halpin-Tsai

$$E_2 = E_m \cdot \frac{1 + \xi_1 \cdot \eta_1 \cdot V_f}{1 - \eta_1 \cdot V_f}$$

$$\eta_1 = \frac{E_f - E_m}{E_f + \xi_1 \cdot E_m}$$

$\xi_1$  = Eficiencia del refuerzo

$$1 < \xi_1 < 2$$

# Comportamiento en dirección transversal a las fibras

## Predicción del módulo de elasticidad $E_2$

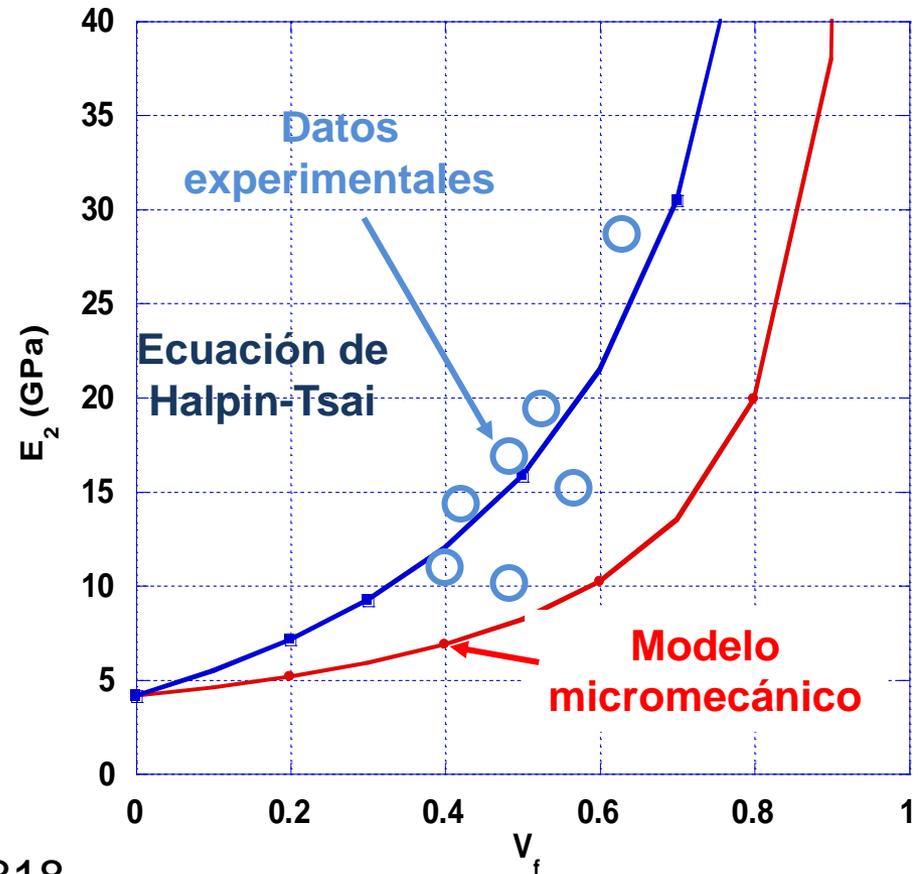
Material boro/epoxi

$E_f = 414$  GPa

$\nu_f = 0,2$

$E_m = 4,14$  GPa

$\nu_m = 0,35$



Z. Hashin, 1970

NASA Technical Report NAS1-8818

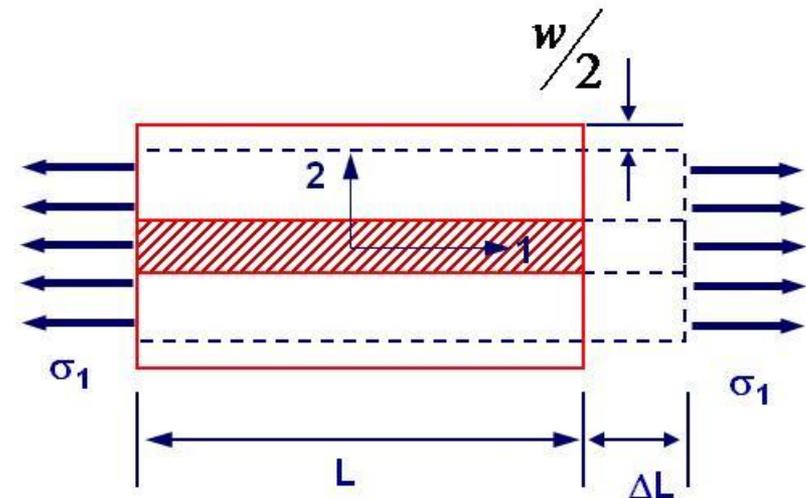
## Predicción del coeficiente de Poisson $\nu_{21}$

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2_f} \cdot V_f + \varepsilon_{2_m} \cdot (1 - V_f)$$

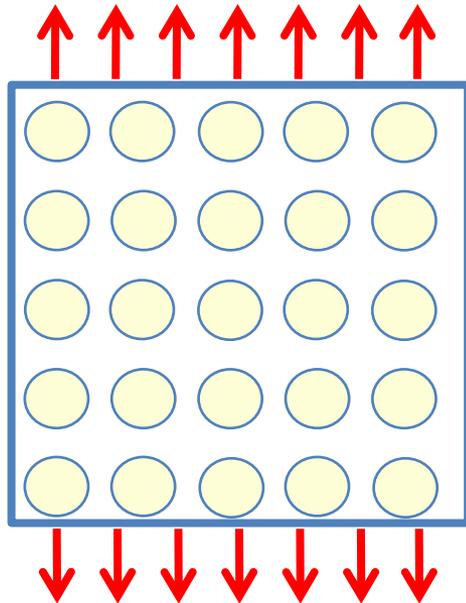
$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_{2_f}}{\varepsilon_1} \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_{2_m}}{\varepsilon_1}$$

$$\nu_{21} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f)$$



## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $Y_t$

Este modo de sollicitación puede ser el más crítico por la baja resistencia a tracción de la resina. Es el primero que aparece

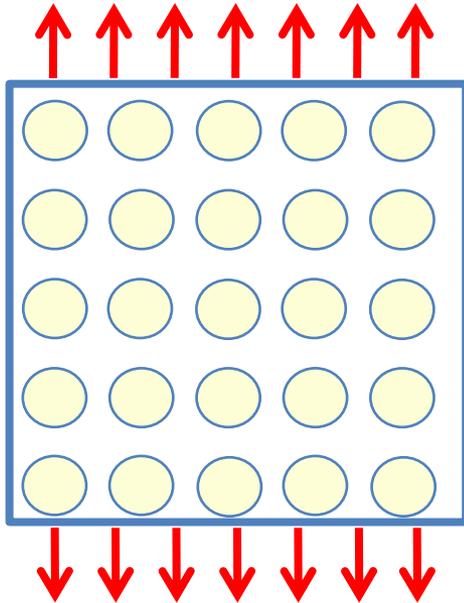


Cuando actúan cargas en el sentido transversal de la lámina, aparece el fenómeno de concentración de tensiones en zonas de la matriz próximas a las fibras (interfase fibra/matriz).



La resistencia mecánica a tracción en dirección transversal es menor que la de la matriz

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $Y_t$



Está gobernada por muchos factores:

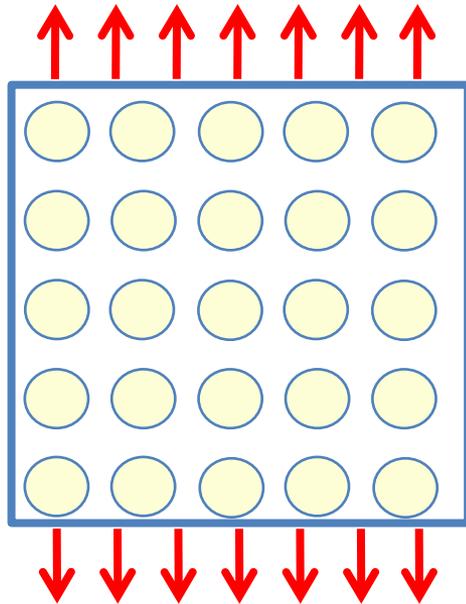
- Propiedades de las fibras y de la matriz
- La resistencia de la entrecara fibra-matriz
- La presencia y distribución de huecos
- Distribución interna de tensiones y deformaciones

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $Y_t$

Si la unión de la entrecara es débil:

(Para una distribución cuadrada de fibras)

$$Y_t = \sigma_m^R \cdot \left[ 1 - 2 \cdot \left( \frac{V_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

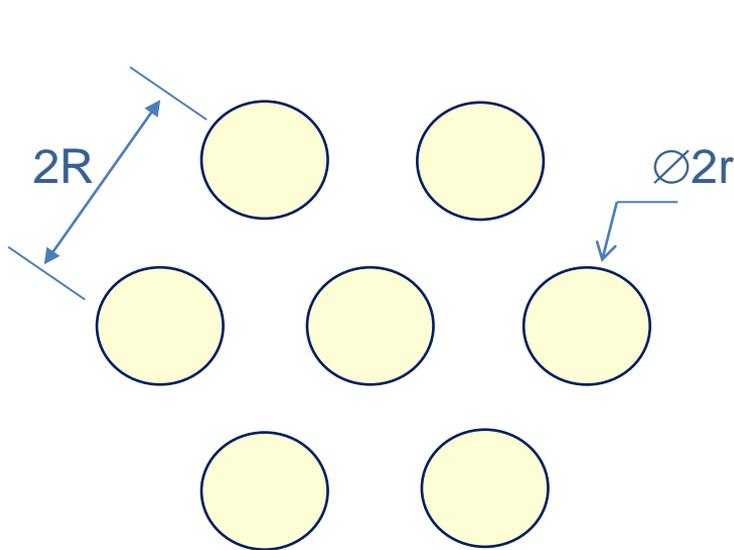


Si la unión de la entrecara es fuerte:

(Kies, 1962)

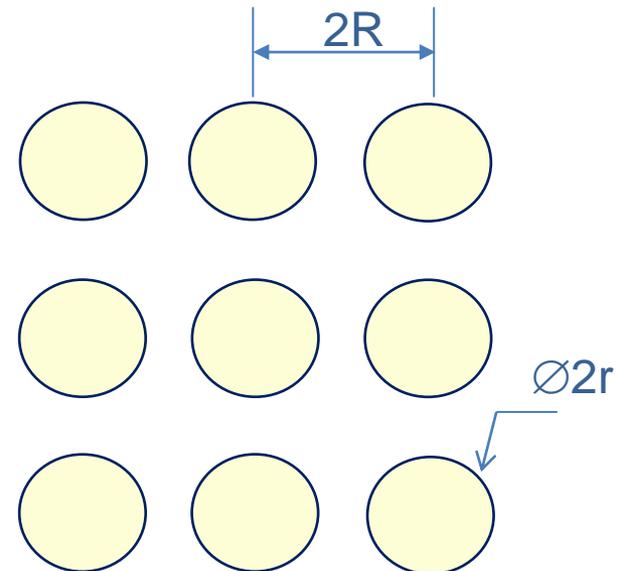
$$Y_t = \frac{E_2 \cdot \sigma_m^R}{E_m \cdot F} \quad F = \frac{1}{\frac{2 \cdot r}{R} \cdot \left( \frac{E_m}{E_{f_2}} - 1 \right) + 1}$$

## Predicción de la resistencia mecánica a tracción $Y_t$



$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{hexagonal})$$

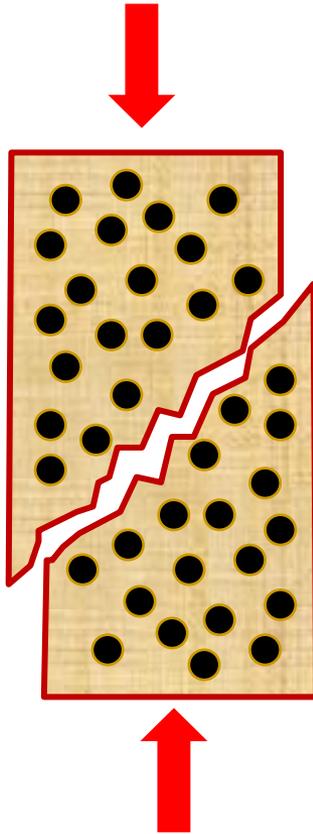
$V_f$  máximo: 91% aprox.



$$V_f = \frac{\pi}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{cuadrado})$$

$V_f$  máximo: 78% aprox.

## Predicción de la resistencia mecánica a compresión $Y_c$



Existen varios mecanismos:

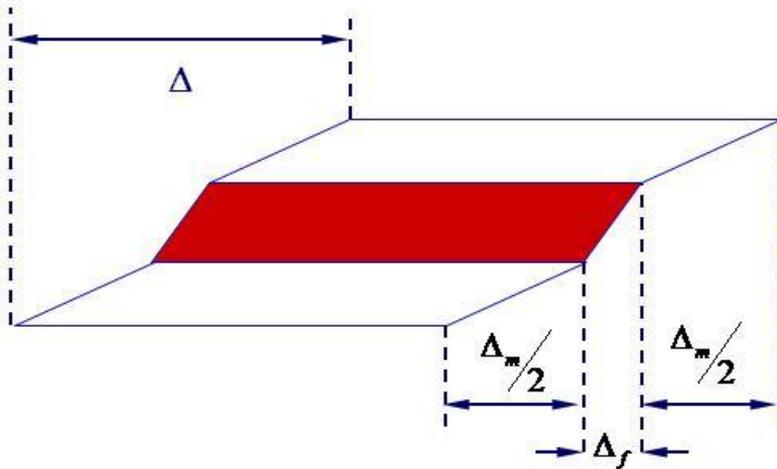
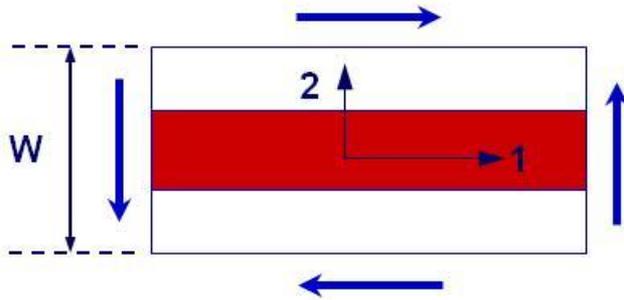
- Fallo por cortadura de la matriz
- Fallo por cortadura de la matriz con despegue fibra-matriz
- Fallo por aplastamiento de las fibras

La rotura se produce por cortadura en un plano paralelo a las fibras en una dirección perpendicular a ellas. El plano forma un ángulo de  $45^\circ$  respecto a la dirección de carga.

$$Y_c = E_2 \cdot \left[ \frac{2 \cdot r}{R} \cdot \frac{E_m}{E_f} + \left( 1 - \frac{2 \cdot r}{R} \right) \right] \cdot \varepsilon_m^R$$

**La resistencia mecánica en compresión es menor que en tracción**

## Predicción del Módulo a cortadura $G_{12}$



$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \\ \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Delta = \gamma \cdot W \\ \Delta = \Delta_m + \Delta_f \end{array}$$

$$\Delta_m = \gamma_m \cdot V_m \cdot W$$

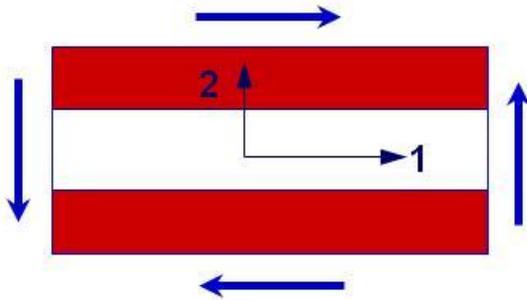
$$\Delta_f = \gamma_f \cdot V_f \cdot W$$

$$\gamma = \gamma_m \cdot V_m + \gamma_f \cdot V_f$$

$$G_{12} = G_m \cdot \left( \frac{1}{V_m + V_f \cdot \frac{G_m}{G_f}} \right)$$

## Predicción del Módulo a cortadura $G_{12}$

Ecuación de Halpin-Tsai



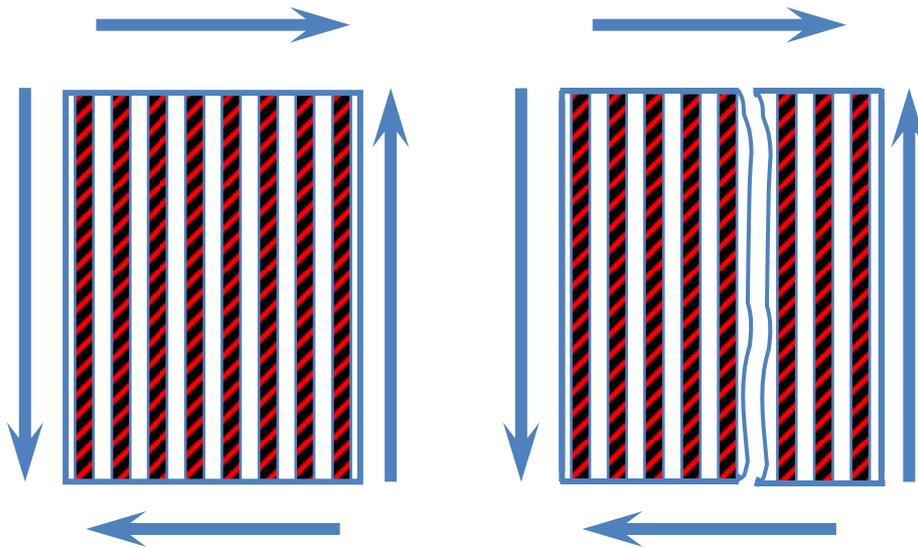
$$G_{12} = E_m \cdot \frac{1 + \xi_1 \cdot \eta_1 \cdot V_f}{1 - \eta_1 \cdot V_f}$$

$$\eta_1 = \frac{G_f - G_m}{G_f + \xi_1 \cdot G_m}$$

$$\xi_1 = 1$$

## Predicción de la resistencia a cortadura plana $S_{12}$

En estas condiciones aparece una gran concentración de tensiones a lo largo de la interfase fibra/matriz. Estas tensiones pueden causar el fallo por cortadura de la matriz y/o el despegue fibra-matriz.



Fallo por cortadura  
(Kies, 1962)

$$S = \frac{G_{12} \cdot \tau_m^R}{G_m \cdot F}$$

$$F = \frac{1}{\frac{2 \cdot r}{R} \cdot \left( \frac{G_m}{G_f} - 1 \right) + 1}$$