

Funciones radicales y trascendentes

- Exponentes enteros y racionales.
- Funciones exponenciales.
- Funciones logarítmicas.
- Propiedades de los logaritmos.
- Ecuaciones exponenciales.
- Crecimiento exponencial.
- El número e . Logaritmo natural.

Problemas

1. Simplifica

$$(a) (6x^{-2})^{-1}, (-2a^{-3})^6, \frac{n^4}{n^7}, \frac{2^{-9}}{2^{-7}2^5}$$

$$(b) (a^{-1} + b^{-1})^{-1}, \left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2} \left(\frac{a}{b^2}\right)^{-3}, \frac{n^4 n^{-4}}{n^{-6}}, \frac{a^{3x+7}b^2 - 2a^{3x+8}b + a^{3x+9}}{a^{3x+7} - a^{3x+5}b^2}$$

2. En las siguientes expresiones, escribe todos los factores como potencias de la misma base

$$\frac{125^{-3}25}{5^{-8}}, \sqrt{\frac{8n^{27}}{4^{-n}}}, \frac{3^7 9^5}{\sqrt{27^{12}}}, \frac{4^9 8^{-4}}{16^3}$$

3. Simplifica

$$\left(\frac{125}{27}\right)^{2/3}, (3^{-2} + 4^{-2})^{-1/2}, (25n^{-5})^{-3/2} \sqrt{n}, \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$$

4. Resuelve

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27^8}, \quad 2(1-4x)^{3/2} = 16, \quad (\sqrt{2})^x = \sqrt[3]{2}, \quad 27^{1-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2-x}$$

5. Factoriza

$$(x-2)^{1/2} - x(x-2)^{-1/2}, \quad (x+1)^{1/2}(x+2)^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}(x+2)^{1/2}$$

6. Resuelve

$$\sqrt[3]{\frac{8x+1}{16x}} = 32, \quad \frac{5x^2}{(5x)^2} = 125$$

7. Representa las funciones $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$ y $y = 3^{|x|}$ en el mismo gráfico.
8. Se considera la función $f(x) = 10^{2x+1}$. Prueba que $f(x+1) - f(x)$ es divisible por 99.
9. Expresa las siguientes ecuaciones en forma exponencial

$$\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}, \quad \log_6 1 = 0, \quad \log_\pi \pi = 1$$

10. Evalúa los siguientes logaritmos

$$\log_4 64, \quad \log_6 6\sqrt{6}, \quad \log_{81} 243, \quad \log_{\sqrt{2}} 4, \quad \log_{10} 0.001$$

11. Resuelve

$$\log_3 |x| = 2, \quad \log_3(x^2 - 7) = 2, \quad \log_{16} \sqrt[3]{100 - x^2} = \frac{1}{2}, \quad \log_7(\log_5(\log_3 |x|)) = 0$$

12. Determina el dominio y la imagen de las funciones $y = \log_2 |x|$ y $y = \log_2(x - 2)$.
13. Expresa el logaritmo en base b , \log_b , de las siguientes expresiones en términos de $\log M$ y $\log N$

$$(MN)^2, \quad \frac{M}{N^2}, \quad \sqrt[3]{\frac{M}{N}}$$

14. Expresa y en términos de x

$$\log y = 2 \log x, \quad \log y + \frac{1}{2} \log x = \log 3$$

15. Si $\log_8 3 = r$ y $\log_8 5 = s$, halla los siguientes logaritmos en términos de r y s

$$\log_8 75, \quad \log_8 255, \quad \log_8 0.12$$

16. La escala de Richter, que es un sistema para medir la intensidad de los terremotos, está dada por la fórmula

$$R = 0.67 \log(0.37E) + 1.46,$$

donde E es la energía total emitida por el terremoto, medida en Kw/h. ¿Cuánta energía emite un terremoto de 7.9 en la escala de Richter? ¿Y uno de 5?

17. Prueba las dos siguientes identidades

$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}, \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

y halla

$$\log_3 4 \cdot \log_4 3, \quad \frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6}.$$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones

$$3^{2x} - 2^x - 6 = 0, \quad 6^{x+1} - 6^{-x} = 5, \quad 4 \log_x 2 + \log_2 x = 5$$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales

$$\sqrt{7-3x} - x = 7, \quad \frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}$$

20. Si el consumo de petróleo anual en el mundo se incrementa un 5% cada año, ¿en cuanto tiempo se doblaría el consumo de petróleo?

21. Una casa comprada por 180.000 euros en 2000 se vendió por 300.000 en 2005. ¿Cuál ha sido la tasa de revalorización anual de la casa?

22. El IPC (Índice de Precios al Consumo) es un índice que mide el coste medio de bienes y servicios. Si el índice es 100 en 1980 (año base) y en 1990 fué de 170, ¿cuál fué la tasa anual de crecimiento de los precios en la década 1980–1990?

23. La población de un país ha pasado de 100 a 200 millones en 60 años. ¿En cuántos años la población pasará de 200 a 300 millones, suponiendo la misma tasa de crecimiento anual?

24. Se han invertido 1.000 euros al 5% anual. ¿Cuál será el valor de la inversión al cabo de 20 años?

25. Simplifica

$$\ln e^x, \quad e^{\ln x}, \quad e^{-\ln x}, \quad e^{\ln \sqrt{x}}$$

26. Resuelve

$$\ln(\ln x) = 0, \quad \ln |\ln x| = 0, \quad \ln x + \ln(x+3) = \ln 10, \quad (\ln x)^2 - 6 \ln x + 9 = 0$$

27. Expresa $\ln \frac{5}{e^2}$ en términos del logaritmo decimal.

28. Puede probarse que e es el límite de la suma de la serie infinita

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Aproxima e usando los 5 primeros términos de esta serie.