Juan Pablo Rincón Zapatero
Francisco Marhuenda Hurtado

Derivación

- La **derivada** o **función derivada** de una función real de variable real, $y = f(x)$. Notación: $\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$ o $\frac{d}{dx}[f(x)]$.
- Derivadas de las funciones elementales.
- Operaciones con funciones derivables:

  Derivada de una suma de funciones, Derivada del producto de una función por una constante y del producto de dos funciones. Derivada de la división de dos funciones.
- Derivadas de orden superior.
- La Regla de la Cadena y derivación logarítmica.($y = [f(x)]^{g(x)}$).
- Aplicaciones de las derivadas:

  Pendiente, recta tangente y normal, tasas de variación y diferenciales.
- Derivadas de funciones a trozos.
- Colección de ejercicios para que realicen los alumnos en clase.

Juan Pablo Rincón Zapatero
Francisco Marhuenda Hurtado

Ejercicios

1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x^3 + \cos x - \ln x + 4$ b) $f(x) = x^4 - 2x + \frac{1}{x^2}$
   c) $f(x) = \frac{sen x}{x^2}$ d) $f(x) = xe^x$

2. Derivar con respecto de x:
   a) $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$
   c) $y = (2x-1)(3x+2)$ d) $y = \frac{(2x-3)}{\sqrt[4]{x}}$

3. Derivar con respecto de x:
   a) $y = x^{-\frac{3}{2}}$ b) $y = 2x(x+1) + 2$
   c) $y = x^{\frac{1}{2}}(x+1)$ d) $y = \frac{3x^4 - x}{x^3}$

4. Dada la función $y = \frac{x^2-1}{2x^2+1}$, calcular $\frac{dy}{dx}$ y el conjunto de valores de x para los cuales $\frac{dy}{dx}$ es positivo. Encontrar el valor máximo y mínimo de y para $0 \leq x \leq 1$.

5. Calcular la derivada de la función $g(x) = xe^x \cos x$.

6. Dada la función $y = x^6 + 4x^2 - \frac{3}{x}$, calcular $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$.

7. Dada la función $y = \frac{sen x - \cos x}{sen x + \cos x}$, comprobar que $y' = 1 + y^2$. Demostrar que y'' es igual a cero solo cuando $y = 0$.

8. Comprobar que no existe ningún valor de x que anule a la primera derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)}$, y que para $x = 0$ se anula la derivada segunda.

9. Derivar con respecto de x las siguientes funciones:
   a) $y = (3x^4 - 5)^7$ b) $y = x^7 sen 3x$
   c) $y = (2x^2 - 1)(x^3 + 4)^3$ d) $y = \frac{\ln(5x)}{x^2}$
   e) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $y = \arccos(x^2 + 1)$
   g) $y = \arctan 3x^2$ h) $y = sen(sen(sen 2x))$

10. Derivar las siguientes funciones con respecto de x:
    a) $f(x) = x^{2x}$ b) $f(x) = x^{e^x}$ c) $f(x) = (sen x)^{sen x}$

11. Suponiendo que a, b, y c son constantes calcular las siguientes derivadas con respecto de x:
    a) $y = \ln(ax^2 + 3 + c)$ b) $y = ce^{ax^3} + bx^2$
    c) $y = x^a(bx + c)$ d) $y = \frac{a}{x^3}$

Juan Pablo Rincón Zapatero
Francisco Marhuenda Hurtado

12. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $y = 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ en el punto $P(1, 3)$.

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + x + 1$ cuando $x = 2$.

14. Hallar el punto de la curva de la función $f(x) = x^2 - 5x + 3$ en el cual la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

15. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y calcular su derivada en los puntos en que sean derivables:

    a) $f(x) = \begin{cases} sen x, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

    c) $h(x) = |x^2 - 1|$

16. Un cubo tiene de lado 12 cm. Hallar el incremento de volumen que experimenta al aumentar el lado a) 1 cm y b) 0.5 cm y comparar con los resultados obtenidos cuando usamos diferenciales.

17. El radio de un círculo crece 2 centímetros por minuto. Hallar la razón de cambio del área cuando a) $r = 6$ cm y b) $r = 24$ cm.

18. El volumen de una esfera viene dado por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si inflamos un globo esférico tal que su radio aumenta a razón de 1 cm por segundo. Calcular la rapidez con que aumenta el volumen del globo cuando el radio es 5 cm.

Juan Pablo Rincón Zapatero
Francisco Marhuenda Hurtado

Ejercicios para clase

1. Deriva las siguientes funciones con respecto de x:

   a) $y = 4x^3 - 3x^2 + \frac{5}{x^2}$ b) $y = (2x^3 - 1)senx$
   c) $y = \frac{7x-4}{\ln x}$ d) $y = e^x senx$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones con respecto de x:

   a) $y = x^3 \ln x$ b) $y = \frac{1+\cos x}{x}$
   c) $y = \frac{x^3}{1+\sec x}$ d) $y = x^5 \ln x + \cos x$

3. Demuestra que $\frac{d}{dx}(\tan x - x) = \tan^2 x$.

4. Dada $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, demuestra que $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$.

5. Dada la función $f(x) = x^4 - x^3 + 4x - 1$, calcula $f''(x)$ y el conjunto de valores de x donde la derivada segunda vale cero.

6. Deriva con respecto de x las siguientes funciones:

   a) $y = (x^2 + 1)^3$ b) $y = \tan^4 2x$
   c) $y = x(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ d) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1}$
   e) $y = \ln \tan x$ f) $y = arcsenx^{\frac{1}{2}}$

7. Deriva las siguientes funciones con respecto de x:

   a) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ b) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ c) $f(x) = (3x+1)^{2x+3}$

8. Suponiendo que a, b, y c son constantes calula las siguientes derivadas con respecto de x:

   a) $y = e^{a-bx^2}$ b) $y = (ax^3 + c) \ln bx$
   c) $y = \ln asenx$ d) $y = c\cos^2(\pi x)$

9. Calcula los puntos de la curva $y = \frac{x^2-1}{x}$ cuya pendiente m vale 5.

10. Calcula el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la curva $y = 3x^3 - x$ para $x = \frac{1}{3}$.

11. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones y calcula su derivada en los puntos en que sean derivables:

    a) $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $h(x) = |x-3|$

12. Todas las aristas de un cubo están creciendo 3 cm/s. ¿Con qué rapidez cambia el volumen cuando cada arista tiene a) 1 cm y b) 10 cm.