ANÁLISIS ESTÁTICO

Análisis Estático de Sistemas Realimentados.

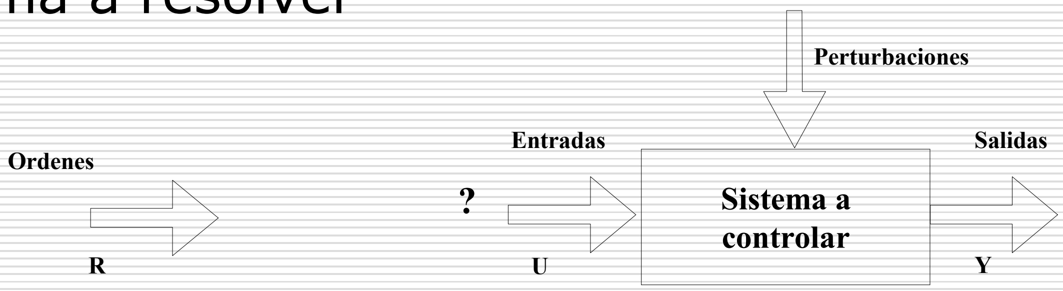
- Concepto de realimentación.
- Concepto de error en régimen permanente.
- Señales de entrada y tipo de un sistema.
- Cálculo de errores en sistemas con realimentación unitaria.
- Relación entre error y tipo de sistema.
- Cálculo de errores en sistemas con realimentación no unitaria.
- Errores ante perturbaciones.

Bibliografía

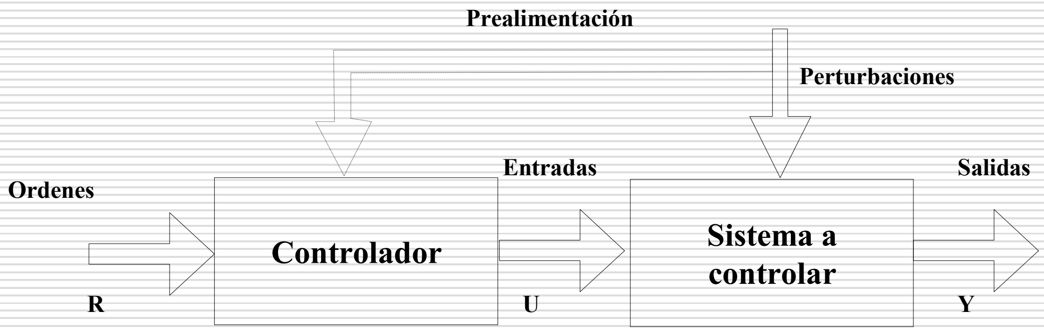
- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 5
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 7
- F. Matía y A. Jiménez, "Teoría de Sistemas", Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 6

BUCLE DE CONTROL

- Problema a resolver

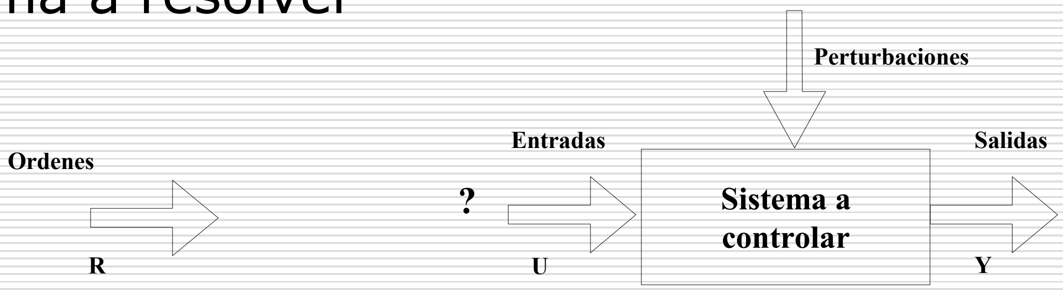


- Control en bucle abierto

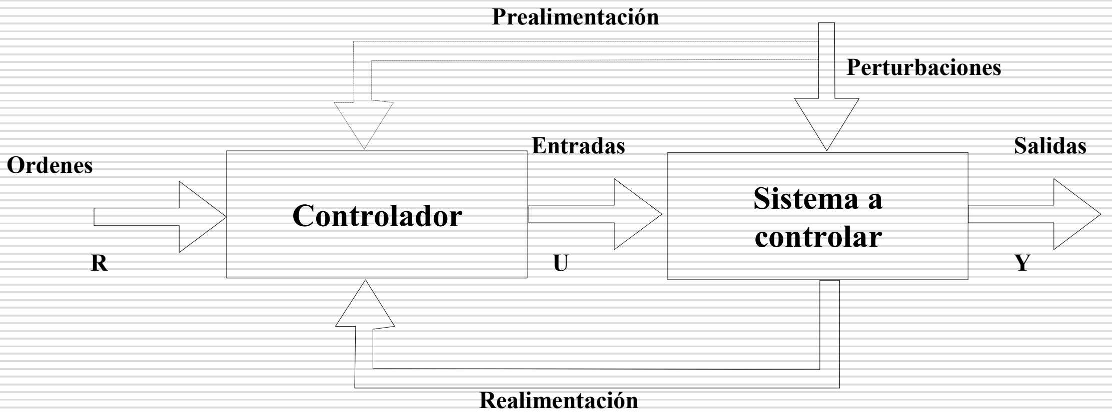


BUCLE DE CONTROL

- Problema a resolver



- Control en bucle cerrado. Realimentación

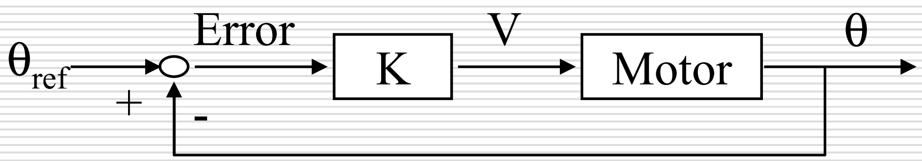


COMPORTAMIENTO EN RÉGIMEN PERMANENTE DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

COMPORTAMIENTO PERMANENTE

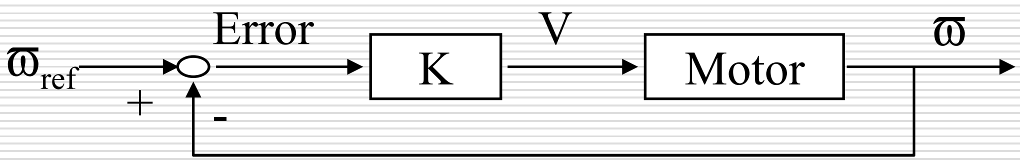
- Control de la posición del eje de un motor de CC



- Al variar la señal de referencia:
  - Varía la salida del sumador (error)
  - Se da tensión al motor
  - El motor gira
  - Cuando coincide la posición con la referencia, el error es nulo
  - El motor no recibe tensión
  - (posibles oscilaciones)
  - El motor se para en la posición indicada
- En régimen permanente la salida del sistema coincide con la señal de referencia

COMPORTAMIENTO PERMANENTE

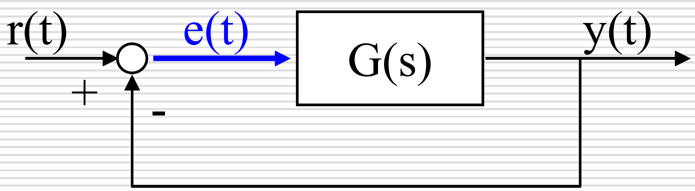
- Control de la velocidad de un motor de CC



- Al variar la señal de referencia:
  - Varía la salida del sumador (error)
  - Se da tensión al motor
  - El motor gira
  - Cuando coincide la velocidad con la referencia, el error es nulo
  - El motor no recibe tensión
  - El motor se frena
  - Varía la salida del sumador
  - ...
  - El sistema se estabilizará a una velocidad distinta de la de referencia (si fuera igual se pararía)
- En régimen permanente la salida del sistema no coincide con la señal de referencia

CONCEPTO DE ERROR EN RÉGIMEN PERMANENTE

- Desde el punto de vista de diseño:



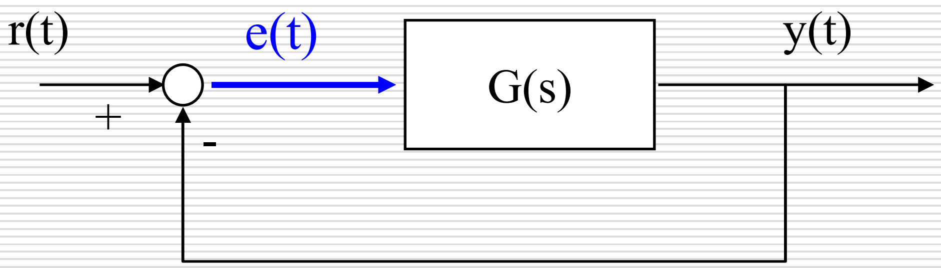
lo que interesa es que la salida sigua a la entrada, es decir, que la salida siga a la entrada.

- Error: es la diferencia entre la señal de salida y la señal de entrada en el régimen permanente, adaptadas en unidades y escala.

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\boxed{e_{rp} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s(E(s) = R(s) - Y(s))}$$

ERROR DE UN SISTEMA CON REALIMENTACIÓN UNITARIA



$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{rp} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

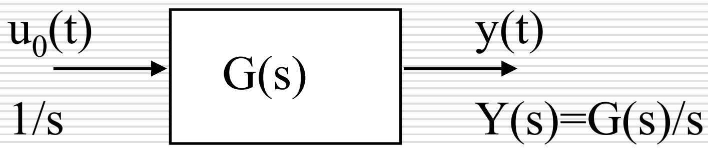
$$\boxed{e_{rp} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)}}$$

GANANCIA DE POSICIÓN (ESTÁTICA)

- Ganancia de posición (estática)

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

  - Solo en sistemas estables
  - Interpretación: es el valor en el que se estabiliza el sistema cuando la entrada es un escalón unitario.



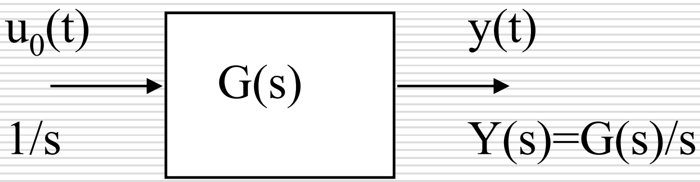
$$K_p = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

GANANCIA DE VELOCIDAD

- Ganancia de velocidad

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

- Interpretación: es el valor en el que se estabiliza el sistema cuando la entrada es una rampa unitaria.



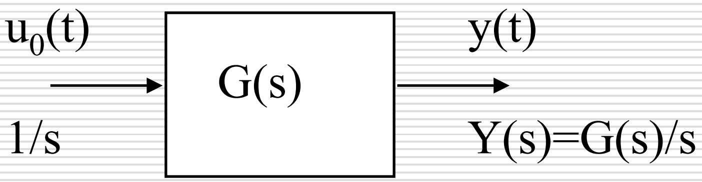
$$K_v = \lim_{t \to \infty} y'(t) = \lim_{s \to 0} ss\frac{G(s)}{s} = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

GANANCIA DE ACELERACIÓN

- Ganancia de aceleración

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

- Interpretación: es el valor en el que se estabiliza el sistema cuando la entrada es una parábola unitaria



$$K_a = \lim_{t \to \infty} y''(t) = \lim_{s \to 0} s s^2 \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

TIPO DE UN SISTEMA

- Se denomina tipo de un sistema al número de integradores de dicho sistema (polos en el origen).
  - Ejemplos

$$G(s) = \frac{3}{s+2} \quad \text{Tipo 0} \quad \text{(orden 1)}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+3)} \quad \text{Tipo 1} \quad \text{(orden 2)}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2(s+2)(s+1)} \quad \text{Tipo 2} \quad \text{(orden 4)}$$

$$G(s) = \frac{5}{s^3} \quad \text{Tipo 3} \quad \text{(orden 3)}$$

RELACIÓN ENTRE GANANCIAS Y TIPO DEL SISTEMA

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \begin{cases} K_p & \text{Tipo } 0 \\ \infty & \text{Tipo} > 0 \end{cases}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \begin{cases} 0 & \text{Tipo } 0 \\ K_v & \text{Tipo } 1 \\ \infty & \text{Tipo} > 1 \end{cases}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \begin{cases} 0 & \text{Tipo} < 2 \\ K_a & \text{Tipo } 2 \\ \infty & \text{Tipo} > 2 \end{cases}$$

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	Tipo > 2
K_P	K_p	∞	∞	∞
K_v	0	K_v	∞	∞
K_a	0	0	K_a	∞

RELACIÓN ENTRE GANANCIAS Y TIPO DEL SISTEMA

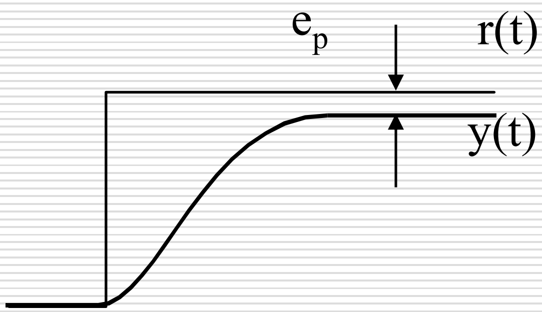
$$K_p = y(\infty)$$
$$K_v = y'(\infty) = 0$$
$$K_a = y''(\infty) = 0$$

$$K_p = y(\infty) = \infty$$
$$K_v = y'(\infty)$$
$$K_a = y''(\infty) = 0$$

$$K_p = y(\infty) = \infty$$
$$K_v = y'(\infty) = \infty$$
$$K_a = y''(\infty)$$

ERRORES ANTE ENTRADAS NORMALIZADAS

- Entrada escalón



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

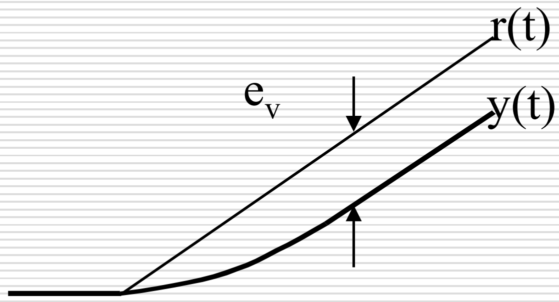
$$e_{rp} = e_p = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

$$e_p = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$\boxed{e_p = \frac{1}{1 + K_p}}$$

ERRORES ANTE ENTRADAS NORMALIZADAS

- ## Entrada rampa



$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{rp} = e_v = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

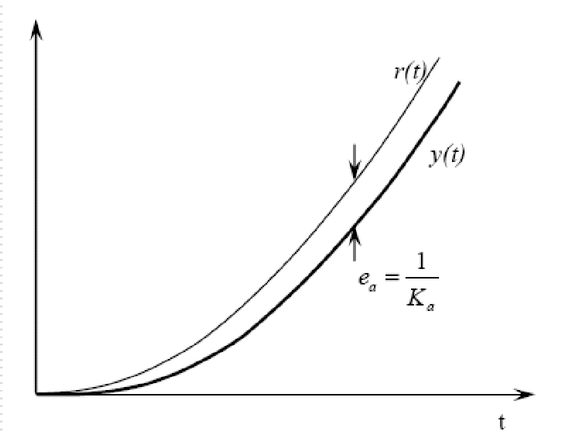
$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$\boxed{e_v = \frac{1}{K_v}}$$

ERRORES ANTE ENTRADAS NORMALIZADAS

- Entrada parábola

$R(s)=\frac{1}{s^3}$



$$\left(r(t)=\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^3} \right)$$

$$e_{rp}=e_a=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$e_a=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)}=\frac{1}{K_a}$$

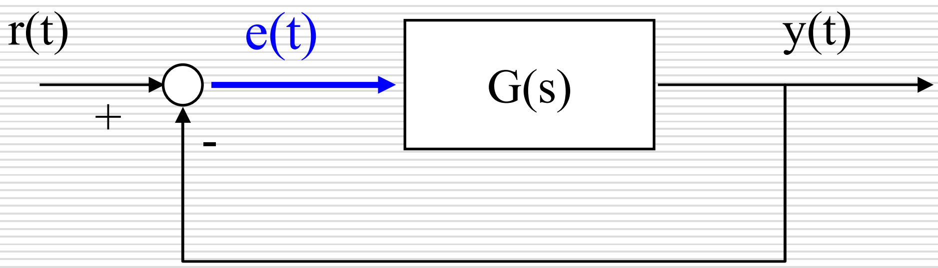
$$\boxed{e_a=\frac{1}{K_a}}$$

RELACIÓN ENTRE ERRORES Y TIPO DEL SISTEMA

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	Tipo > 2
k_P	k_p	∞	∞	∞
k_v	0	k_v	∞	∞
K_a	0	0	k_a	∞

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	Tipo > 2
e_P	$\frac{1}{1+k_p}$	0	0	0
e_v	∞	$\frac{1}{k_v}$	0	0
e_a	∞	∞	$\frac{1}{k_a}$	0

ERRORES PARA ENTRADAS POLINÓMICAS EN t

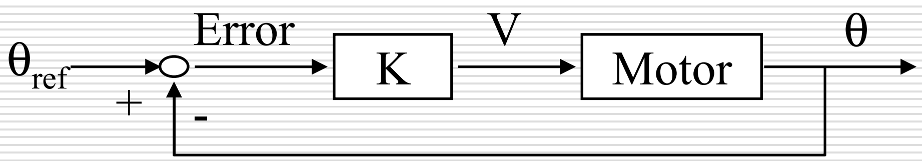


$$r(t) = 1 + 3t + 5t^2$$

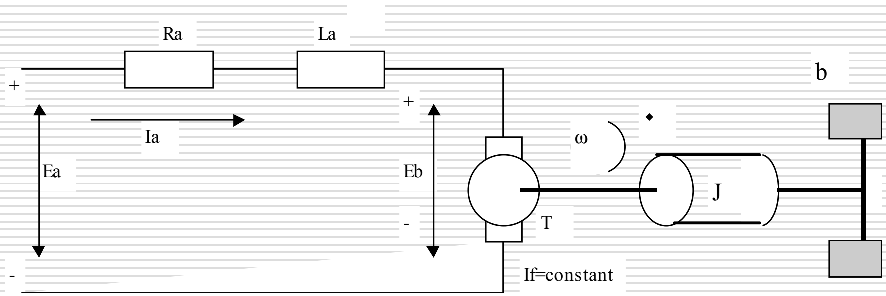
$$e_{rp} = e_p + 3e_v + 10e_a = \frac{1}{1+k_p} + \frac{3}{k_v} + \frac{10}{k_a}$$

ERRORES EJEMPLO

- Control de la VELOCIDAD del eje de un motor de CC



- En régimen permanente la salida del sistema no coincide con la señal de referencia



$$E_a = L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a + E_b$$

$$E_b = K_E \omega$$

$$T = K_T I_a$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_F + T_L$$

$$\frac{\omega(S)}{E_a(S)} = \frac{K_T}{(SL_a + R_a)(SJ + b) + K_T K_E}$$

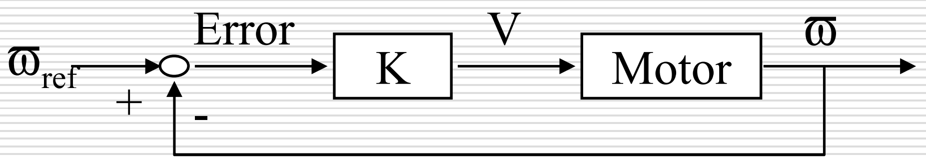
$$\frac{\omega(S)}{E_a(S)} = \frac{1/K_E}{(ST_M + 1)(ST_E + 1)}$$

$T_M > 10\ T_E$

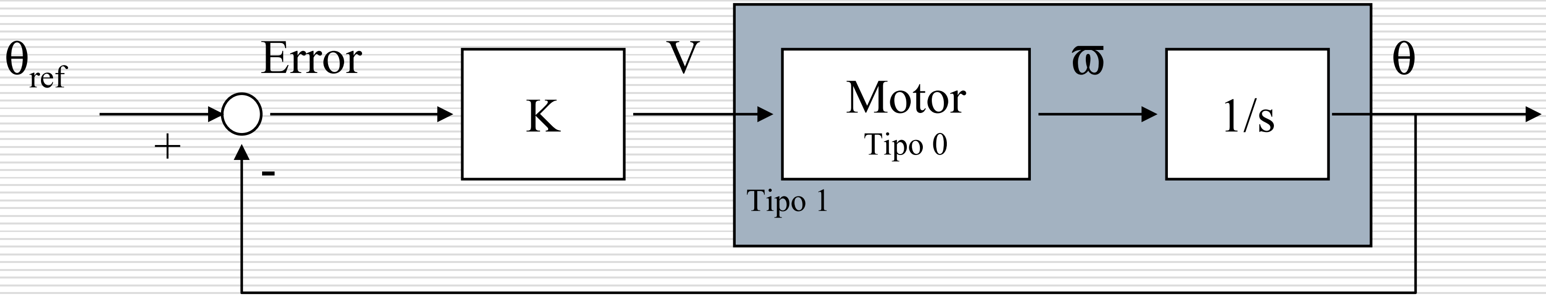
$$\frac{\omega(S)}{E_a(S)} = \frac{K}{(ST_M + 1)}$$

JUSTIFICACIÓN

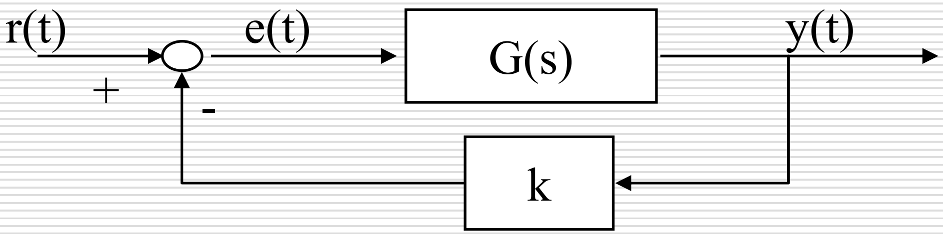
- Tomando como salida la velocidad, un motor de CC es un sistema de tipo 0, por lo que $e_p \neq 0$



Tomando como salida la posición, un motor de CC es un sistema de tipo 1, por lo que $e_p = 0$

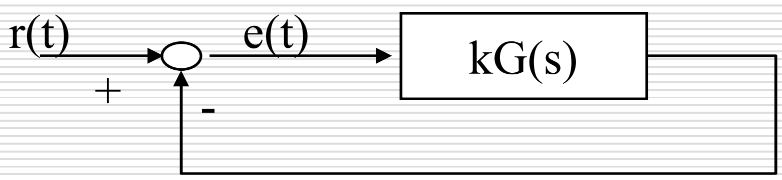


ERRORES EN SISTEMAS CON REALIMENTACIÓN CONSTANTE

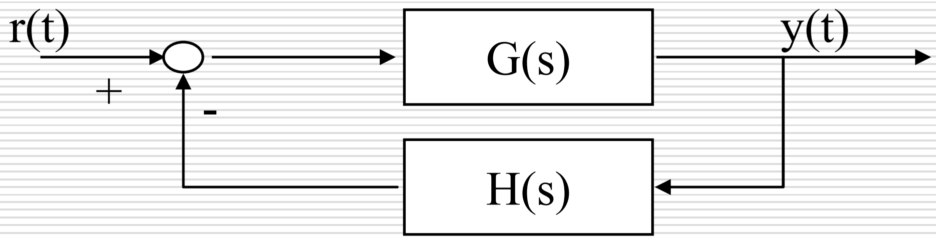


No tiene sentido definir como error $e = r - y$ (distinta escala)

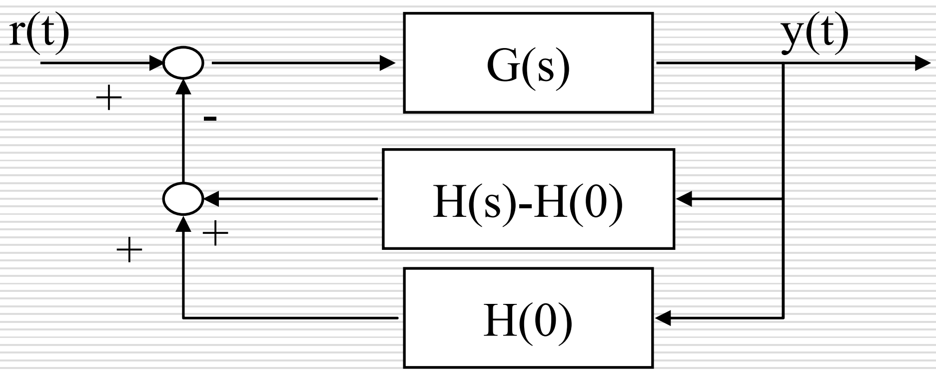
- Se define como error $e = r - ky$
- Se suele indicar como error relativo $e_r = \dfrac{r - ky}{r}$
- Se aplica todo lo indicado para sistemas realimentados unitariamente, tomando como función de transferencia en bucle abierto *kG(s)*



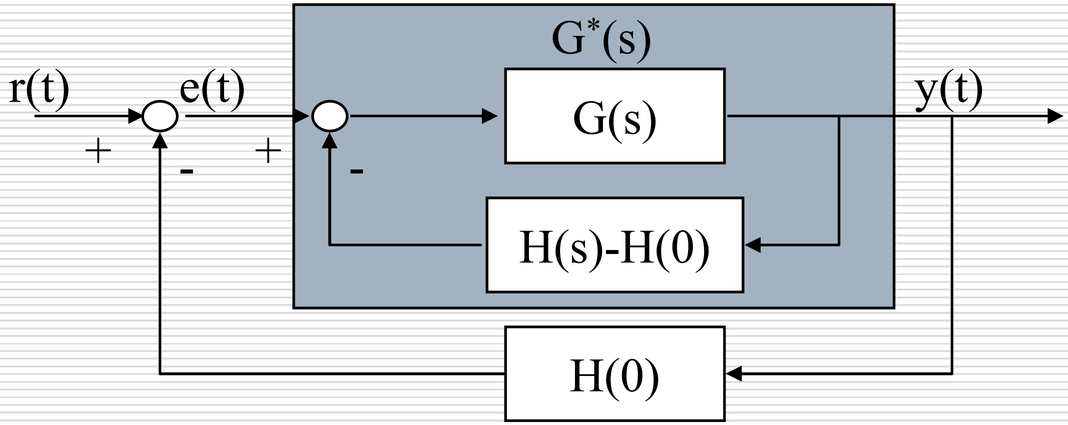
ERRORES EN SISTEMAS CON REALIMENTACIÓN NO CONSTANTE



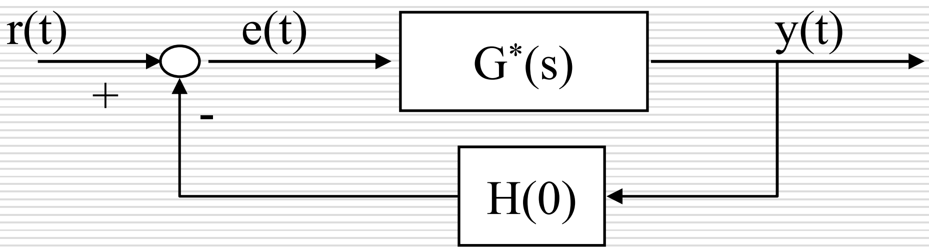
Buscamos un sistema equivalente con realimentación constante H(0)



ERRORES EN SISTEMAS CON REALIMENTACIÓN NO CONSTANTE



$$G^*(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-H(0)]}$$

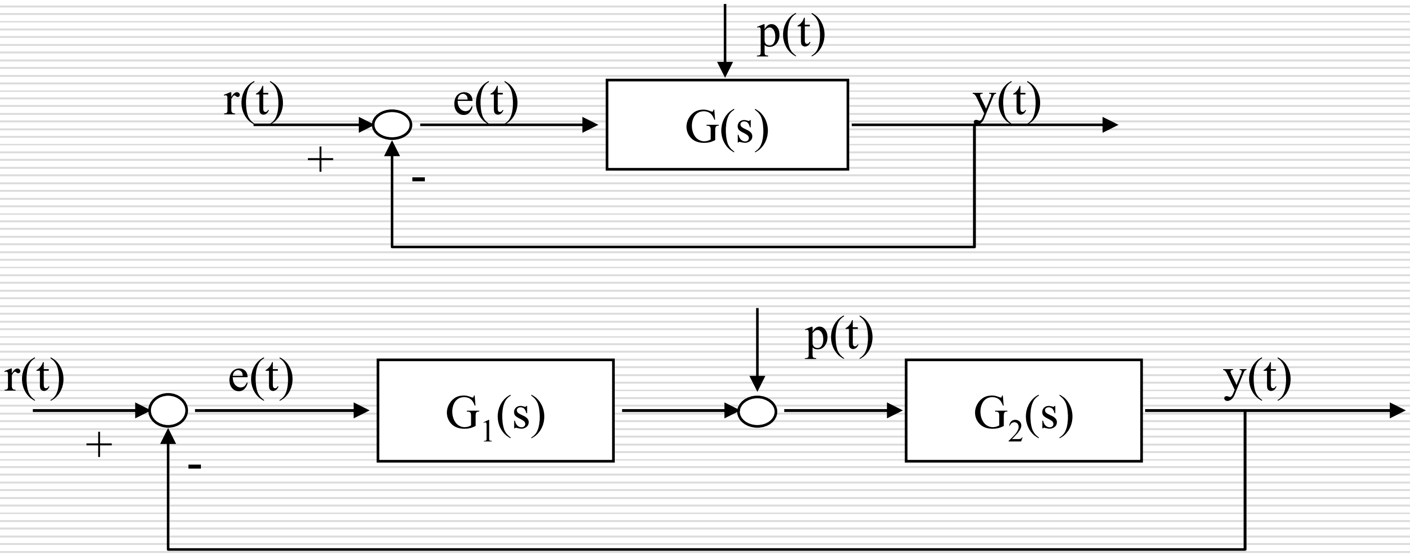


$$K_p = H(0)\cdot \lim_{s\to 0} G^*(s)$$

$$K_v = H(0)\cdot \lim_{s\to 0} s\cdot G^*(s)$$

$$K_a = H(0)\cdot \lim_{s\to 0} s^2 G^*(s)$$

SENSIBILIDAD ANTE PERTURBACIONES

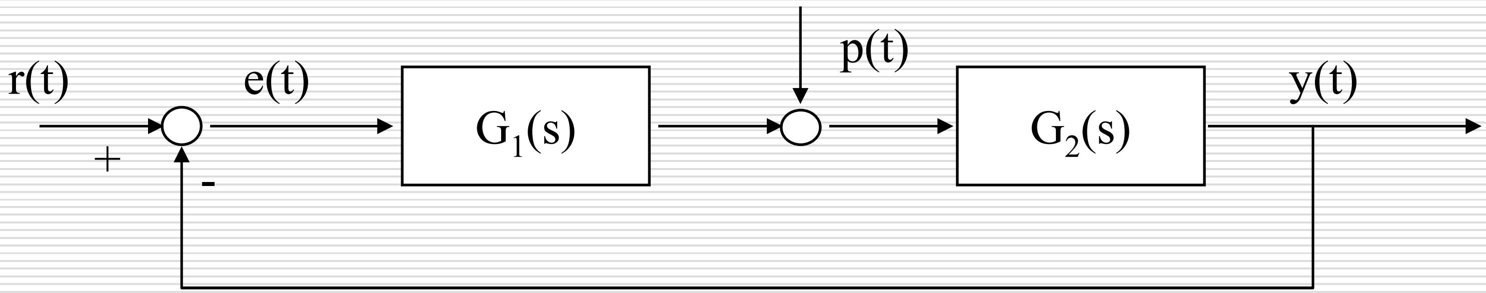


- La respuesta del sistema es:

$$Y(s) = M_R(s)R(s) + M_P(s)P(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}P(s)$$

SENSIBILIDAD ANTE PERTURBACIONES



- Si el sistema contiene integradores, su comportamiento ante perturbaciones dependerá de que los integradores estén antes o después de la perturbación
- El error debido a la perturbación se calcula (R(s)=0):

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$(R(s) = 0)$$

$$E_P(s) = -H(s)M_P(s)P(s) = \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}P(s)$$