TRANSFORMADAS

OBJETIVOS

- *Revisión de las herramientas matemáticas que se utilizan para la obtención del modelo matemático en forma de función de transferencia.*
- *Revisión de la Transformada de Laplace y sus propiedades.*
- *Aplicar la transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales.*

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

Objetivos

- Estudiar los problemas de convergencia de la transformada de Fourier.
- Estudiar la Transformada de Laplace, y su relación con la transformada de Fourier, comentando sus ventajas y problemas.
- Propiedades de dicha transformada y su utilidad.

TRANSFORMADAS

Introducción al concepto matemático de transformada. Transformada de Laplace

1. Formas de representar una señal.
2. Transformadas.
3. Transformada de Laplace.
4. Propiedades de la T. de Laplace.
5. Utilidad de la T. de Laplace.
6. Tabla de transformadas de Laplace.

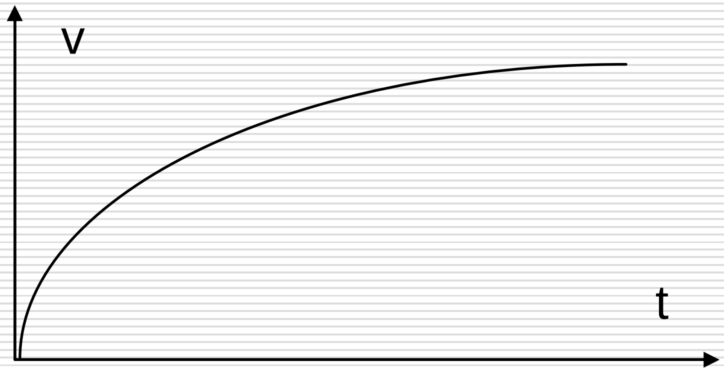
Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 2
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 2
- F. Matía y A. Jiménez, “Teoría de Sistemas”, Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 2

FORMAS DE REPRESENTAR SEÑALES

Una señal puede representarse de varias maneras

- Como función del tiempo
  - Ejemplo: Velocidad de un coche al arrancar



Aparentemente es la representación más natural

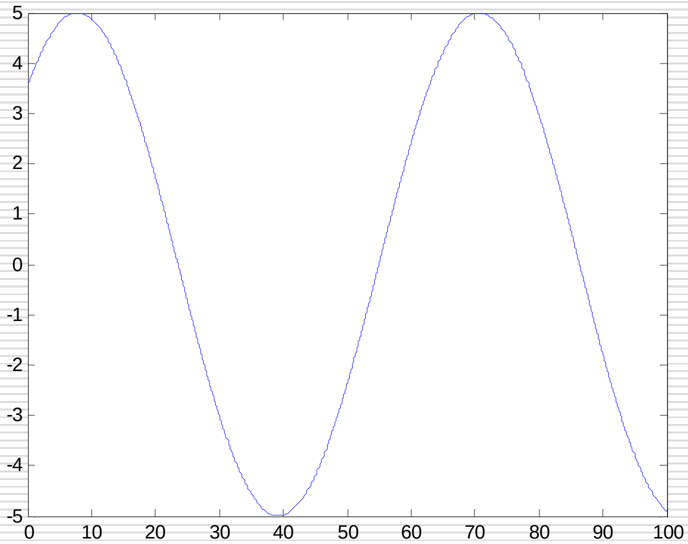
FORMAS DE REPRESENTAR SEÑALES

- Como función de la frecuencia
  - Ejemplo: Sonido

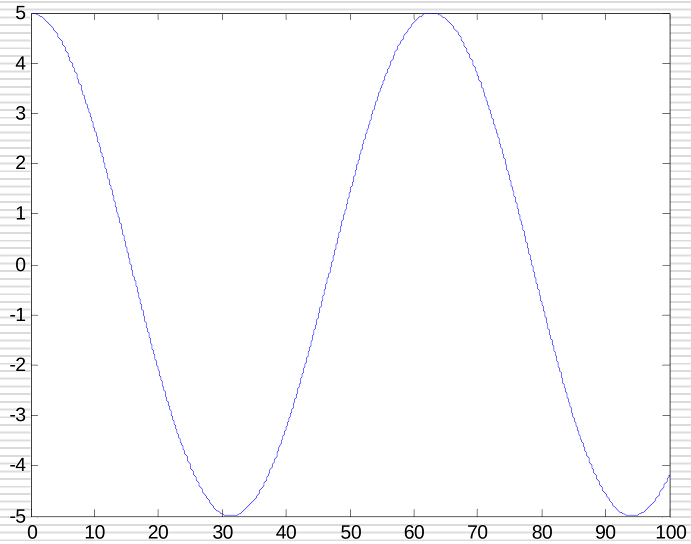
- Harían falta dos gráficas (ej. amplitud & fase)

FORMAS DE REPRESENTAR SEÑALES

$$y(t) = 5 \cdot \sin(0.1t + \pi / 4)$$



$$y(t) = 5 \cdot \sin(0.1t + \pi / 2)$$

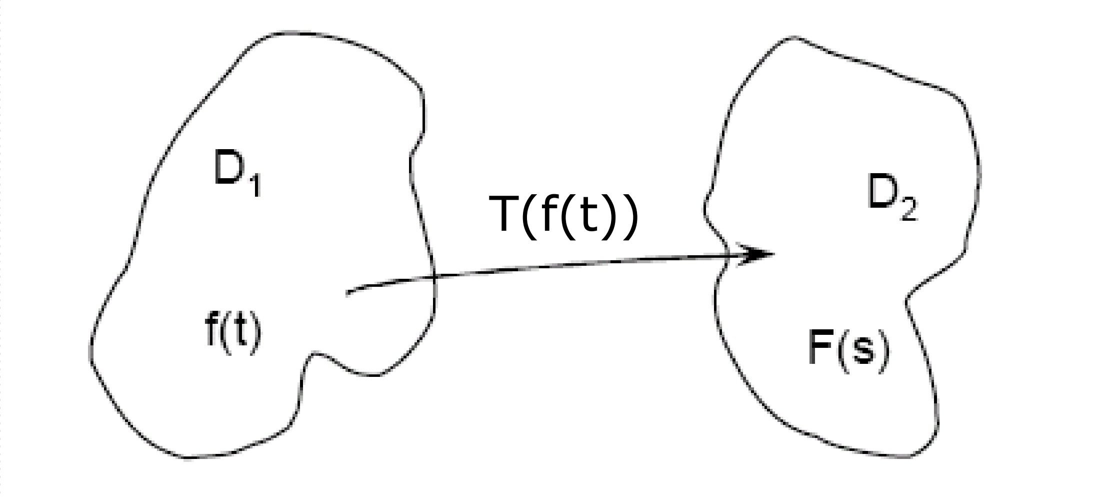


FORMAS DE REPRESENTAR SEÑALES

- Al tiempo/frecuencia se le denomina variable independiente
- Es posible pasar de una representación a otra
- Dependiendo de la información que se pretenda obtener de la señal, es mejor una representación u otra

TRANSFORMADAS

- Permiten pasar de un tipo de representación de señales a otro.
  - Ejemplo: T(f(tiempo))=F(frecuencia)



TRANSFORMADAS

- Se busca simplificar el estudio de las señales y los sistemas
- Las transformaciones no siempre tienen un sentido físico y pueden ser tan solo representaciones matemáticas
- Señales continuas

$$F(s) = \int_a^b K(t,s) f(t)\,dt$$

$$K(t,s) = e^{-ts}$$

  - Transformada de Fourier , $s=j\omega$
  - Transformada de Laplace, $s=\sigma+j\omega$

SERIES DE FOURIER

- Solo sirven para señales periódicas
- Definición

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de la señal *f(t)*

Posibilitan un estudio de señales temporales (audio) en sus componentes frecuenciales.

SERIES DE FOURIER

- Una forma equivalente de representación como una suma de señales senoidales:

Dado que: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$a_k e^{jk\omega_0 t} = |a_k|\cos(k\omega_0 t + \arg(a_k)) + j|a_k|\sin(k\omega_0 t + \arg(a_k))$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |a_k|\cos(k\omega_0 t + \arg(a_k)) + j\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |a_k|\sin(k\omega_0 t + \arg(a_k))$$

SERIES DE FOURIER

- Las series de Fourier es una transformación discreta, que solo toma valores para frecuencias múltiplo de la frecuencia de la señal f(t)

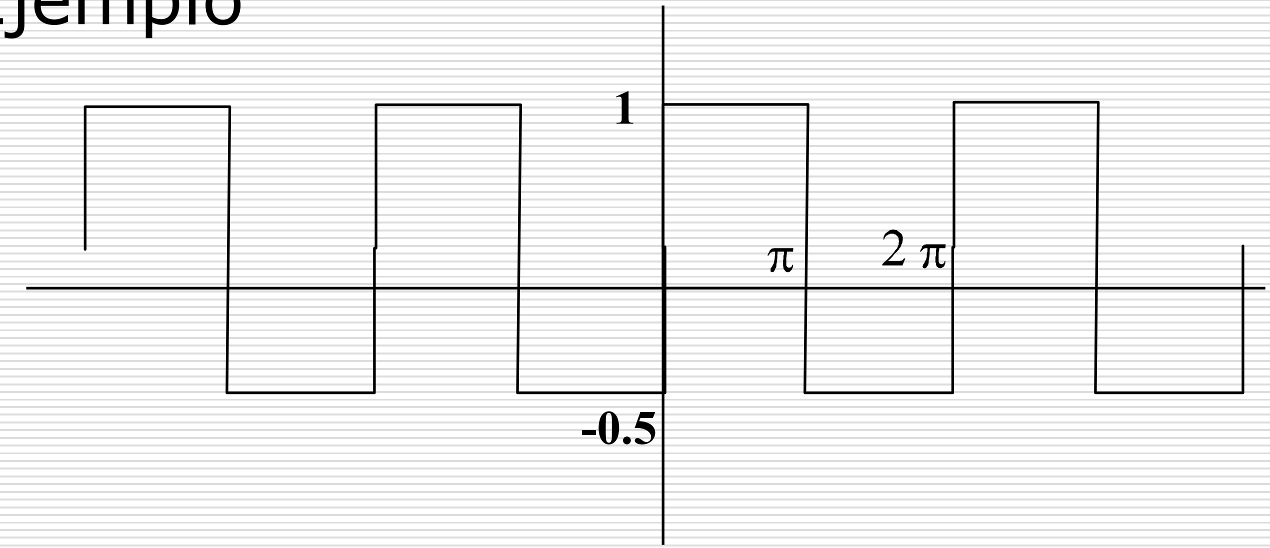
  $k\ \omega_0 \rightarrow$ armónicos

- En caso de señales reales: $F[k\omega_0] = F^*[-k\omega_0]$
  con lo que se anula la parte imaginaria correspondiente a la frecuencia $k\omega_0$ con la de $-k\omega_0$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} 2\left|a_k\right| \cos(k\omega_0 t + \arg(a_k))$$

SERIES DE FOURIER

- Ejemplo

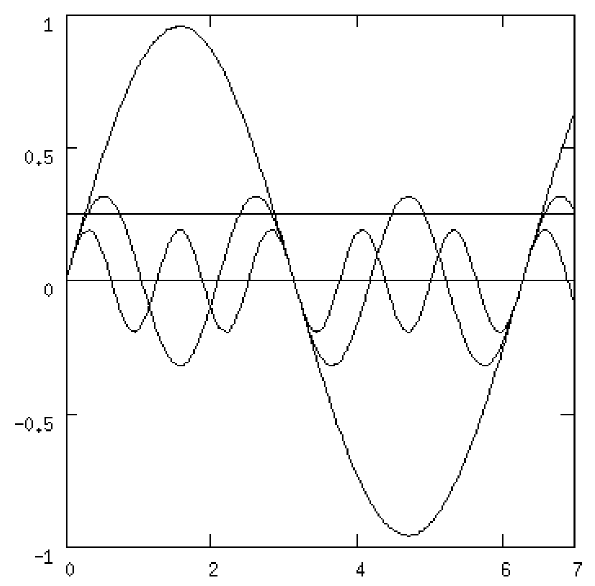


$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varpi_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} k\varpi_0 t$$

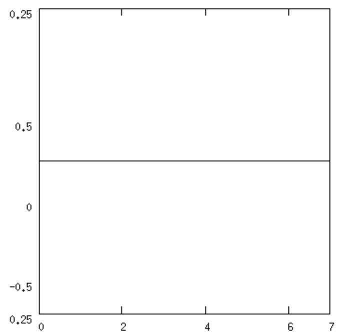
$$f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}((2k+1)t)$$

SERIES DE FOURIER

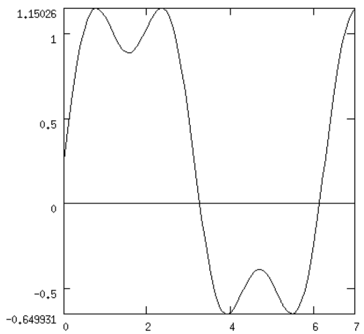
$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{\pi}\left(sent + \frac{sen3t}{3} + \frac{sen5t}{5} + \frac{sen7t}{7} + \frac{sen9t}{9} + \ldots\right)$$



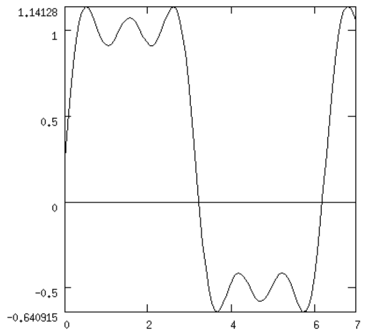
SERIES DE FOURIER



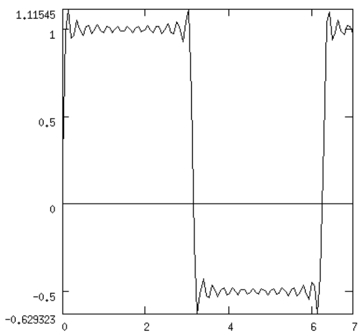
$$f(t)=\frac{1}{4}$$



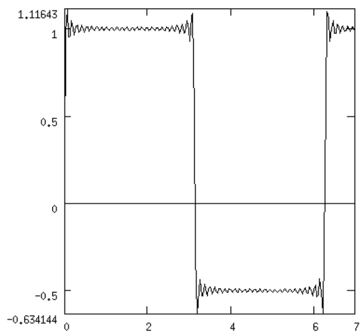
$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+\frac{sen3t}{3}\right)$$



$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+\ldots+\frac{sen5t}{5}\right)$$



$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+\ldots+\frac{sen25t}{15}\right)$$

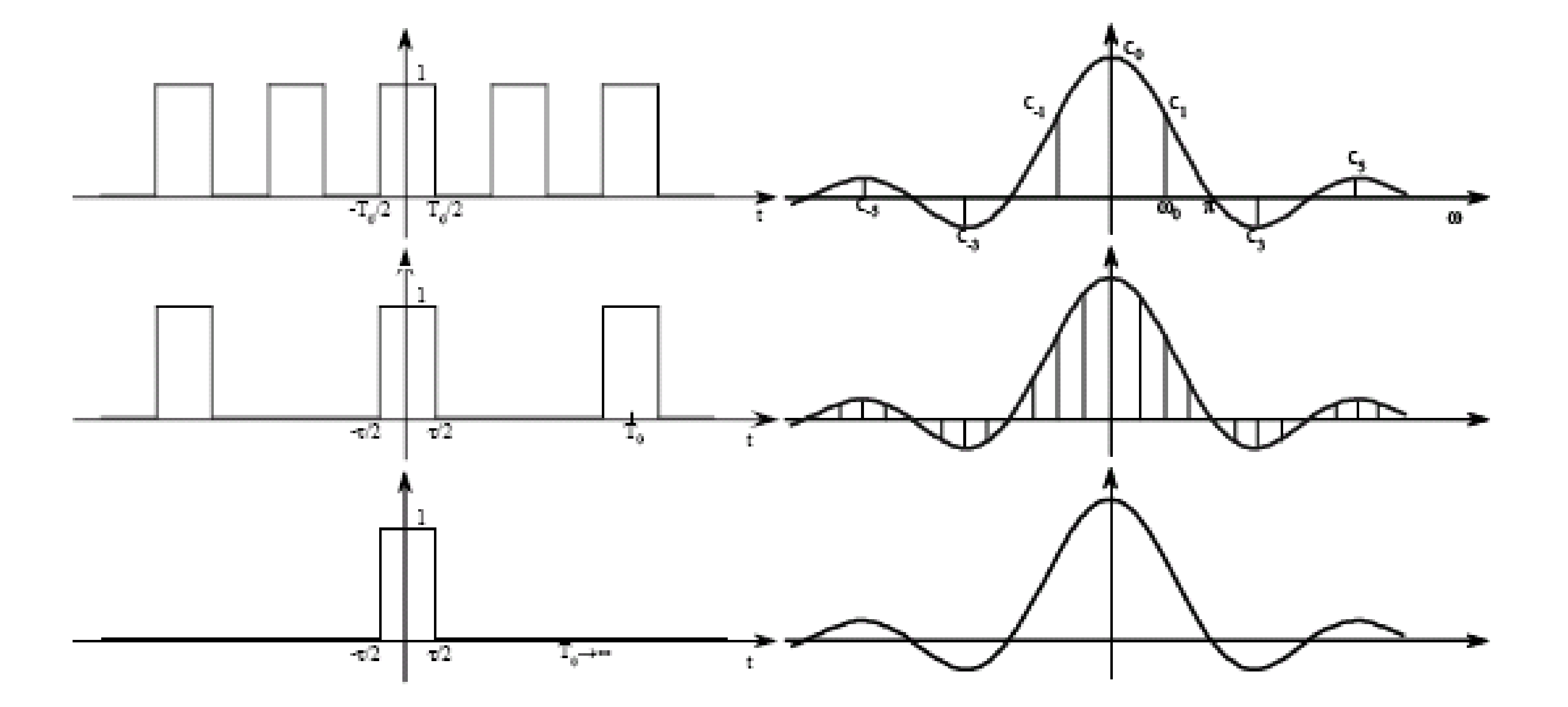


$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+\ldots+\frac{sen31t}{31}\right)$$

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

TRANSFORMADA DE FOURIER

- Relación con las series de Fourier



TRANSFORMADA DE FOURIER

- Definición

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad \omega \in \Re$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

- Condición de convergencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Problemas de convergencia de la transformada de Fourier

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|dt<\infty$$

- Muchas funciones de las utilizadas en control no cumplen la condición de convergencia.
- Para solventar el problema: Se introduce el término $e^{-\sigma t}$ siendo $\sigma \in \Re$
- Con el factor se garantiza la convergencia de la integral:

$$\hat{f}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

$$\hat{F}(\sigma,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}dt$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Transformada de Laplace

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad F(s), s \in C}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \quad j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- Convergencia $a < \sigma < b$

- Relación con la transformada de Fourier

$$s = j\omega$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Dos funciones pueden tener la misma transformada de Laplace

  Ejemplo:

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha - s)t}\,dt =$$

$$= \left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right|_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{s-\alpha} \quad \sigma > \alpha}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t} e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - s)t}\,dt =$$

$$= -\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right|_{-\infty}^{0} = \boxed{\frac{1}{s-\alpha} \quad \sigma < \alpha}$$

se diferencian solo en la región de convergencia

TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

- En general, trabajaremos con funciones en las que f(t)=0 para t<0, en las que la transformada de Laplace quedará definida como

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$ Transf. de Laplace unilateral

que converge para $a < \sigma$

- Es la que usaremos habitualmente

PROPIEDADES

- Linealidad

$$\mathrm{ax_1(t) + bx_2(t)} \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \mathrm{aX_1(s) + bX_2(s)}$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$$

- Escalado en el tiempo

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

PROPIEDADES

- Desplazamiento en S

$$e^{-\alpha t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s+\alpha)$$

- Teorema del valor inicial

$$x(o_+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- Teorema del valor final

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

PROPIEDADES DE LA T. L.

- Derivación

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \ldots - x^{n-1}(0^-)$$

- Integración en el tiempo

$$\int_0^t x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) + \ldots$$

PROPIEDADES DE LA T. L.

- Diferenciación en s

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$$

- Convolución

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{L} X(s)Y(s)$$

TABLA DE TRANSFORMADAS

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \longleftrightarrow 1/s$$

$$t\,u_0(t) \longleftrightarrow 1/s^2$$

$$t^n u_0(t) \longleftrightarrow n!/s^{n+1}$$

$$e^{-\alpha t} u_0(t) \longleftrightarrow 1/(s+\alpha)$$

$$t^n e^{-\alpha t} u_0(t) \longleftrightarrow n!/(s+\alpha)^{n+1}$$

$$\mathrm{sen}(\omega t) u_0(t) \longleftrightarrow \omega/(s^2+\omega^2)$$

$$\cos(\omega t) u_0(t) \longleftrightarrow s/(s^2+\omega^2)$$

$$e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega t) u_0(t) \longleftrightarrow \omega/((s+\alpha)^2+\omega^2)$$

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega t) u_0(t) \longleftrightarrow (s+\alpha)/((s+\alpha)^2+\omega^2)$$

UTILIDAD

- La propiedad de diferenciación en el tiempo nos convierte las ecuaciones diferenciales en polinomios en el dominio *s*.

- La integral de convolución (respuesta de un sistema ante una señal) de dos señales en el tiempo se transforma en un producto de señales en el dominio *s*.

RESOLUCIÓN DE ECS. DIFERENCIALES

$$\boxed{\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)=5;\quad \dot{x}(0)=2;\quad x(0)=-1}$$

$$[s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)]+3[sX(s)-x(0)]+2X(s)=\frac{5}{s}$$

$$[s^2X(s)+s-2]+3[sX(s)+1]+2X(s)=\frac{5}{s}$$

$$(s^2+3s+2)X(s)+(s+1)=\frac{5}{s}$$

$$X(s)=\frac{-s^2-s+5}{s(s^2+3s+2)}=\frac{-s^2-s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{5/2}{s}-\frac{5}{s+1}+\frac{3/2}{s+2}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{5}{2}-5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}}$$