MODELADO DE SISTEMAS

OBJETIVOS

- *Introducir el concepto de modelo matemático y función de transferencia. Partiendo de los sistemas físicos se desarrolla el modelo matemático en forma de función de transferencia de un sistema.*
- *Representación de sistemas mediante diagramas de bloques y de flujo de señal. Esta parte se completa con una relación de ejemplos de sistemas simples que constituyen componentes de los sistemas más complejos.*

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

MODELADO DE SISTEMAS

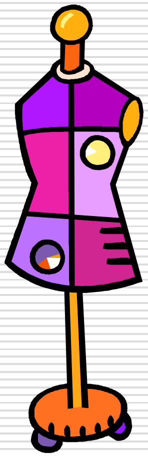
- Modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales.
- Linealización.
- Función de Transferencia.
- Diagramas de Bloques.
- Método de Mason.

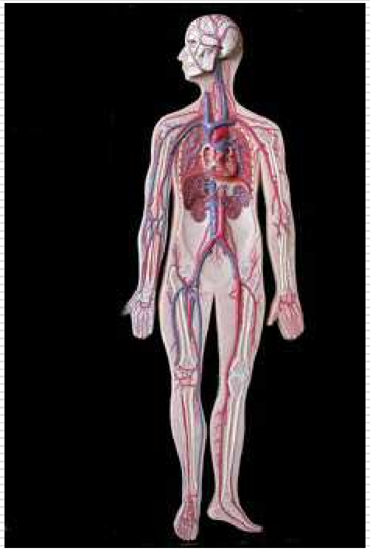
Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulos 3 y 4
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo 2
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 4
- F. Matía y A. Jiménez, "Teoría de Sistemas", Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 3

CONCEPTO DE MODELO

- Concepto de modelo





CONCEPTO DE MODELO

- ***MODELO (Definición RAE) : 4.*** *m. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.*
- Casi siempre, los modelos son *aproximaciones* más o menos precisas del proceso.
- Depende de qué se “tenga en cuenta” y qué se “desprecia” en el modelo (ej. A veces se desprecia el rozamiento del aire, etc.)

Concepto de Modelo de un Sistema

- Modelo: Representa o sustituye a la realidad o a un sistema o realidad física en algunos aspectos.

- Modelo matemático de un sistema: conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con exactitud, o al menos, razonablemente bien.

- La dinámica de muchos sistemas se describe mediante ecuaciones diferenciales lineales.
  - Ej.

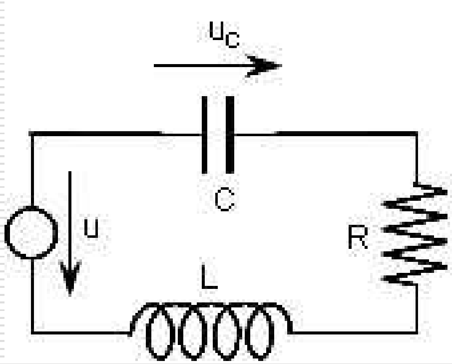
$$3\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+2=0$$

  - Las variables son señales de tiempo continuo.

Modelos matemáticos

- Los sistemas lineales de tiempo continuo se describen por ecuaciones diferenciales.

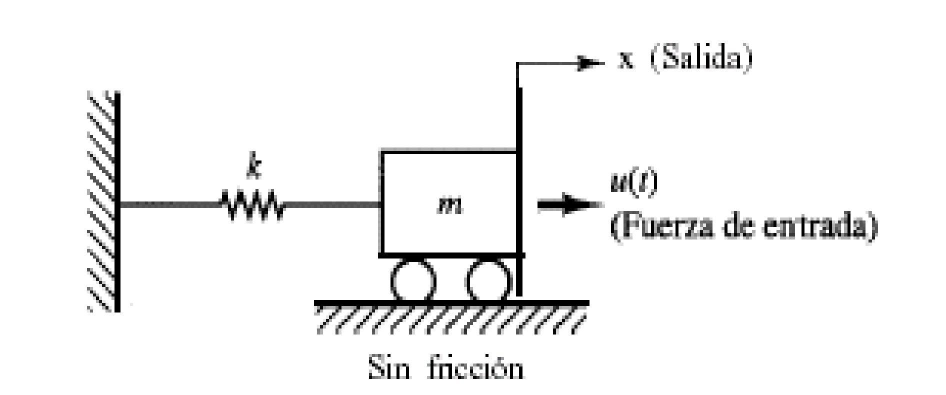
Modelos matemáticos. Ejemplos



$$\left.\begin{aligned} & u_c(t) + R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = u(t) \\ & C\frac{du_c(t)}{dt} = i(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)}$$

Modelos matemáticos. Ejemplos



Desplazamiento, $x(t)$
Masa, $m = cte$
Const. elastica, K
Coef. viscoso, f
Fuerza, $u(t)$

$$u(t) = K \cdot x(t) + f \frac{dx(t)}{dt} + M \frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

Modelos matemáticos. Ejemplos

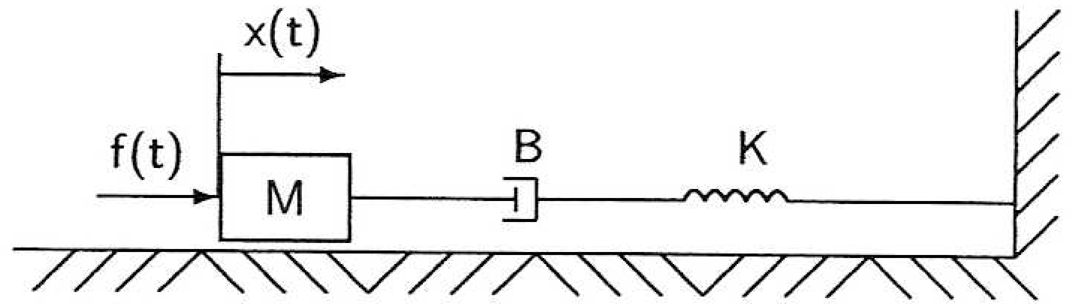
$$LC\frac{du_c{}^2(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u(t)$$

$$M\frac{dx^2(t)}{dt^2}+f\frac{dx(t)}{dt}+K\cdot x(t)=u(t)$$

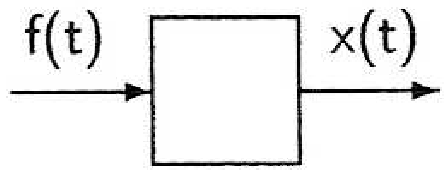
$$a\frac{dy^2(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\cdot y(t)=u(t)$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistemas mecánicos de translación

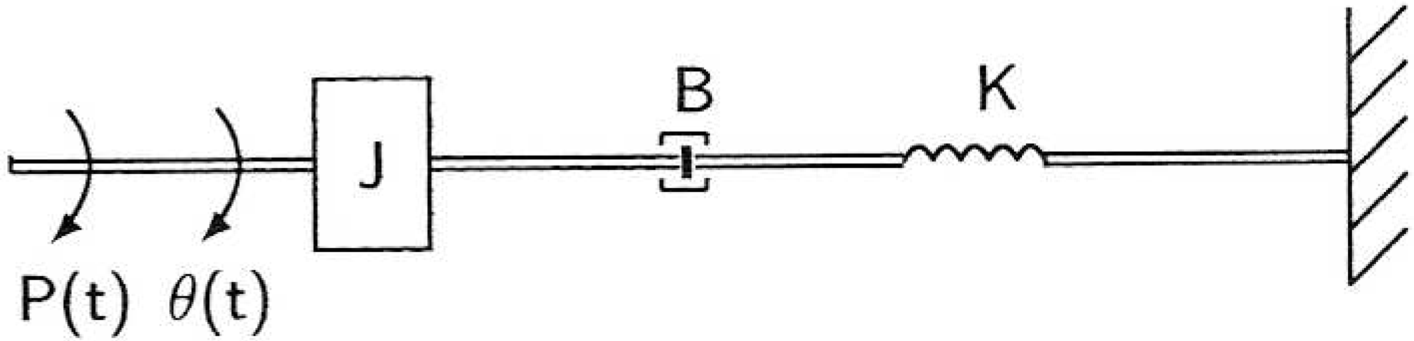


$$M\ddot{x}(t) = f(t) - B\dot{x}(t) - Kx(t)$$

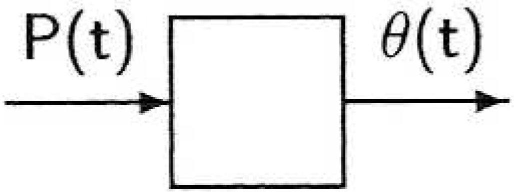


Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistemas mecánicos de rotación

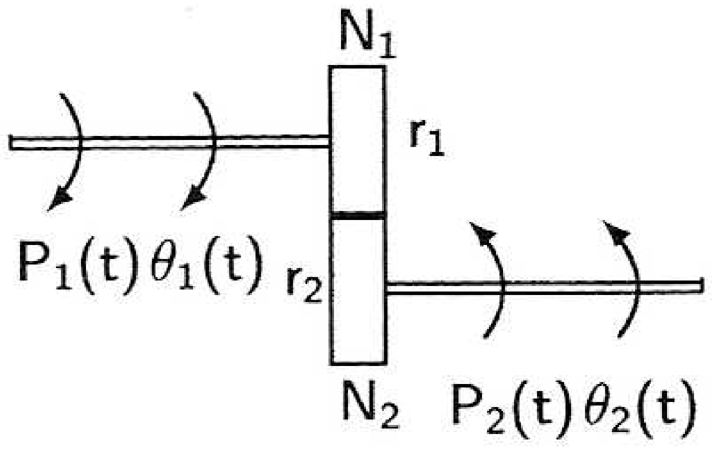


$$J\ddot{\theta}(t) = P(t) - B\dot{\theta}(t) - K\theta(t)$$



Modelado de Sistemas Mecánicos

Ejes de engranajes

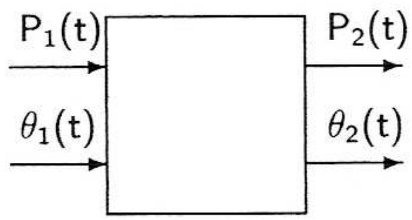


$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

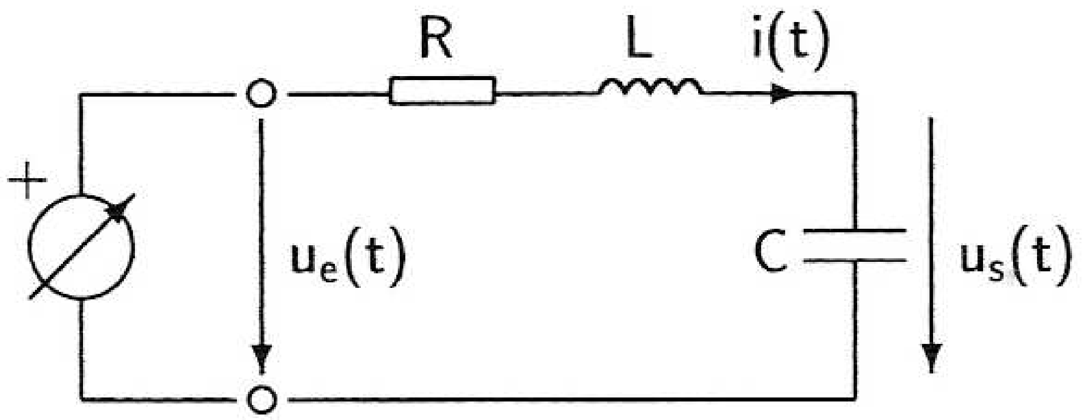
$$r_1\theta_1(t) = r_2\theta_2(t)$$

$$P_1(t)\theta_1(t) = P_2(t)\theta_2(t)$$

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{P_1(t)}{P_2(t)}$$



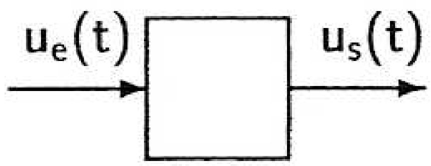
Modelado de Sistemas Eléctricos



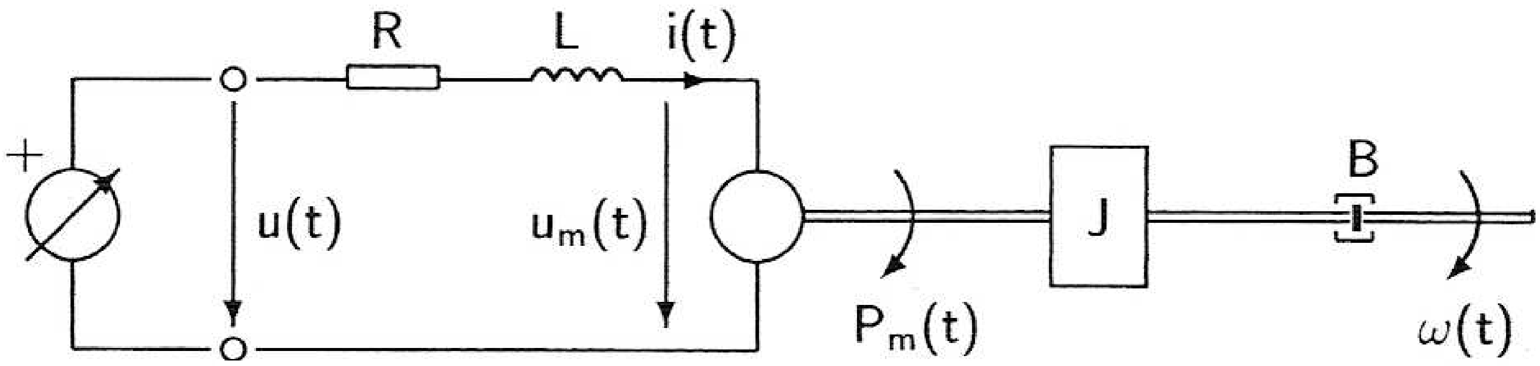
$$u_e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u_s(t)$$

$$u_s(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

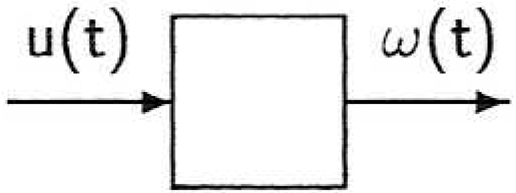
$$\Rightarrow u_e(t) = RC\dot{u}_s(t) + LC\ddot{u}_s(t) + u_s(t)$$



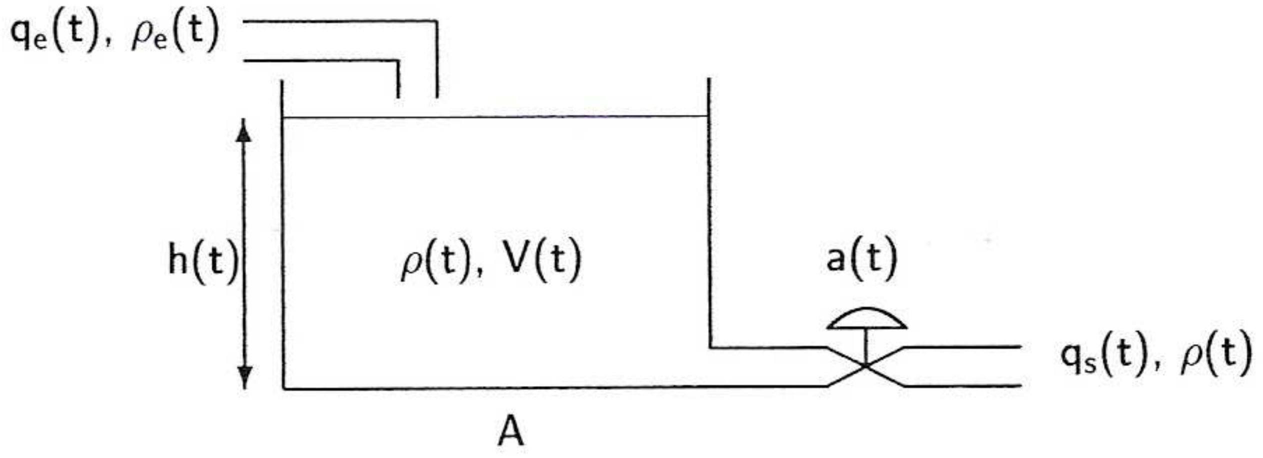
Modelado de Sistemas Electromecánicos



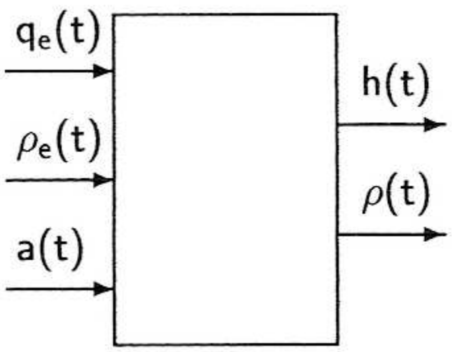
$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u_m(t) \\ u_m(t) = K_b w(t) \\ P_m(t) = K_p i(t) \\ J\dot{w}(t) = P_m(t) - Bw(t) \end{cases}$$



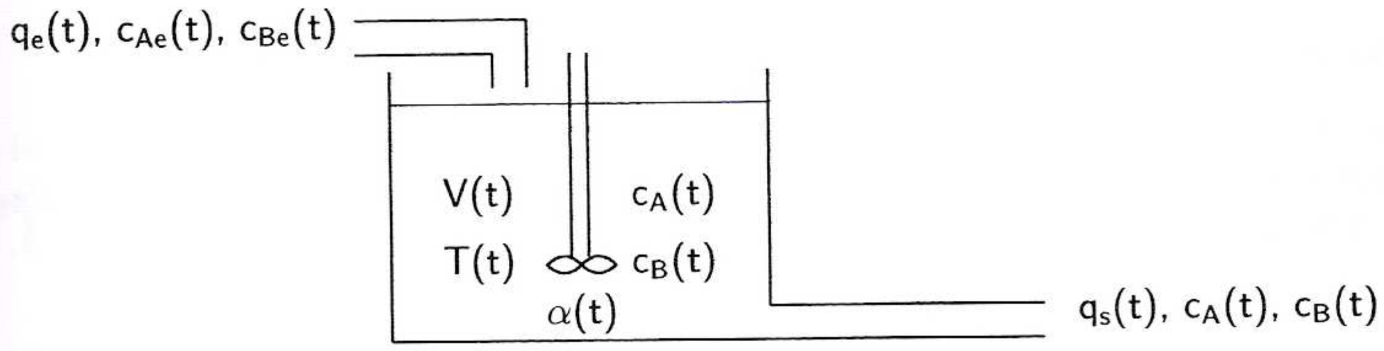
Modelado de Sistemas Hidráulicos



$$\begin{cases} \frac{d\rho V}{dt} = \rho_e(t) q_e(t) - \rho(t) q_s(t) \\ V(t) = A h(t) \\ q_s(t) = C a(t) \sqrt{2 g h(t)} \end{cases}$$

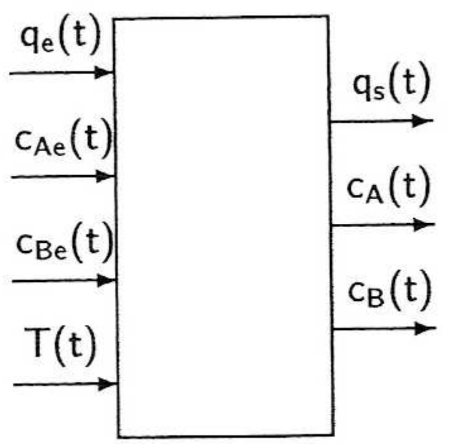


Modelado de Sistemas Químicos

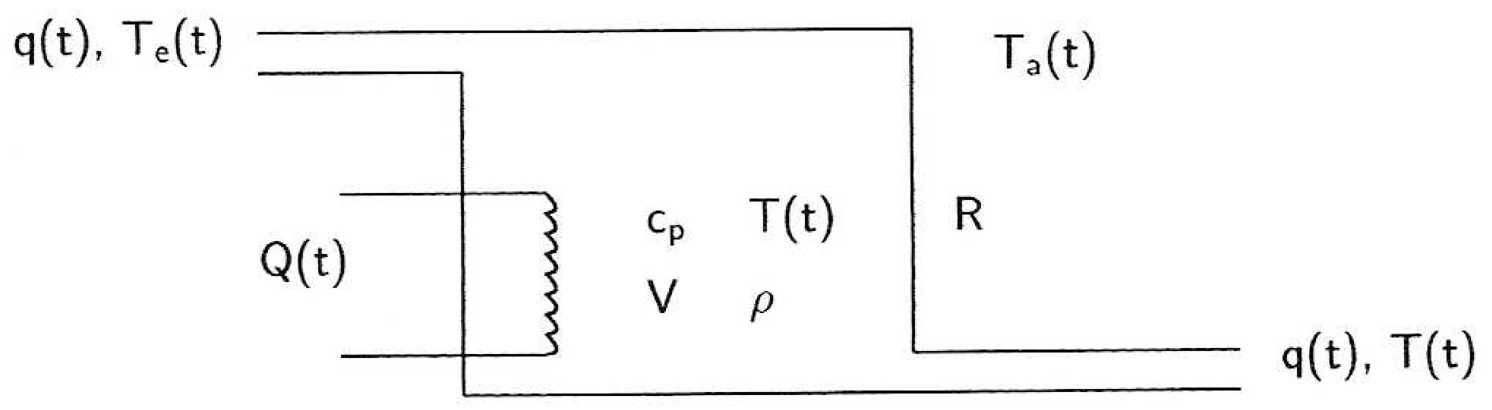


$$A \xrightarrow{\alpha} B$$

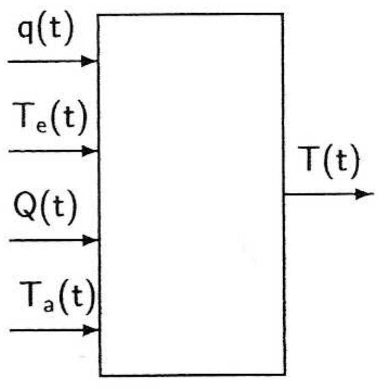
$$\begin{cases} \dot{V}(t) = q_e(t) - q_s(t) \\ q_s(t) = C\sqrt{2gV(t)} \\ \frac{dV_A}{dt} = c_{Ae}(t)q_e(t) - c_A(t)q_s(t) - \alpha(t)c_A(t)V(t) \\ \frac{dV_B}{dt} = c_{Be}(t)q_e(t) - c_B(t)q_s(t) + \alpha(t)c_A(t)V(t) \\ \alpha(t) = Ke^{-\frac{E}{RT(t)}} \end{cases}$$



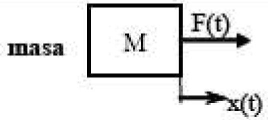
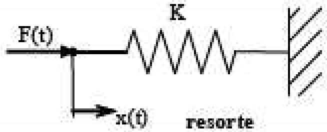
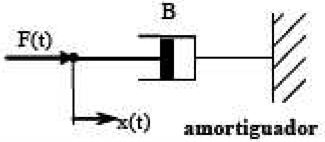
Modelado de Sistemas Térmicos



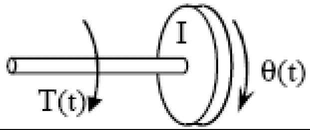
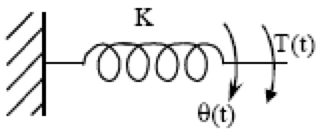
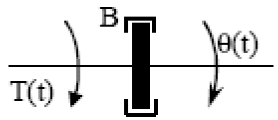
$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p q(t)[T_e(t) - T(t)] + Q(t) - \frac{T(t)-T_a(t)}{R}$$

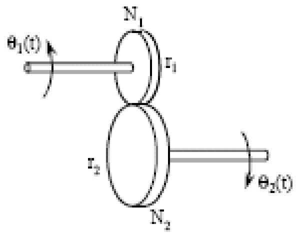


Sistemas mecánicos

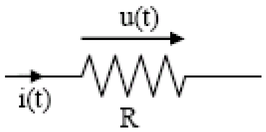
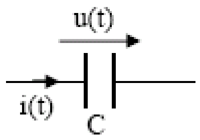
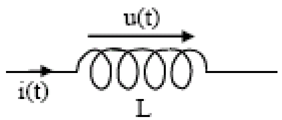
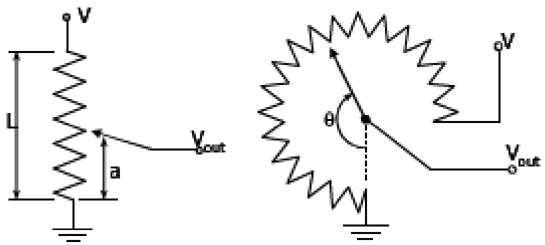
SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACIÓN			
		$F(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
		$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
		$F(t) = B \frac{d}{dt} x(t)$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento

Sistemas mecánicos

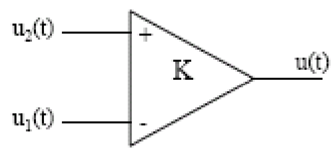
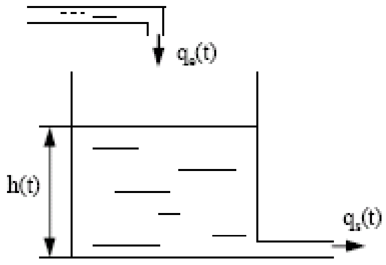
SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIÓN	Momento de inercia 	$T(t) = I\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)$	T: par I: momento de inercia θ: desplazamiento angular
	Rigidez 	$T(t) = K \cdot \theta(t)$	T: par K: constante del muelle θ: desplazamiento angular
	Rozamiento viscoso 	$T(t) = B\frac{d}{dt}\theta(t)$	T: par B: coeficiente de fricción viscosa θ: desplazamiento angular

SISTEMAS MECÁNICOS ENGRANAJES		$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)}$ $r_1\theta_1 = r_2\theta_2$	T: par N: número de dientes θ: desplazamiento angular r: radio

Sistemas eléctricos

SISTEMAS ELÉCTRICOS	Resistencia 	$u(t) = R \cdot i(t)$	u: tensión i: intensidad R: resistencia
	Condensador 	$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$	u: tensión i: intensidad C: capacidad
	Bobina 	$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$	u: tensión i: intensidad L: inductancia
	 Potenciómetro	$V_{out}(t) = V\frac{a}{L}$ $V_{out}(t) = V\frac{\theta}{\theta_{max}}$	V: tensión de alimentación V_{out}: tensión de salida a: desplazamiento L: longitud total θ: desplazamiento angular θ_{max}: desplazamiento angular máximo

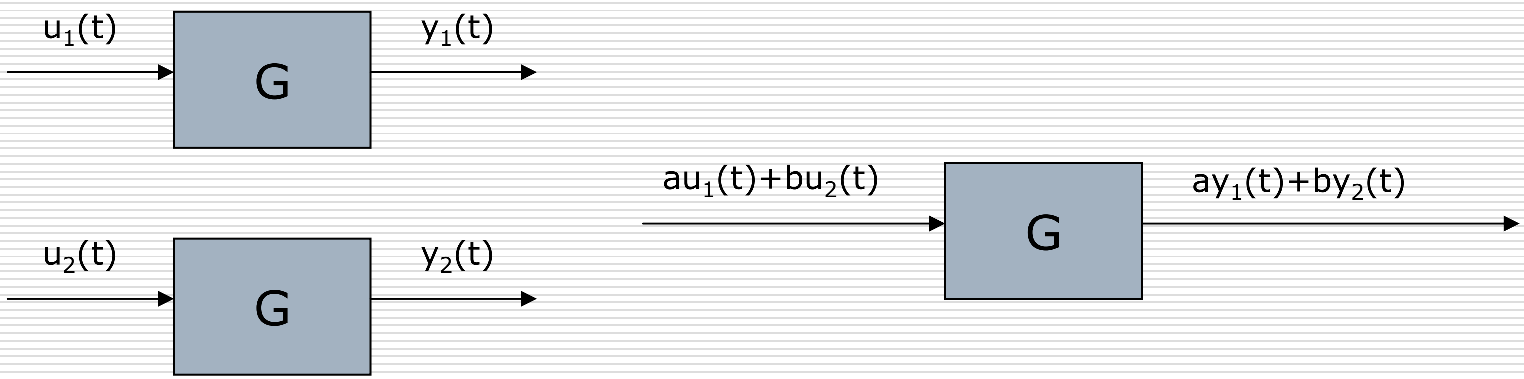
Otros sistemas

AMPLIFI-CADOR DIFERENCIAL		$u(t) = K(u_2(t) - u_1(t))$	u: tensiones K: ganancia
DEPÓSITO DE SECCIÓN CONSTANTE		$q_e(t) - q_s(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$ $q_s(t) = k\sqrt{h(t)}$	q: caudal h: altura A: sección constante k: coeficiente

Linealización

Concepto de linealidad

- Principio de superposición:



- Los sistemas físicos reales no suelen ser lineales

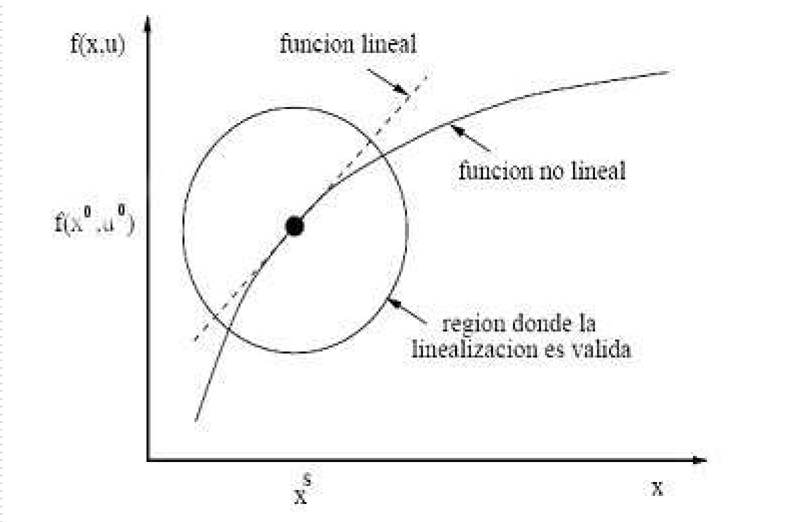
Linealización

$$y = f(x) \qquad No \quad lineal$$

$$y \approx f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_0 (x - x_0) + \cancel{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_0} (x - x_0)^2 + \ldots$$

$$y \approx y_0 + a_1 \vartriangle x$$

$$\Delta y \approx a_1 \Delta x$$

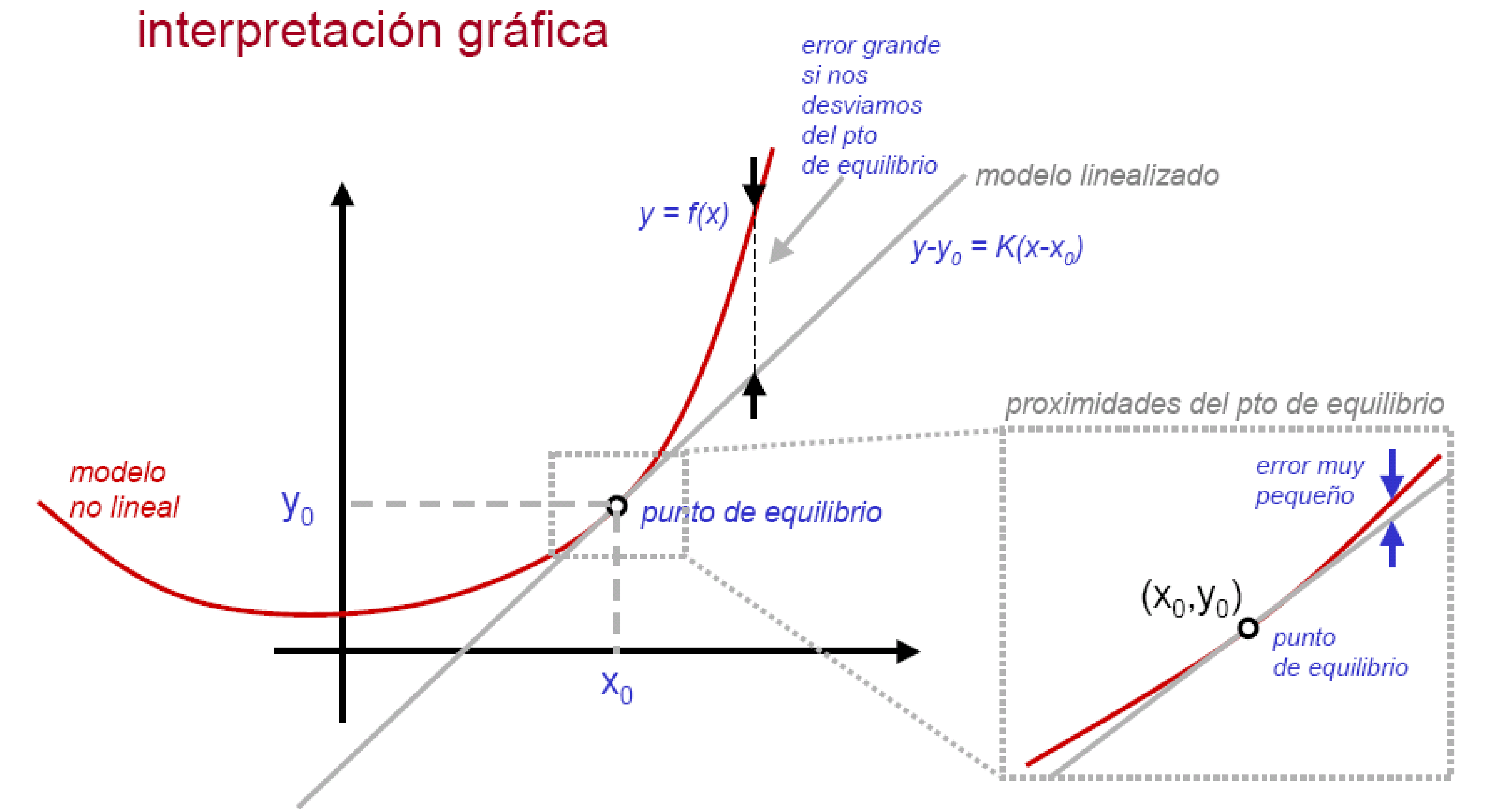


Punto de equilibrio :
derivadas temporales cero

$$\dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = \ldots = 0$$

$$\dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = \ldots = 0$$

Linealización



Apuntes de "Análisis Dinámico de Sistemas", ISA – Univ. Oviedo

Linealización

$$y = f(x_1, x_2 \quad ..x_n) \qquad \mathit{No \ \ lineal}$$

$$y \approx y_0 + \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_0 (x_1 - x_{1_0}) + \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_0 (x_2 - x_{2_0}) + \quad ... + \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_0 (x_n - x_{n_0})$$

$$\Delta y \approx a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \quad ... + a_n \Delta x_n \qquad \mathit{Lineal}$$

Las x_i representan tanto variables como derivadas

Linealización. Concepto de punto de equilibrio

- Se linealiza en torno a un punto de equilibrio:

$$(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}, y_0)$$

$$y = f(x_1, x_2 .. x_n) \; No\ lineal$$

$$y \approx y_0 + \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_0 (x_1 - x_{1_0}) + \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_0 (x_2 - x_{2_0}) + \ldots + \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_0 (x_n - x_{n_0})$$

$$\Delta y \approx a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \ldots + a_n \Delta x_n \; Lineal$$

- Las variaciones de las variables son nulas.

Linealización

- La ecuación linealizada no es única, depende del punto en que se haga la linealización
- Las variables de la ecuación linealizada representan incrementos respecto al punto de equilibrio
- Para simplificar la notación no se suelen representar las variables como incrementos
- Es más sencillo linealizar las ecuaciones término a término
- Diferencias de comportamiento entre el modelo linealizado y el real
  - Forma de la función a linealizar.
  - Las diferencias aumentan al alejarse del punto de equilibrio.

Función de Transferencia para sistemas de tiempo continuo

Ejemplo

Linealizar el sistema dado por la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + x\dot{y} + y^2 - x = 0$$

Las variables son: $f(y, \dot{y}, \ddot{y}, x) = 0$

La aproximación de Taylor es:

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}, x) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_0 \Delta\ddot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta\dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x$$

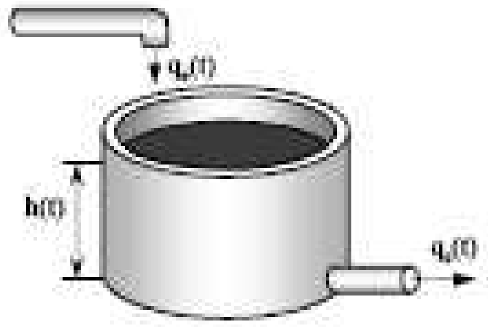
Resolviendo las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y_0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -1 + (\dot{y})_0$$

La solución queda:

$$\Delta\ddot{y} + x_0\Delta\dot{y} + 2y_0\Delta y - \Delta x = 0 \qquad \boxed{\ddot{Y} + x_0\dot{Y} + 2y_0 Y - X = 0}$$

Ejemplos de Linealización



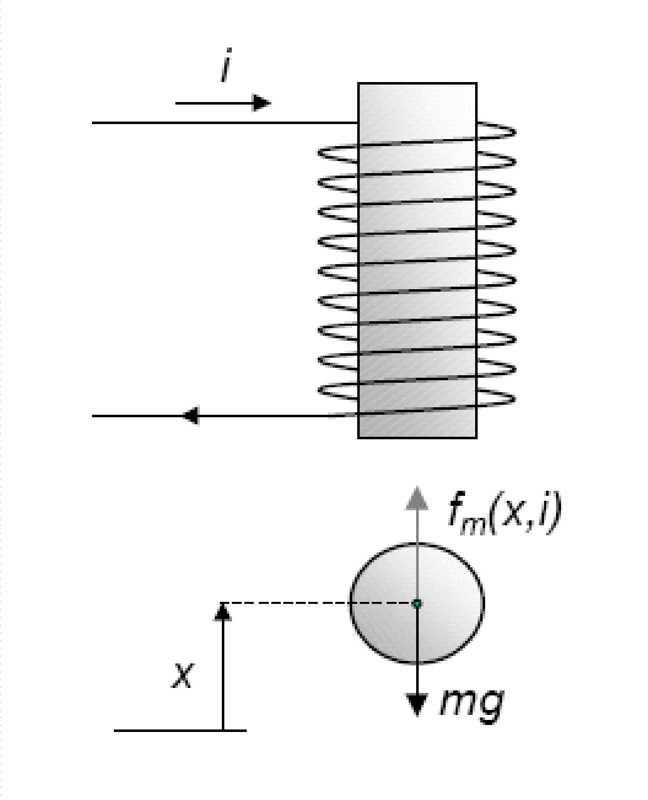
$$q_e(t) - q_s(t) = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$q_s(t) = C\sqrt{h(t)}$$

$$\Delta q_e(t) - \Delta q_s(t) = A \Delta \dot{h}(t)$$

$$\Delta q_s(t) = C \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h(t)$$

Ejemplos de Linealización



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{i^2}{x}$$