ANÁLISIS TEMPORAL

Conceptos generales

1. Régimen transitorio y permanente.
2. Señales normalizadas de entrada.
3. Respuesta a escalón de sistemas de tiempo continuo.
4. Relación entre la respuesta temporal y la situación de los polos.
5. Sistemas equivalentes de orden reducido.

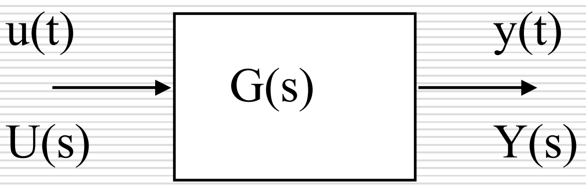
Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 5
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 7
- F. Matía y A. Jiménez, “Teoría de Sistemas”, Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 5

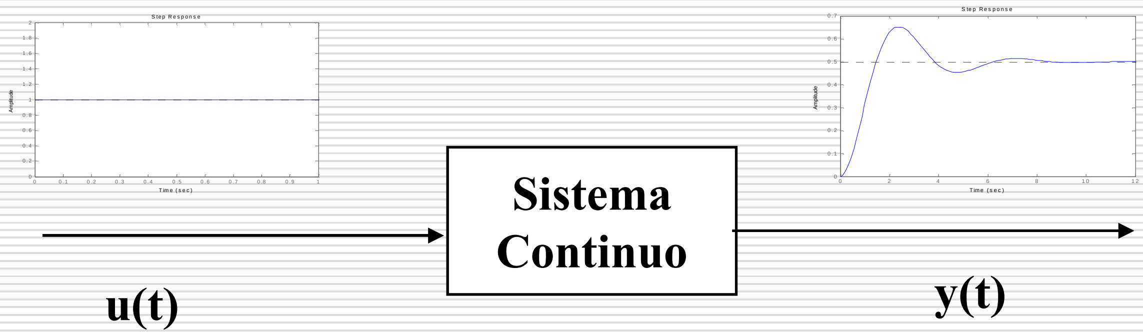
INTRODUCCIÓN

- ¿Qué se persigue con el análisis temporal?
  - Análisis de la estabilidad.
  - Análisis del régimen permanente.
  - Análisis dinámico, caracterización de la respuesta temporal.

INTRODUCCIÓN



$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow \begin{cases} y(t) = g(t) * u(t) \\ y(t) = L^{-1}\left[G(s)U(s)\right] \end{cases}$$



$$y(t) = y_{rt}(t) + y_{rp}(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} y_{rt}(t) = 0$$

$$y_{rp}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

INTRODUCCIÓN

Concepto de análisis temporal

Estabilidad: si ante una entrada acotada, la salida es acotada.

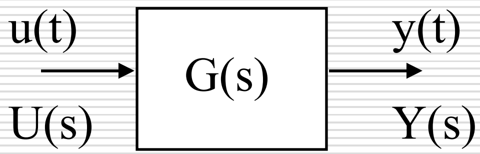
Respuesta transitoria: ante un cambio a la entrada del sistema, presenta un etapa transitoria antes de alcanzar el equilibrio.

(rapidez, oscilaciones)

Precisión en régimen permanente: un sistema no siempre es capaz de seguir a la entrada en régimen permanente. (Error)

INTRODUCCIÓN

Concepto de análisis temporal

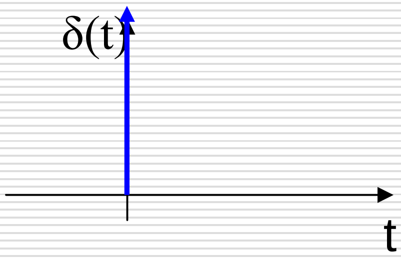


$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow \begin{cases} y(t) = g(t) * u(t) \\ y(t) = L^{-1}\left[G(s)U(s)\right] \end{cases}$$

SEÑALES NORMALIZADAS

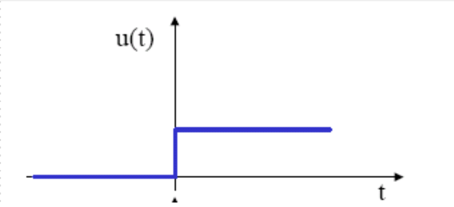
- Impulso

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = 1$$



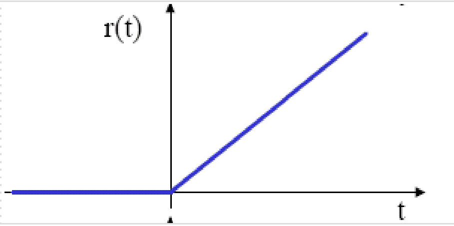
- Escalón

$$u(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$



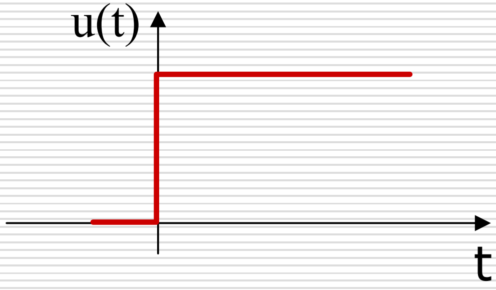
- Rampa

$$u(t) = tu_0(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$



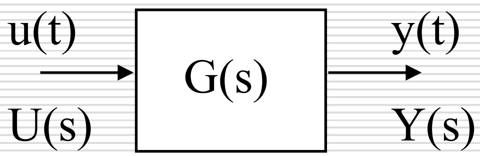
RESPUESTA A ESCALÓN

- Si consideramos como entrada un escalón unitario:



$$U(s) = \frac{1}{s}$$

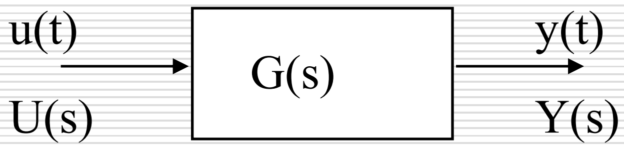
- La respuesta del sistema ante esta entrada será:



$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{G(s)}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$

RESPUESTA A ESCALÓN



$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{G(s)}{s}$$

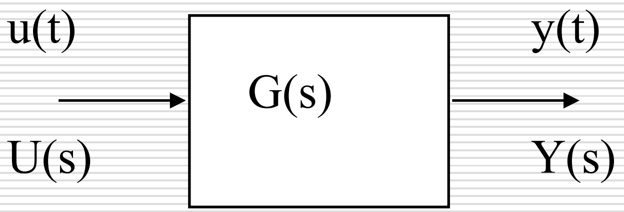
$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

- Si σ_i son los polos reales de G(s) y $\alpha_i \pm j\beta_i$ los imaginarios (polos no múltiples), entonces

$$G(s) = \frac{N(s)}{\prod\left((s-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)\prod(s-\sigma_i)}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{N(s)}{s\prod(s-\sigma_i)\prod\left((s-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)}$$

RESPUESTA A ESCALÓN



$$Y(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{A}{s}+\sum\frac{B_i}{s-\sigma_i}+\sum\frac{C_i s+D_i}{(s-\alpha_i)^2+\beta_i^2}$$

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=A+\sum B_i e^{\sigma_i t}+\sum E_i e^{\alpha_i t} sen(\beta_i t+\varphi_i) \qquad t\geq 0$$

$$y(t)=G(0)+\sum B_i e^{\sigma_i t}+\sum E_i e^{\alpha_i t} sen(\beta_i t+\varphi_i) \qquad t\geq 0$$

RESPUESTA A ESCALÓN

$$G(s) = \frac{N(s)}{\prod\left((s-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)\prod(s-\sigma_i)}$$

$$G(s) = \frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s^3-5s^2+11s-15} = \frac{3s^3-10s^2+21s-30}{(s-3)(s-1+2j)(s-1-2j)}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{N(s)}{s\prod(s-\sigma_i)\prod\left((s-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)} =$$

$$Y(s) = \frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s(s-3)(s^2-2s+5)} = \frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s(s-3)[(s-1)^2+2^2]}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s}+\sum\frac{B_i}{s-\sigma_i}+\sum\frac{C_is+D_i}{(s-\alpha_i)^2+\beta_i^2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s}+\frac{1}{(s-3)}+\frac{2}{[(s-1)^2+2^2]}$$

Recordar

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \longleftrightarrow {}^{1}\!/_{s}$$

$$e^{-\alpha t} u_0(t) \longleftrightarrow {}^{1}\!/_{s+\alpha}$$

$$e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega t) u_0(t) \longleftrightarrow {}^{\omega}\!/_{((s+\alpha)^2+\omega^2)}$$

RESPUESTA A ESCALÓN

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{(s-3)} + \frac{2}{[(s-1)^2 + 2^2]}$$

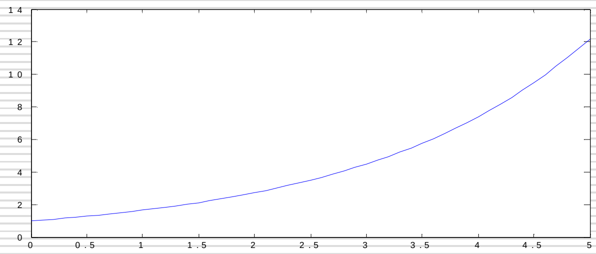
$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = A + \sum B_i e^{\sigma_i t} + \sum E_i e^{\alpha_i t} sen(\beta_i t + \varphi_i) \quad t \geq 0$$

$$y(t) = 2 + e^{3t} + e^{t} sen(2t) \quad t \geq 0$$

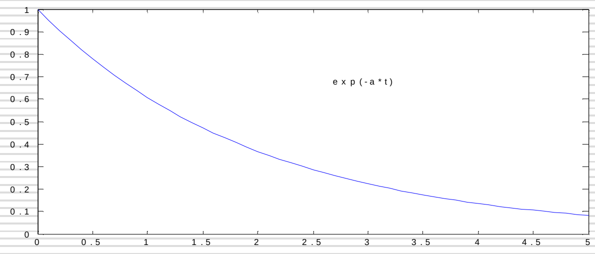
RESPUESTA A ESCALÓN

$$y(t) = G(0) + \sum B_i e^{\sigma_i t} + \sum E_i e^{\alpha_i t} sen(\beta_i t + \varphi_i) \qquad t \geq 0$$

- Términos $B_i e^{\sigma_i t}$

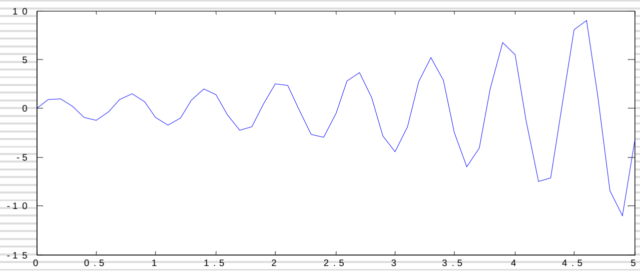


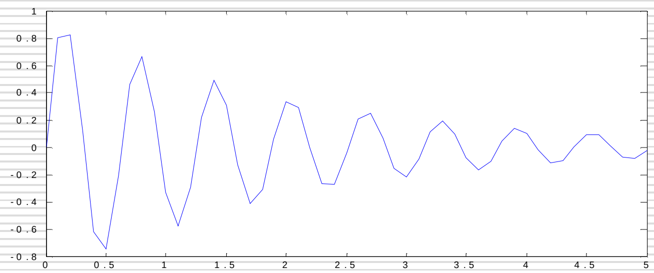
$\sigma > 0$



$\sigma < 0$

- Términos $E_i e^{\alpha_i t} sen(\beta_i t + \varphi_i)$





RELACIÓN ENTRE LA SITUACIÓN DE LOS POLOS Y LA RESPUESTA TEMPORAL

- **Estabilidad**: Un sistema es estable si exhibe una respuesta acotada para toda entrada acotada. La respuesta a escalón debe tener un valor fijo y finito.
  - Polos en semiplano negativo
- **Ganancia estática**. Régimen permanente
  - G(0)

$$y_{rp}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t) = A$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{G(s)}{s} = G(0)$$

RELACIÓN ENTRE LA SITUACIÓN DE LOS POLOS Y LA RESPUESTA TEMPORAL

- **Rapidez**
  - Distancia de polos al eje imaginario

$$e^{\sigma_i t},\ e^{\alpha_i t}$$

$$e^{-200t}\ (t=1)=e^{-200}$$

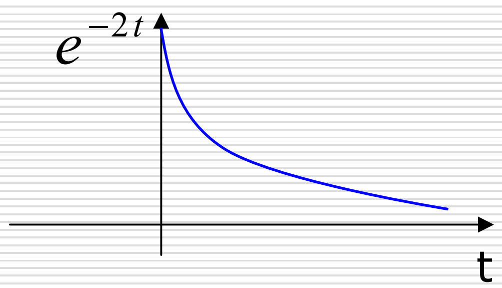
$$e^{-2t}\ (t=100)=e^{-200}$$

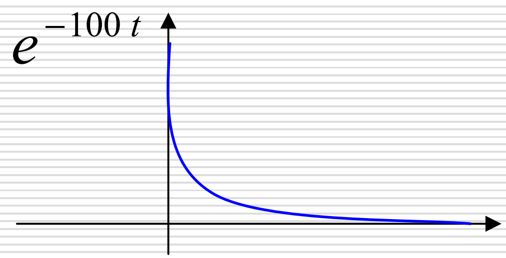
- **Oscilaciones**
  - Polos imaginarios, $\alpha_i \pm j\beta$ ($\alpha_i = 0$) $\rightarrow \pm j\,\beta$

$$E_i sen(\beta_i t+\varphi_i)$$

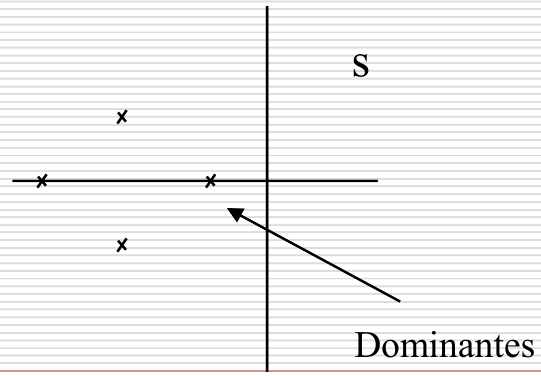
Concepto de polo dominante

- Los polos situados en el semiplano negativo originan respuestas que se atenúan tanto más rápidamente cuanto más alejados estén del eje imaginario.



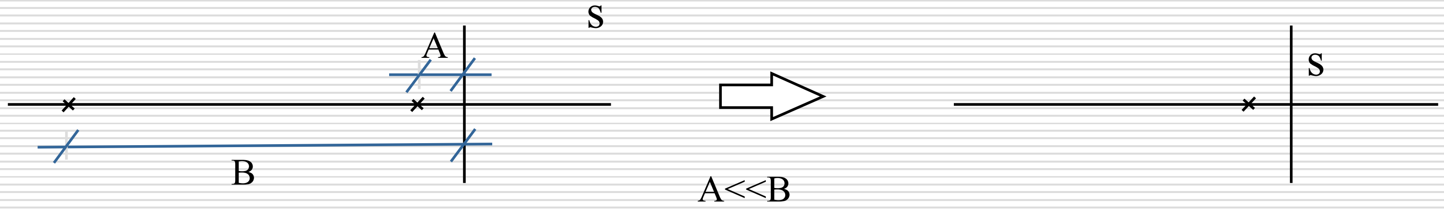


- Polo(s) dominantes: polos más cercanos al eje imaginario.



SISTEMA EQUIVALENTE DE ORDEN REDUCIDO

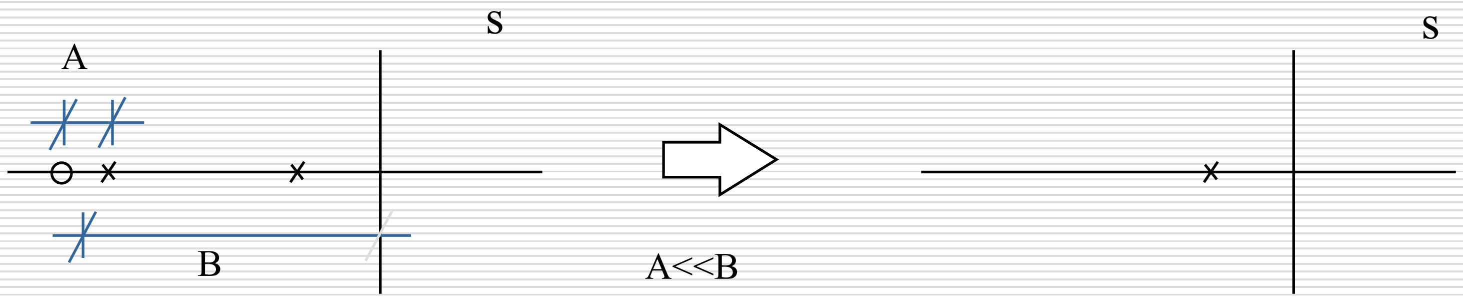
- Cancelación de raíces no dominantes



$$6 \cdot A \leq B$$

SISTEMA EQUIVALENTE DE ORDEN REDUCIDO

- Cancelación de pares polo/cero



$$6 \cdot A \leq B$$

- El sistema equivalente debe mantener la Ganancia estática

SISTEMA EQUIVALENTE DE ORDEN REDUCIDO

Ejemplos

Cancelación de raíces no dominantes

$$G(s) = 3\frac{(s+1)}{(s+2)(s+1.5)(s+10)} \qquad 6 \cdot 1.5 < 10$$

$$\hat{G}(s) = \boxed{0.3}\frac{(s+1)}{(s+2)(s+1.5)}$$

Cancelación de pares polo/cero

$$G(s) = 2\frac{(s+6)}{(s+2)(s+6.5)(s+1)} \qquad 6 \cdot 0.5 < 6.25$$

$$\hat{G}(s) = \boxed{1.84}\frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

Polos y ceros adicionales

- Polos adicionales:
  - La adición de un polo a un sistema hace que el pico se produzca más tarde y sea de menor cuantía.
  - El sistema se hace más lento.
- Polos adicionales:
  - La adición de un cero a un sistema hace que el pico se produzca antes y sea de mayor cuantía.
  - El sistema se hace más rápido.

Estos efectos se aprecian más cuanto más cercano se encuentre la raíz del eje imaginario