ANÁLISIS TEMPORAL

Análisis temporal de sistemas de segundo orden.

1. Sistemas de segundo orden.
2. Respuesta impulsional de sistemas de segundo orden.
3. Respuesta ante señales escalón y rampa de sistemas de segundo orden.

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 5
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 7
- F. Matía y A. Jiménez, "Teoría de Sistemas", Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 5
- Puente, E.A, "Regulación automática", Ed. UPM-ETSII
  - Capitulo

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- Sistema dinámico que se corresponde con una ecuación diferencial de orden dos.

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = K \cdot u(t)$$

- Aplicando la transformada de Laplace:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 U(s)$$

- A partir de esta expresión se obtiene la función de transferencia para un sistema de primer orden:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- Parámetros característicos de un sistema de segundo orden

$$\boxed{G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

k = Ganacia estática.

ω_n = Frecuencia natural no amortiguada.

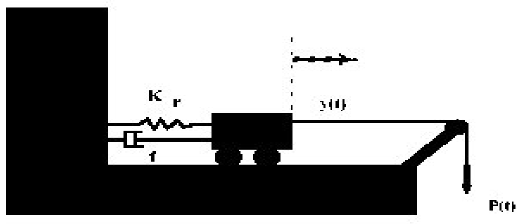
ζ = Coeficiente de amortiguamiento.

$\sigma = \zeta\omega_n$ = Factor de decrecimiento.

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ = Frecuencia amortiguada.

$\vartheta = \cos^{-1}(\zeta)$

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN



$$P(t) = F_{inercia} + F_{rozamiento} + F_{resorte}$$

$$P(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt} + f\frac{dy(t)}{dt} + k_r y(t)$$

$$P(s) = M \cdot s^2 Y(s) + f \cdot sY(s) + k_r Y(s)$$

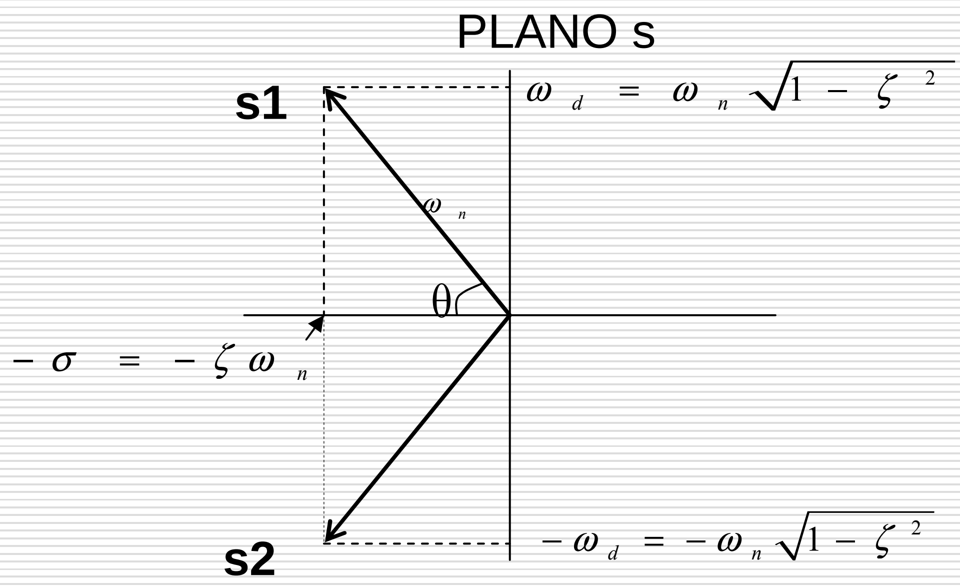
$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \left(f/M\right)s + \left(k_r/M\right)} \qquad G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k_r}{M}} \qquad K = \frac{1}{k_r} \qquad \sigma = \xi\omega_n = \frac{f}{2M}}$$

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- Polos

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



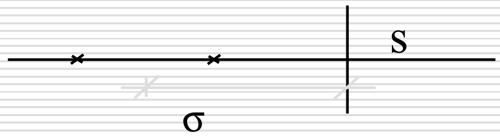
$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} =$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

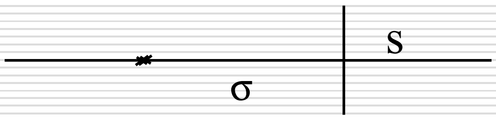
CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- Sobreamortiguado ($\zeta > 1$)



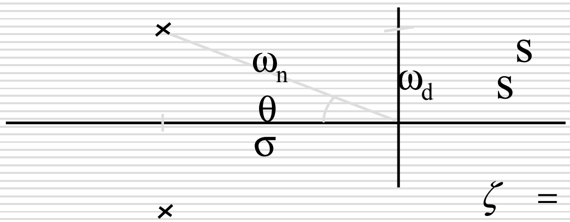
$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)



$$s = -\zeta\omega_n$$

- Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$)

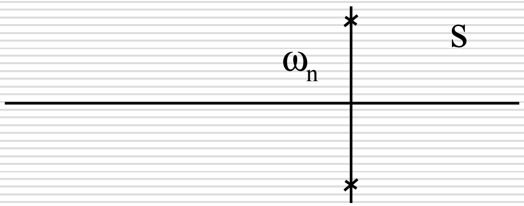


$\zeta = \cos\theta$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- Oscilador (ζ = 0)



$$s = \pm j\omega_n$$

- Inestable (ζ < 0)

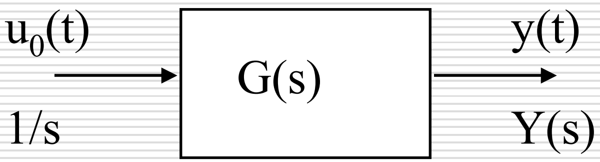
$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

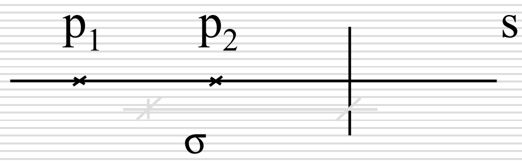
$$\alpha_i = -\zeta\omega_n > 0 \text{ (Parte real positiva)}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

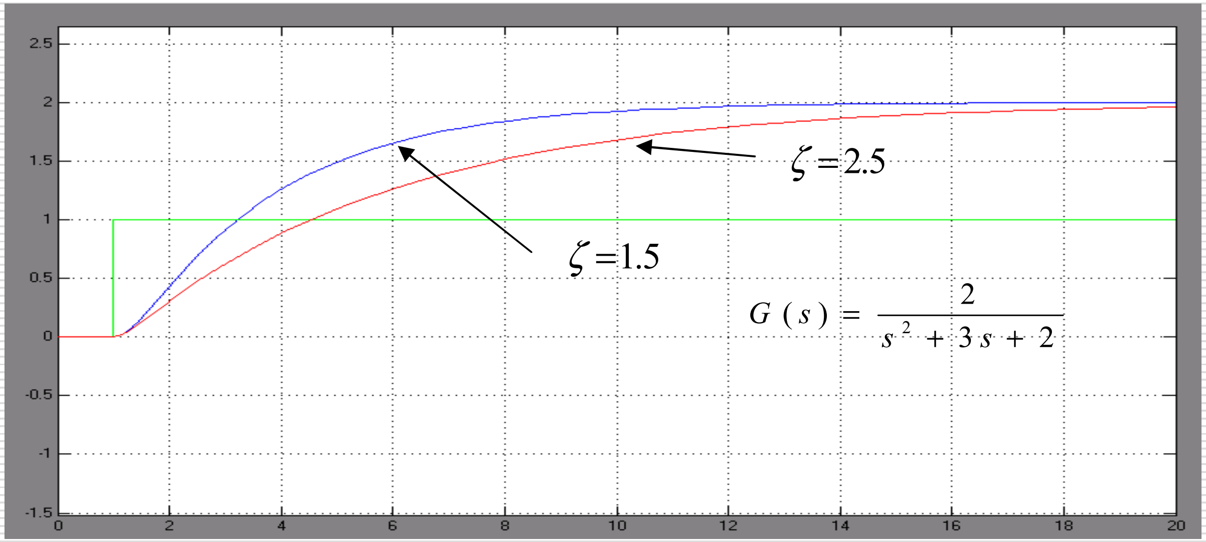
- Sobreamortiguado ($\zeta > 1$) $\Rightarrow$ Polos reales negativos
- Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) $\Rightarrow$ Polo doble real negativo
- Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$) $\Rightarrow$ Polos complejos conjugados con parte real negativa
- Oscilador ($\zeta = 0$) $\Rightarrow$ Polos imaginarios puros
- Inestable ($\zeta < 0$)S$\Rightarrow$ Polos complejos conjugados con parte real positiva

RESPUESTA A ESCALÓN DE SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS



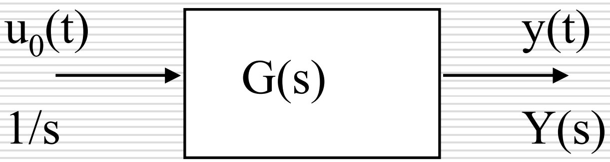


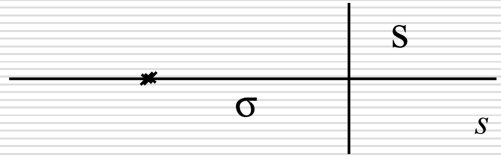
$$y(t) = k\left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right) \qquad t \geq 0$$



$$y'(0) = 0$$

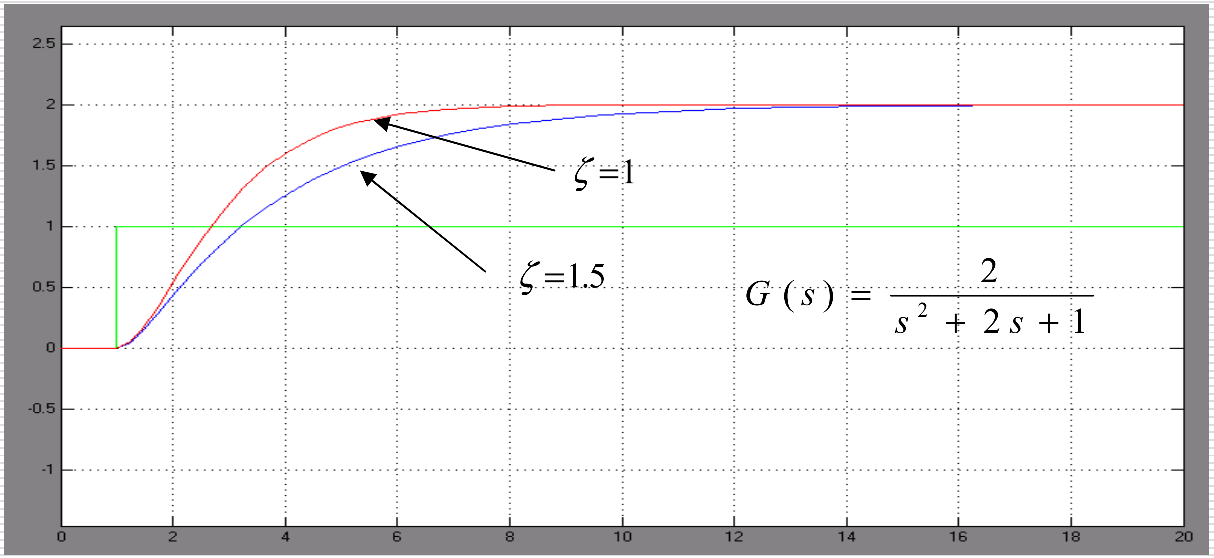
RESPUESTA A ESCALÓN DE SISTEMAS CRITICAMENTE AMORTIGUADOS





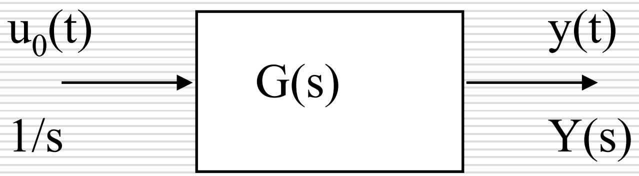
$$s = -\zeta \omega_n$$

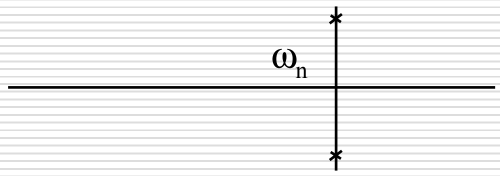
$$y(t) = k\left(1 - e^{-\sigma t}(1 + \sigma t)\right) \quad t \geq 0$$



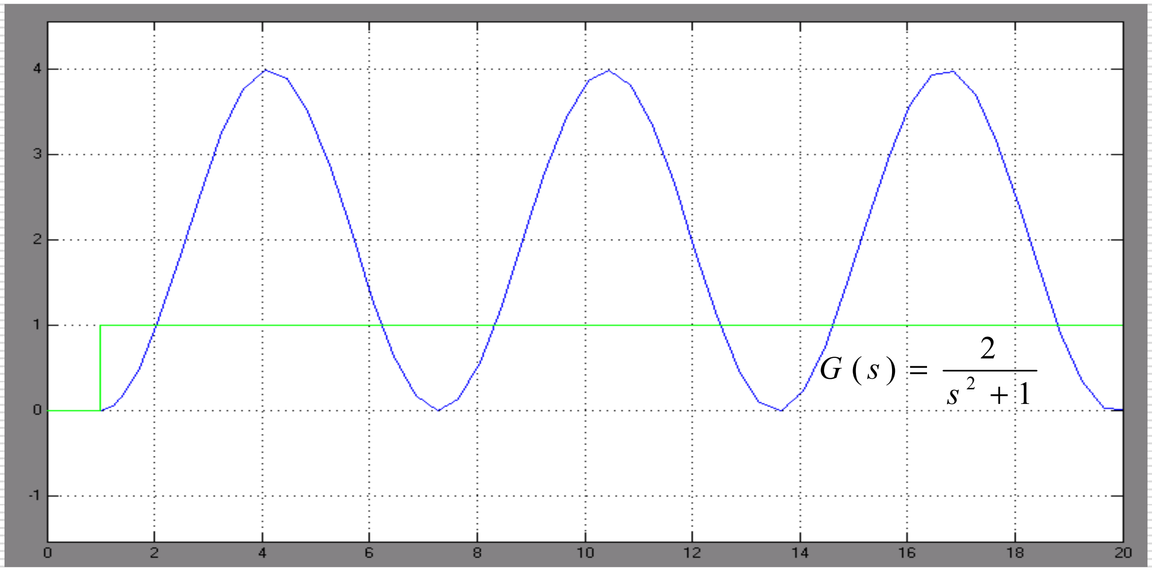
$$y'(0) = 0$$

RESPUESTA A ESCALÓN DE SISTEMAS OSCILADORES



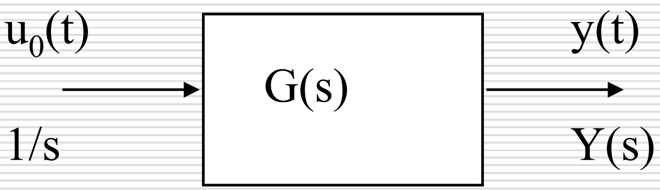


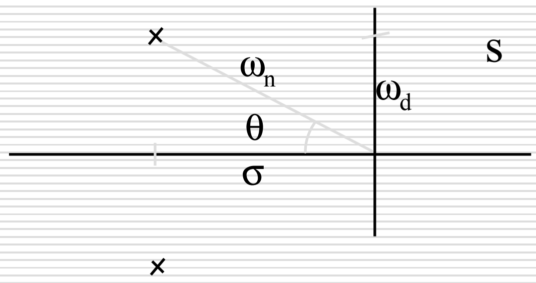
$$y(t) = k(1 - \cos(\omega_n t)) \qquad t \geq 0$$



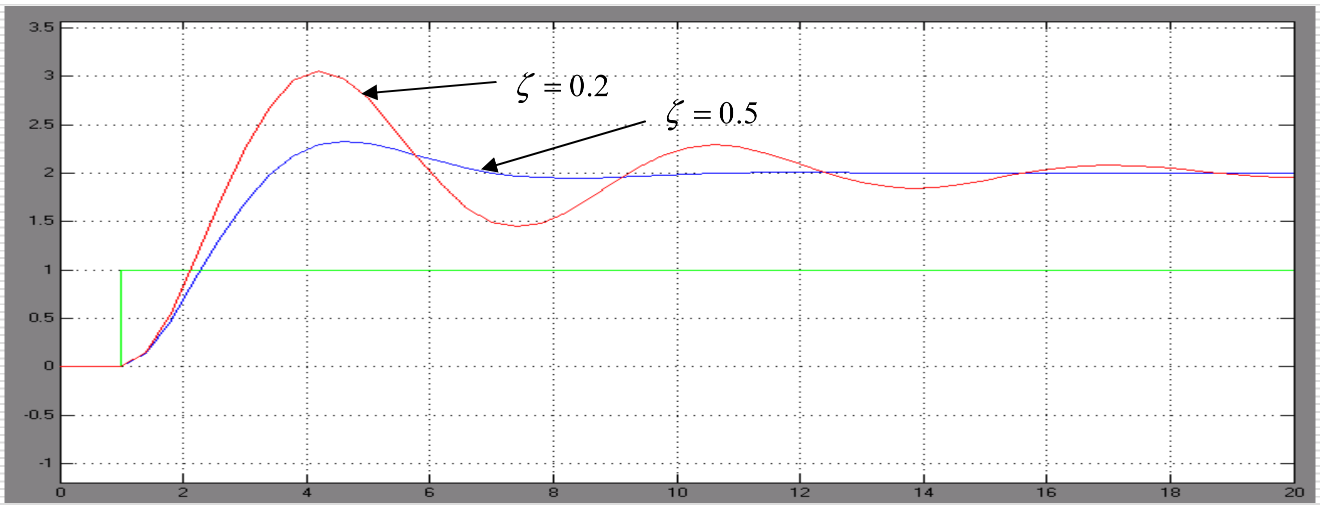
$$y'(0) = 0$$

RESPUESTA A ESCALÓN DE SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS





$$y(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \vartheta)\right) \qquad t \geq 0$$



Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

PARÁMETROS DE LA RESPUESTA A ESCALÓN

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta}}$$

$$t_r \approx \frac{\pi - \vartheta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

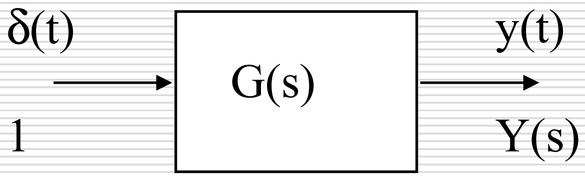
$$t_s \approx \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{\zeta\omega_n}$$

PARÁMETROS DE LA RESPUESTA A ESCALÓN

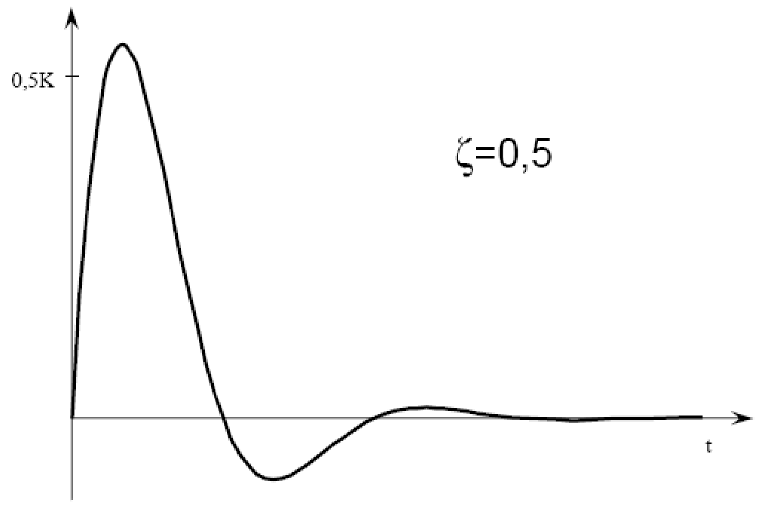
- Pendiente en el origen: $y'(0) = 0$
- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \dfrac{\pi}{\sigma}$, $(recordar \quad \sigma = \zeta\omega_{\mathrm{n}})$
- Tiempo de subida: $t_r \approx \dfrac{\pi - \vartheta}{\omega_d}$, $(recordar \quad \vartheta = \cos^{-1}(\zeta))$
- Tiempo de pico: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
- Sobreoscilación: $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\theta}}$

(menor ζ, amortiguamiento, mayor sobreoscilación)

RESPUESTA IMPULSIONAL DE SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS



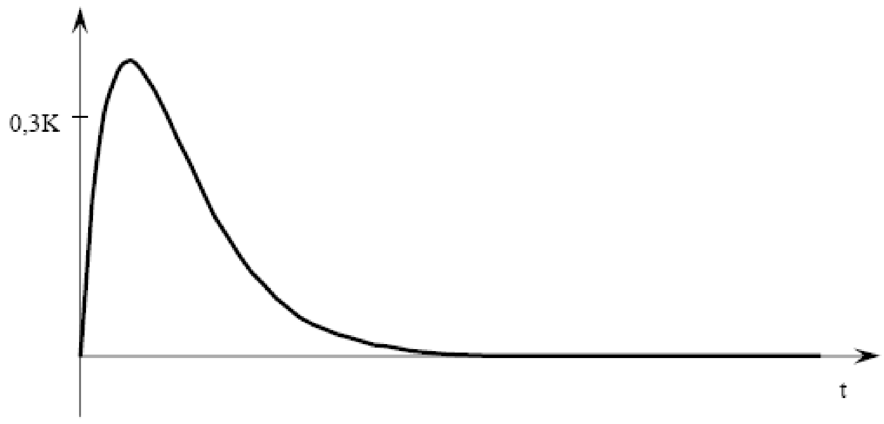
$$y(t) = g(t) = \frac{k\,\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \operatorname{sen}(\omega_d t) \qquad t \geq 0$$



RESP. IMPULSIONAL DE SISTEMA CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

$$y(t) = g(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$



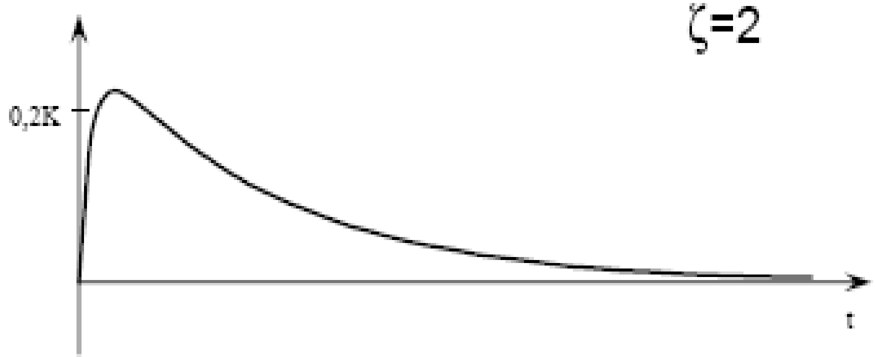
RESPUESTA IMPULSIONAL DE SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$y(t) = g(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$$

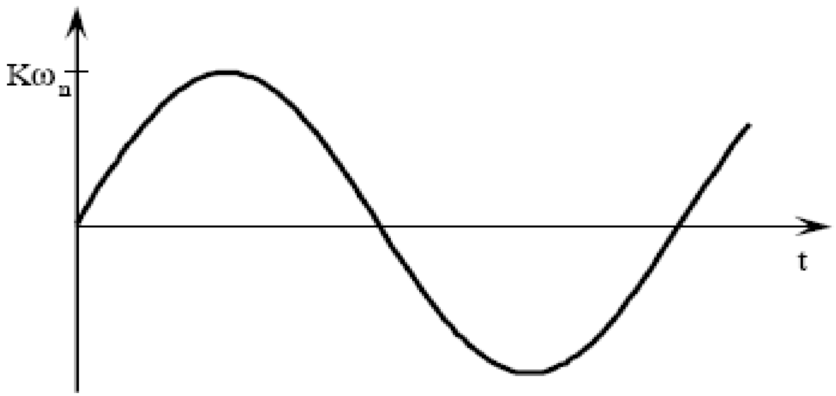
ζ=2



RESPUESTA IMPULSIONAL DE SISTEMAS OSCILADORES

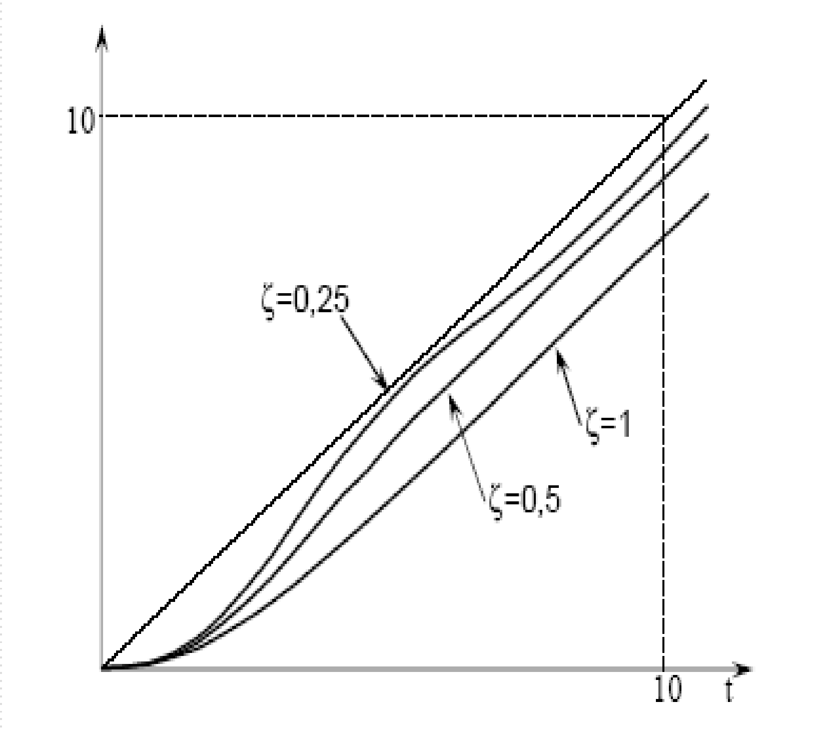
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \qquad s = \pm j\omega_n$$

$$y(t) = g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}\right] = K\omega_n \mathrm{sen}(\omega_n t)$$



RESPUESTA A RAMPA DE SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

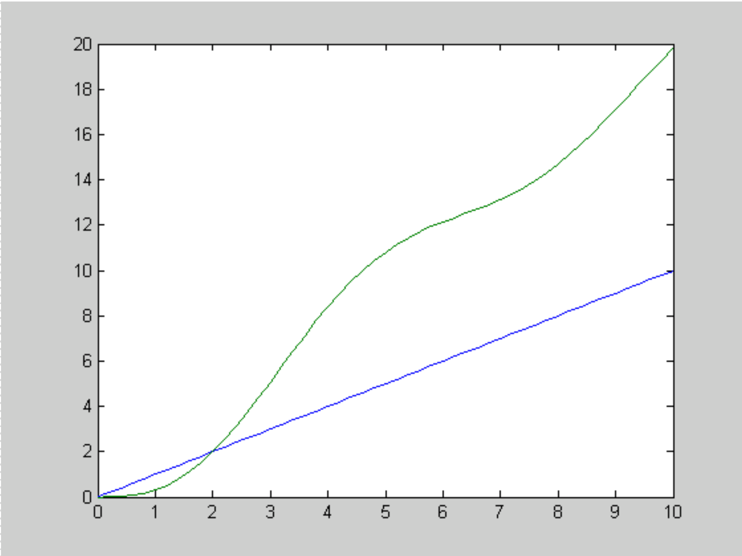
$$\xrightarrow[1/s^2]{u_0(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow[Y(s)]{y(t)}$$

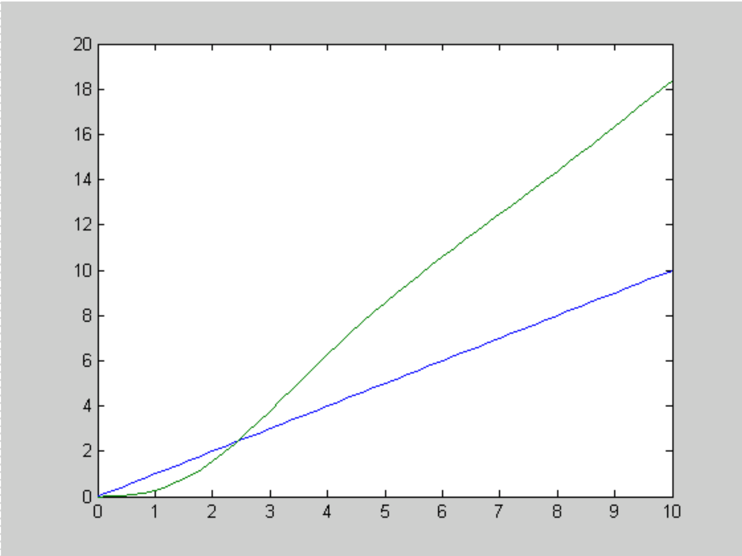


$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = k\left[\left(t - \frac{2\varsigma}{\omega_n}\right) + \frac{2\varsigma}{\omega_n}\frac{\sin(\omega_d t + \theta)}{\sin\theta}e^{-\sigma t}\right]$$

RESPUESTA A RAMPA DE SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS





$$G(s)=\frac{2}{s^2+0.2s+1}$$

$$G(s)=\frac{2}{s^2+0.8s+1}$$