ANÁLISIS FRECUENCIAL DE SIST. REALIMENTADOS. NYQUIST

ANÁLISIS FRECUENCIAL

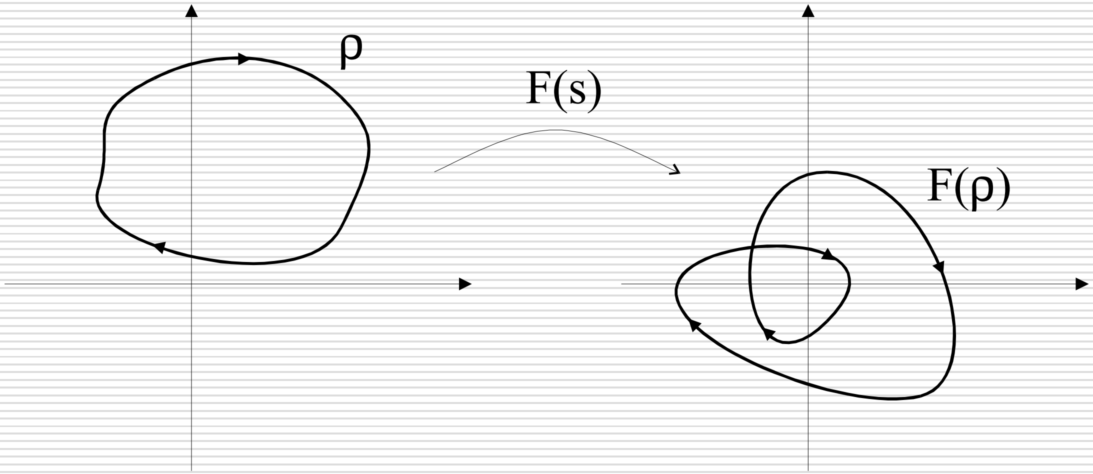
Análisis Frecuencial de Sistemas Realimentados. Nyquist

1. Análisis Frecuencial de los sistemas realimentados.
2. Principio del argumento de Cauchy.
3. Criterio de Nyquist.
4. Aplicaciones del criterio de Nyquist.
5. Estabilidad relativa. Margen de amplitud y de fase.

Bibliografía

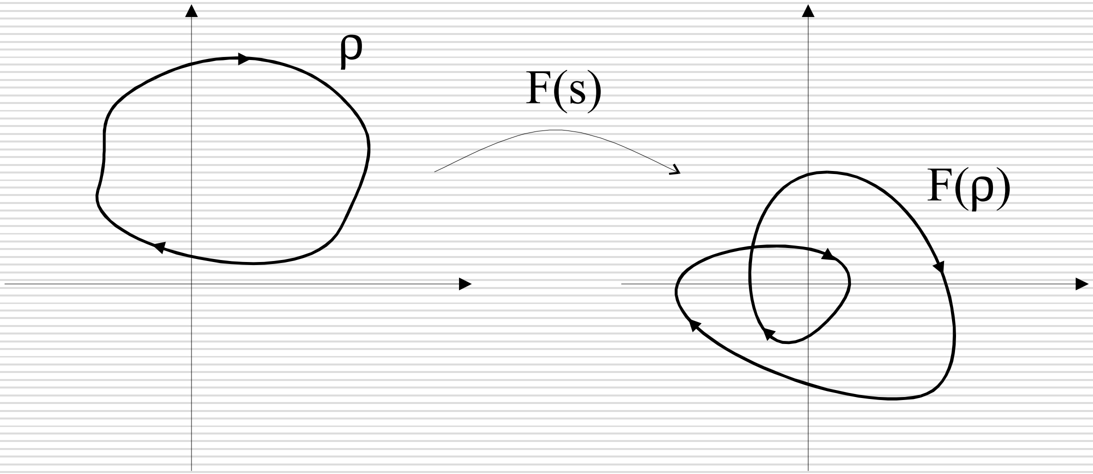
- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 8
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 9
- F. Matía y A. Jiménez, “Teoría de Sistemas”, Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 10

PRINCIPIO DEL ARGUMENTO DE CAUCHY



- Sea F(s) una función compleja de variable compleja, y ρ un camino cerrado en el plano complejo, que no pasa por puntos singulares de F(s). Entonces F(ρ) da un número de vueltas alrededor del origen igual a la diferencia entre el número de ceros y polos de F(s) dentro de ρ.

PRINCIPIO DEL ARGUMENTO DE CAUCHY



Z = número de ceros de F(s) dentro de ρ

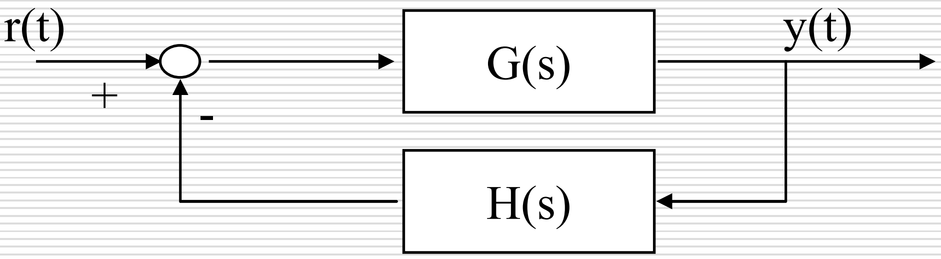
P = número de polos de F(s) dentro de ρ

N = número de vueltas de F(ρ) alrededor del origen

N = Z-P

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE NYQUIST

- El método de Nyquist nos permite estudiar la estabilidad de un sistema realimentado a partir de la respuesta frecuencial en bucle abierto



$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- El sistema será estable si 1+G(s)H(S) no tiene ceros en el semiplano positivo (los ceros de 1+G(s)H(s) son los polos de M(s))

MÉTODO DE NYQUIST

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + k\frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)} = \frac{\prod(s - p_i) + k\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)}$$

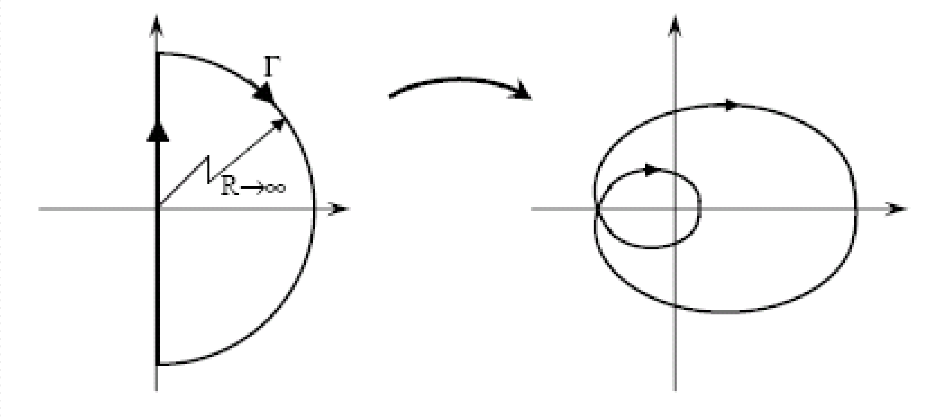
Aplicando el principio del argumento de Cauchy a la función F(s), tomando un camino que rodee el semiplano positivo (camino de Nyquist)

P número de polos positivos

Z número de ceros positivos

N número de vueltas al origen

Z=N+P



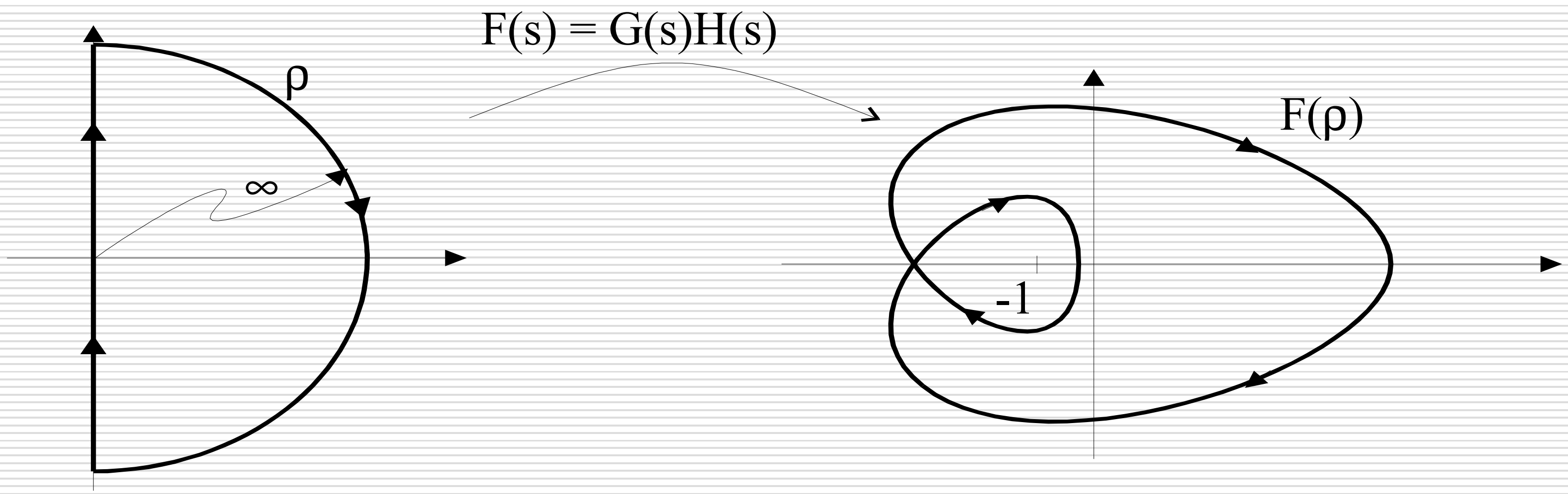
MÉTODO DE NYQUIST

- Aplicando el principio del argumento de Cauchy a la función $F(s)=1+G(s)H(s)$.
- Queremos calcular ¿cuántos ceros tiene F(s) en el semiplano positivo? (son los polos inestables de M(s))
- Tomamos un camino cerrado que rodee todo el semiplano positivo
- Trasladamos el camino de Nyquist haciendo $F(\rho)$ para todos los puntos del contorno.
- Se conoce P (polos positivos) y contamos N (vueltas al origen, signo positivo en el sentido horario), se calcula Z(ceros positivos) haciendo $Z = N+P$

Sistema estable si $Z=0$

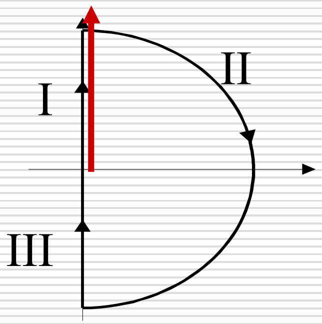
MÉTODO DE NYQUIST

- Método modificado.
  - Se pueden obtener los mismos resultados tomando como función F(s) = G(s)H(s), si se cuentan las vueltas alrededor del punto -1



CÁLCULO DE LA IMAGEN DEL CAMINO DE NYQUIST

- Camino de Nyquist – Tramo I



Tramo I:

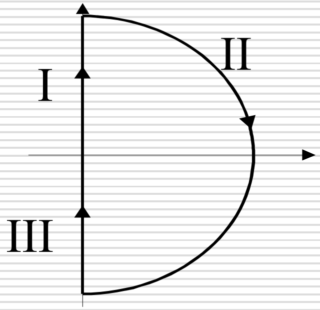
$$s = j\omega, \quad \omega \in (0, \infty)$$

La imagen corresponde con el diagrama polar

- Sustituimos s=jω en F(jω)=G(jω)H(jω)
- Calcula el módulo y su argumento de la función compleja F(jω) para todos los valores de ω, se obtiene el diagrama polar (Nyquist) para ese tramo.
- Ayuda para dibujar este tramo: dibujar el diagrama de Bode de F(jω) y después ir pasando los puntos (módulo y argumento) a un diagrama polar o de Nyquist.

CÁLCULO DE LA IMAGEN DEL CAMINO DE NYQUIST

- Camino de Nyquist – Tramo II



Tramo II

$$s = \underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}^{j\theta}} \qquad \theta: \frac{\pi}{2} \to 0 \to -\frac{\pi}{2}$$

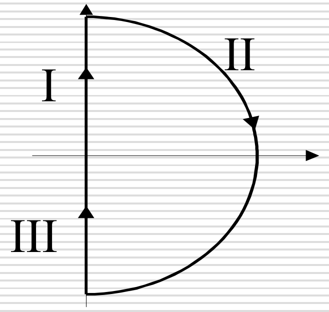
$$F(Re^{i\theta}) = G(Re^{i\theta})H(Re^{i\theta})$$

$$\lim_{R\to\infty} F(Re^{i\theta}) = \lim_{R\to\infty} K \frac{\prod_{i=1}^{m}(Re^{i\theta} - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(Re^{i\theta} - p_i)} = \begin{cases} 0 & m < n \\ K & m = n \end{cases}$$

- La imagen es un punto (el final de I)

CÁLCULO DE LA IMAGEN DEL CAMINO DE NYQUIST

- Camino de Nyquist .



- Tramo I. $s = j\omega$

  La imagen corresponde con el diagrama polar

- Tramo II.

  La imagen es un punto (el final de I)

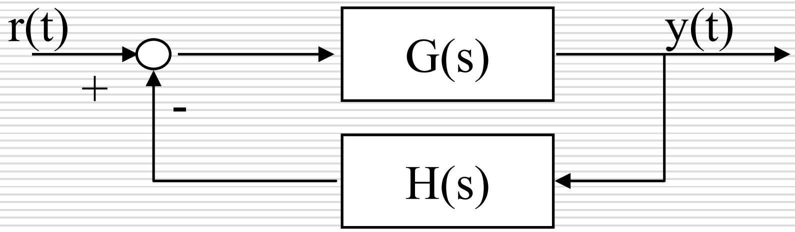
- Tramo III. $s = -j\omega$

  La imagen es la simétrica de I

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Dado un sistema en bucle cerrado

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$



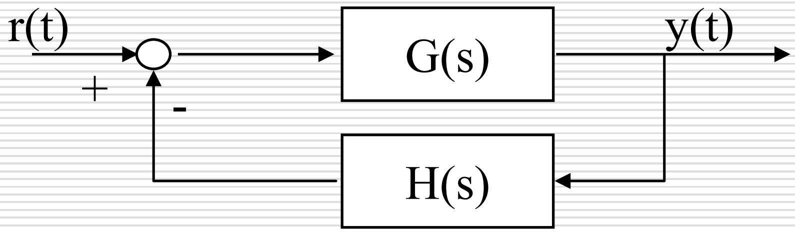
Para estudiar su estabilidad:

- Situar en el plano *s* los polos de *G(s)H(s)*, con esto ya conocemos el valor de *P* (número de polos de la función *G(s)H(s)* dentro del semiplano derecho)
- Definir el camino de Nyquist (¡singularidades!)
- Trazar la curva de variación de *G(s)H(s)* cuando se recorre el camino de Nyquist->Diagrama de Nyquist
- Contar el número de vueltas alrededor de -1 de la curva, es el valor de N (positivo en sentido horario).

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Dado un sistema en bucle cerrado

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$



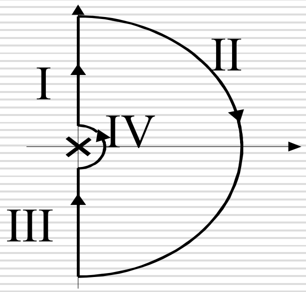
Para estudiar su estabilidad:

- *P* : número de polos de *G(s)H(s)* positivos
- Trazar el Diagrama de Nyquist
- Contar *N* el número de vueltas alrededor de -1.

- *Z=N+P*, si ***Z≠0***, hay raices de la función *F(s)* en el semiplano derecho. Es decir, ***M(s)*, tiene polos en el semiplano derecho y por tanto, el sistema es inestable**.

CÁLCULO DE LA IMAGEN DEL CAMINO DE NYQUIST

- **Puntos singulares**. Si en el camino de Nyquist hay puntos singulares (polos de *GH*), deben evitarse.
  - Ejemplo:



Tramo IV

$$s = \underset{r \to 0}{re^{j\theta}} \qquad \theta : -\frac{\pi}{2} \to 0 \to \frac{\pi}{2}$$

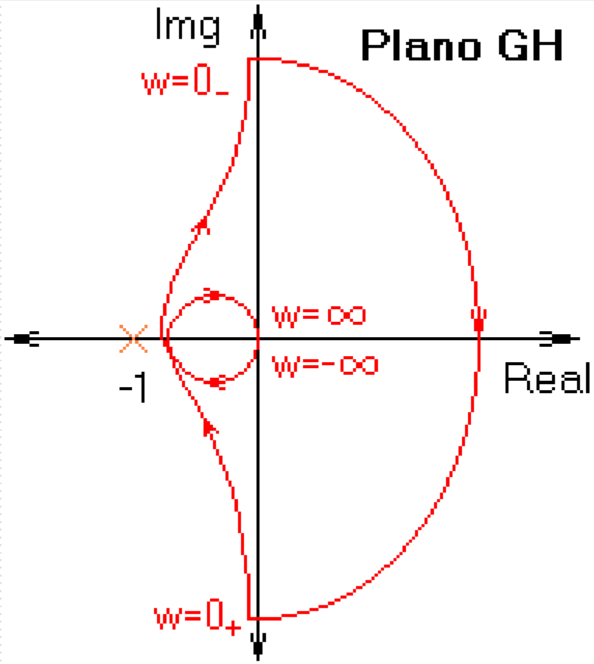
$$F(re^{i\theta}) = G(re^{i\theta})H(re^{i\theta})$$

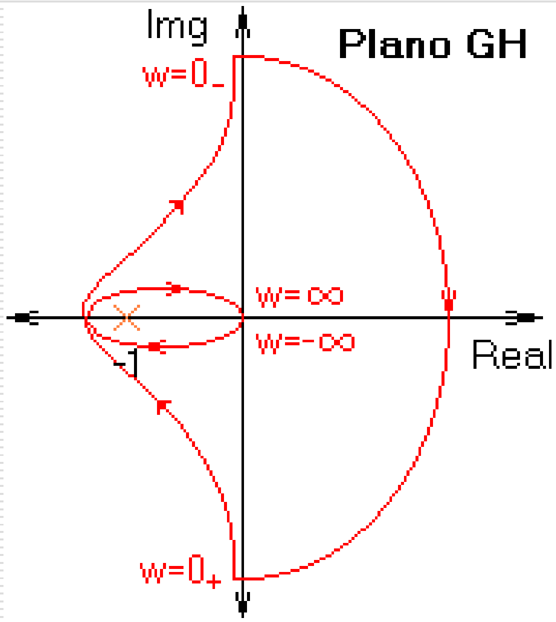
$$\lim_{r \to 0} F(re^{i\theta}) = \lim_{r \to 0} K \frac{\prod_{i=1}^{m} (re^{i\theta} - z_i)}{re^{i\theta} \prod_{i=1}^{n} (re^{i\theta} - p_i)} = \lim_{r \to 0} \frac{cte}{re^{i\theta}} = \begin{cases} |\ | \to \infty \\ \angle \to \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

La imagen es una semicircunferencia de radio infinito que une el final del tramo III con el principio del tramo I.

EJEMPLO

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(as+1)(bs+1)}$$



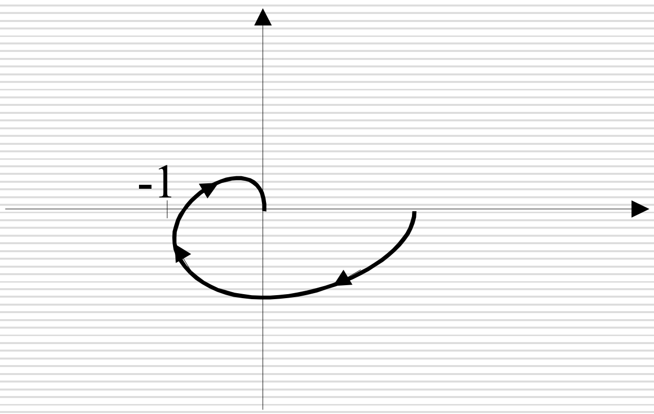


ESTABILIDAD CRÍTICA

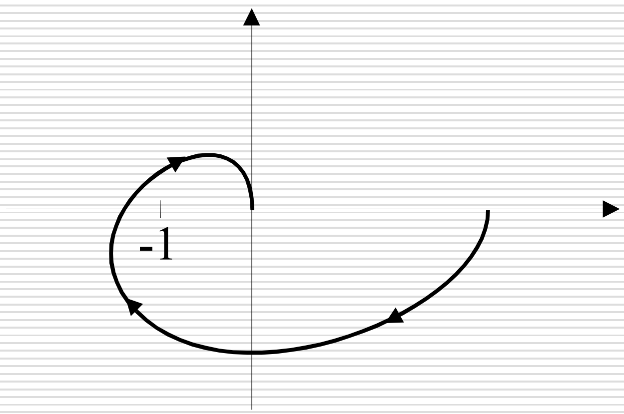
- Si el diagrama de Nyquist de $G(s)K(s)$ pasa por el punto (-1,0), existe una frecuencia ω_0 tal que $F(j\,\omega_0) = -1$, es decir, el lazo cerrado tiene polos exactamente sobre el eje imaginario. Esta situación se conoce como **condición de estabilidad crítica**.

SISTEMAS ESTABLES EN BUCLE ABIERTO

- $P = 0$
- $Z = N$. El sistema es estable si $N = 0$
- Para ver si el sistema es estable basta con dibujar la imagen del tramo I (diagrama polar) y comprobar que corta al eje real a la derecha de -1



Estable



Inestable

Estabilidad relativa

Estabilidad relativa:

- Estudia la lejanía de un sistema a la situación de inestabilidad.

Objetivos a estudiar:

- Determinar una medida sobre la estabilidad de un sistema en el que se tenga en cuenta:
  - La cantidad en que se puede aumentar la ganancia manteniendo al sistema estable.
  - El desfase que puede introducir el sistema para que la respuesta del sistema comience a oscilar.

ESTABILIDAD RELATIVA

- En el diseño de sistemas de control es deseable obtener alguna medida cuantitativa de cuan lejos de ser inestable está un lazo de realimentación; es decir, **cuantificar la estabilidad relativa del lazo**.

- Esta cuantificación puede lograrse definiendo medidas que describan la distancia de la respuesta en frecuencia al punto de estabilidad crítica (-1;0).

- Para sistemas de fase mínima (P=0) en bucle abierto, si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia *G(s)H(s)* presenta frecuencias en las que la ganancia es positiva (*<0 dB*)a la vez que la fase tiene un valor inferior a *-180º*, el sistema realimentado negativamente, *M(s)*, será inestable.

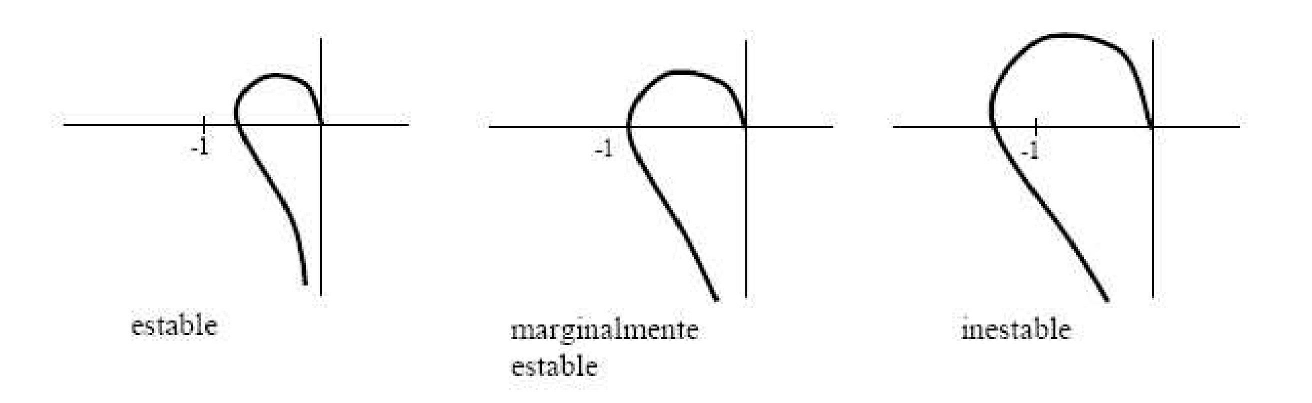
ESTABILIDAD RELATIVA

- **Margen de fase (γ):** Es el ángulo (en grados) que habría que restarle a la fase de *G(s)H(s)* para volver inestable a *M(s)*. Sobre las representaciones gráficas de *G(s)H(s)*, es el ángulo que le falta a la fase para llegar a -180º cuando la ganancia es 1 (0 dB).

- **Margen de ganancia (k_g):** Es el valor por el que habría que multiplicar (o los dB que habría que sumar) a la ganancia de *G(s)H(s)* , para que M(s) se vuelva inestable. Es decir, para que cuando la fase sea -180º la ganancia fuese 1 (0 dB).

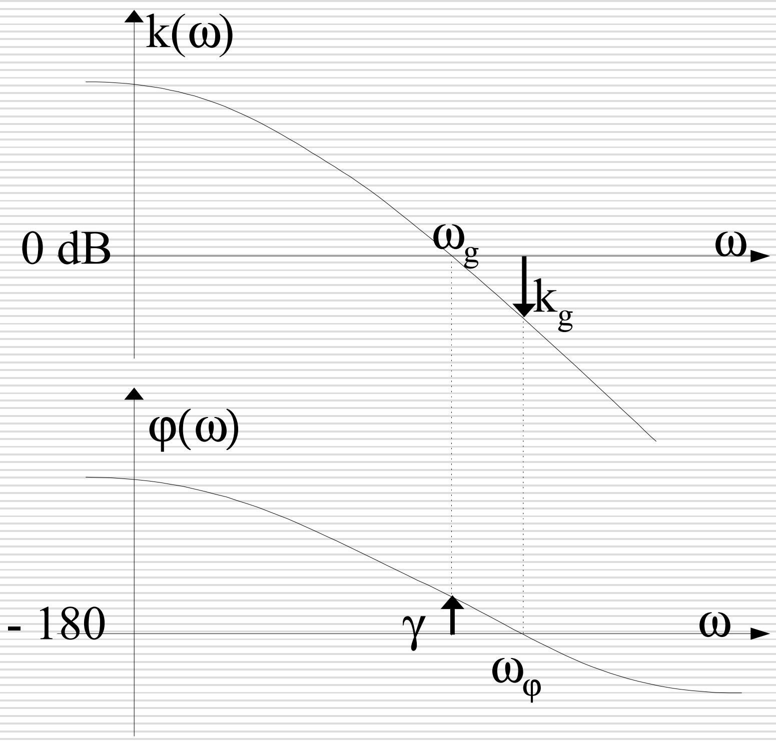
ESTABILIDAD RELATIVA SOBRE NYQUIST

- Para un sistema estable, cuanto más próximo se encuentre su diagrama de Nyquist al punto (-1,0), menor será su estabilidad.



ESTABILIDAD RELATIVA

- Margen de fase (γ) y margen de ganancia (k_g)



$$\arg(G(j\varpi_{\varphi})H(j\varpi_{\varphi})) = -180^{o}$$

$$\left|G(j\varpi_{\varphi})H(j\varpi_{\varphi})\right|_{dB} + k_{g\,dB} = 0$$

$$k_{g\,dB} = -\left|G(j\varpi_{\varphi})H(j\varpi_{\varphi})\right|_{dB}$$

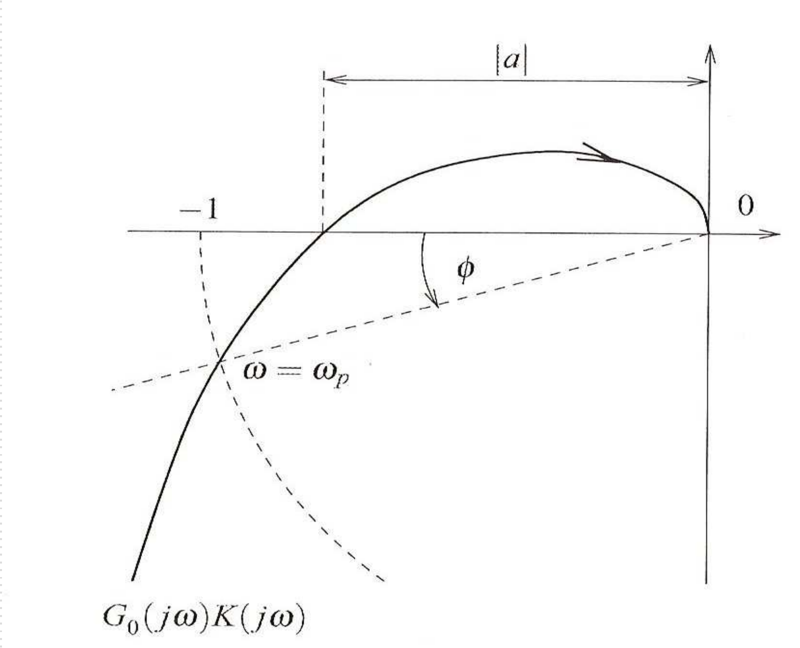
$$k_{g} = \frac{1}{\left|G(j\varpi_{\varphi})H(j\varpi_{\varphi})\right|}$$

$$\left|G(j\varpi_{g})H(j\varpi_{g})\right| = 1 = 0\ dB$$

$$\arg(G(j\varpi_{g})H(j\varpi_{g})) - \gamma = -180^{o}$$

$$\gamma = 180^{o} + \arg(G(j\varpi_{g})H(j\varpi_{g}))$$

ESTABILIDAD RELATIVA SOBRE NYQUIST

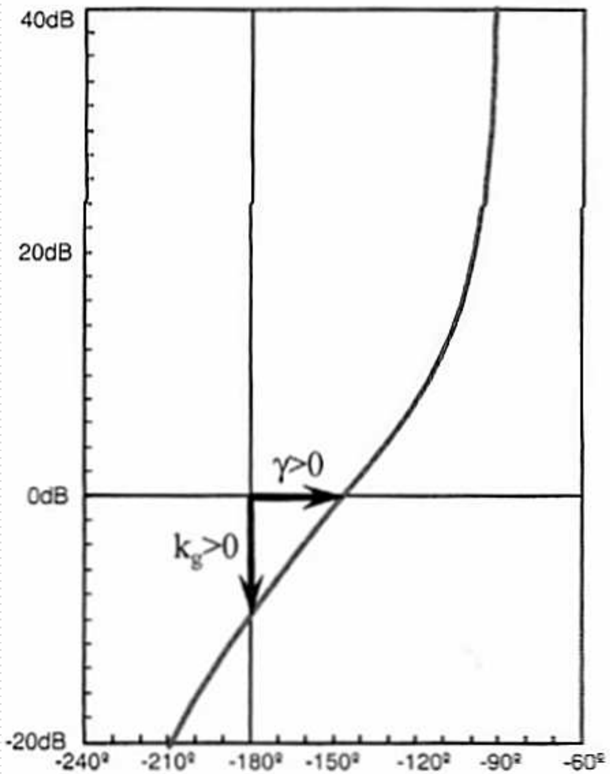


$$K_g \triangleq -20\log_{10}(|a|) \rightarrow K_g(dB) + 20\log|a| = 20\log(1) = 0$$

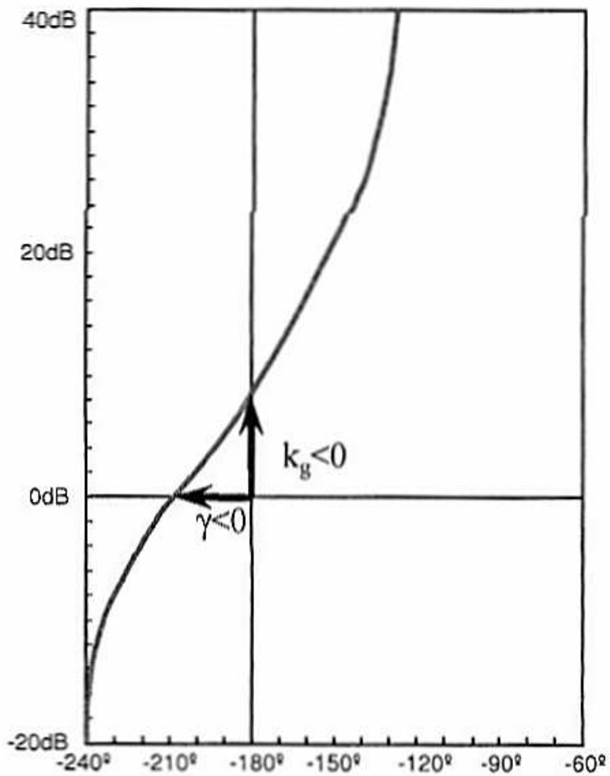
$$K_g(dB) = -20\log\left|G(j\varpi_\varphi)H(j\varpi_\varphi)\right|$$

$$\gamma \triangleq \phi$$

ESTABILIDAD RELATIVA EN EL DIAGRAMA MAGNITUD-FASE



a) Sistema estable



b) Sistema inestable

ESTABILIDAD RELATIVA

- Los márgenes de fase y ganancia se miden sobre el sistema en bucle abierto.
- El margen de ganancia/fase representa cuanto se puede aumentar la ganancia/desfase del sistema en bucle abierto sin que el sistema en bucle cerrado se haga inestable.

- $K_g<1$ el sistema es inestable
- $K_g=1$ el sistema es marginalmente estable
- $K_g>1$ el sistema es estable

- Expresado en dB, el sistema es estable para $K_g>0dB$

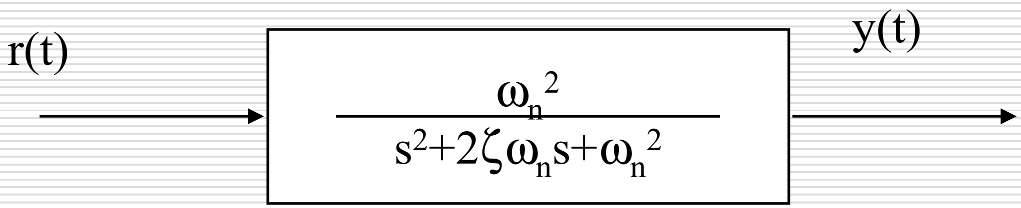
ESTABILIDAD RELATIVA vs. RESPUESTA TRANSITORIA

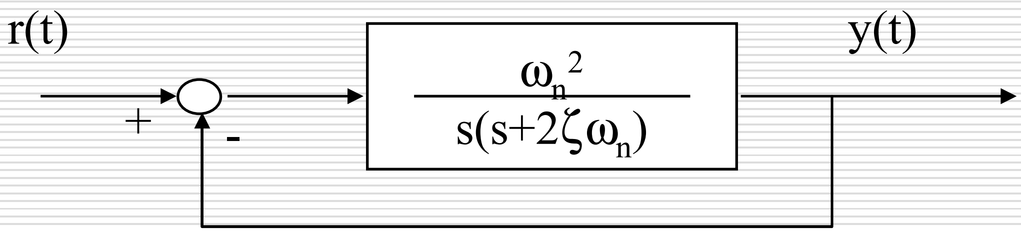
$$\gamma \approx 100\zeta \qquad 0 < \zeta < 0,7$$

$$t_s \approx \frac{2\pi}{\varpi_g \operatorname{tg}(\gamma)} = \frac{1}{f_g \operatorname{tg}(\gamma)}$$

- Conclusiones:
  - En sistemas subamortiguados, el margen de fase (γ) está directamente relacionado con el coeficiente de amortiguamiento (ζ).
    - Al disminuir el margen de fase aumenta la sobreoscilación.
  - Al aumentar la frecuencia de corte de ganancia (ω_g) y el margen de fase (γ), el sistema se hace más rápido (disminuye el tiempo de estabilización t_s)

ESTABILIDAD RELATIVA vs. RESPUESTA TRANSITORIA





$$M(s) = \frac{\varpi_n^2}{s^2 + 2\zeta\varpi_n s + \varpi_n^2} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\dfrac{\varpi_n^2}{s(s + 2\zeta\varpi_n)}}{1 + \dfrac{\varpi_n^2}{s(s + 2\zeta\varpi_n)}}$$

$$G(s) = \frac{\varpi_n^2}{s(s + 2\zeta\varpi_n)}$$

ESTABILIDAD RELATIVA vs. RESPUESTA TRANSITORIA

$$|G(j\varpi_g)| = \frac{\varpi_n^2}{\sqrt{\varpi_g^4 + (2\zeta\varpi_n\varpi_g)^2}} = 1$$

$$\varpi_n^4 = \varpi_g^4 + (2\zeta\varpi_n\varpi_g)^2$$

$$\left(\frac{\varpi_g}{\omega_n}\right)^4 + 4\zeta^2\left(\frac{\varpi_g}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\varpi_g}{\omega_n}\right)^2 = -2\zeta^2 \pm \sqrt{4\zeta^4 + 1} = -2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}$$

(el signo - da una ω_g imaginaria)

$$\frac{\varpi_g}{\omega_n} = \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}} \qquad (1)$$

(el signo - da una ω_g negativa)

$$\gamma = 180^o + \arg(G(j\varpi_g)) = 180^o - 90^o - tg^{-1}\frac{\omega_g}{2\zeta\varpi_n} =$$

$$= 90^o - tg^{-1}\frac{\omega_g}{2\zeta\varpi_n} = tg^{-1}\frac{2\zeta\varpi_n}{\omega_g} \qquad (2)$$

ESTABILIDAD RELATIVA vs. RESPUESTA TRANSITORIA

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{\zeta \varpi_n}$$

$$\zeta \varpi_n = \frac{\pi}{t_s} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\gamma = tg^{-1} \frac{2\zeta\varpi_n}{\omega_g} = tg^{-1} \frac{2\pi}{t_s \omega_g}$$

$$\varpi_g = \frac{2\pi}{t_s\, tg(\gamma)}$$

En el caso general (no un sistema de 2º orden sin ceros)

$$\varpi_g \approx \frac{2\pi}{t_s\, tg(\gamma)}$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$\gamma = tg^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}} \approx 100\zeta \qquad (0 < \zeta < 0,7)$$