



**Universidad Carlos III de Madrid**  
**Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática**

# **SEÑALES Y SISTEMAS**

Práctica 2

**Estudio Frecuencial de Sistemas Continuos  
de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> Orden**

# 1 – Introducción Teórica

Se conoce como *respuesta frecuencial* de un sistema a la respuesta del mismo, en régimen permanente, cuando se utiliza como señal de entrada una senoide.

La respuesta de un sistema lineal estable a una señal de excitación de tipo senoidal, es otra señal senoidal de la misma frecuencia que la de entrada, pero que difiere de ella en los valores de su amplitud y de su ángulo de fase. La amplitud de la señal de salida y su ángulo de fase son función de la frecuencia.

- La señal senoidal que aplicaremos a nuestro sistema vendrá dada por:

$$r(t) = A * \text{sen}(\omega t) \quad (1)$$

siendo  $A$  la amplitud y  $\omega$  (rad/s) la pulsación de la señal.

- La señal de salida es también senoidal en la medida en que el sistema es lineal. La representamos por:

$$y(t) = B * \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (2)$$

siendo  $B$  la amplitud y  $\phi$  el desfase en radianes.

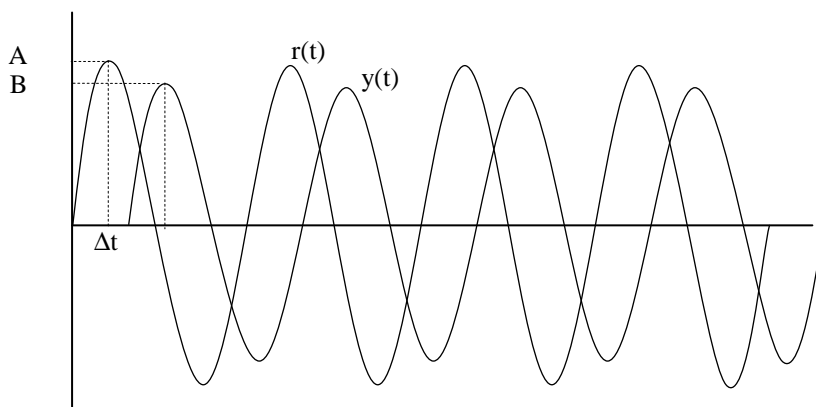


Figura 1.- Representación de la salida de un sistema lineal frente a una entrada senoidal.

- La representación gráfica de la respuesta en frecuencia se denomina *diagrama de Bode*.

La función de transferencia senoidal  $G(j\omega)$  es una función compleja que puede ser representada por sus curvas de **módulo** (ganancia) y de **argumento** (ángulo de fase).

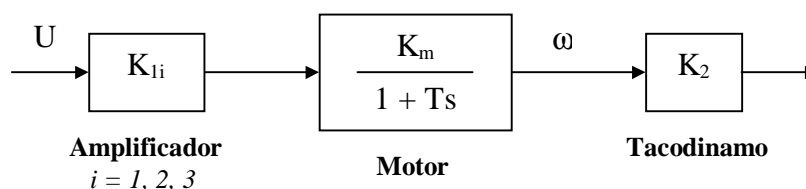
En los diagramas de Bode se representa la función de transferencia  $G(j\omega)$  mediante dos curvas separadas. En una de ellas se muestra la ganancia en escala logarítmica  $|G(j\omega)|_{dB}$ , respecto de la frecuencia, también en escala logarítmica; y en la otra el ángulo de fase  $\psi(j\omega)$ , en grados en escala natural, respecto de la frecuencia en escala logarítmica. En un papel semilogarítmico (como el que se incluye al final de la práctica) la propia subdivisión del papel realiza la escala logarítmica de la frecuencia.

Para escala de ganancias (módulos) se suele utilizar como unidad de medida el decibelio:

$$|G(j\omega)|[dB] \equiv 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log A(\omega) \quad (3)$$

## 2 – Objetivo de la Práctica

Se pretende realizar un análisis frecuencial de dos sistemas distintos mediante análisis de su respuesta (2) ante una entrada senoidal de amplitud  $A$  y frecuencia variable  $\omega$  (1) es decir mediante sus *respuestas en frecuencia*. Así mismo, se pretende utilizar dichos análisis para adaptar los dos sistemas reales a un modelo de Sistema de Primer Orden y otro modelo de Sistema de Segundo Orden, respectivamente. El objetivo principal de esta práctica es que el alumno aprenda a sacar el máximo de información de un sistema a partir de su respuesta en frecuencia. Ambos sistemas que se van a analizar constan de un motor de corriente continua que gira a una velocidad dependiente de la tensión de alimentación. La maqueta empleada es la misma que en la **práctica 1**; en el guión de dicha práctica aparecen las características del motor y un esquema del panel de conexiones. En dicha práctica, este sistema se ha modelado como un **sistema de primer orden** cuyo diagrama de bloques del modelo viene representado por la *figura 2*. En esta práctica queremos comprobar en qué medida el motor se comporta como un sistema de primer orden (modelo)



*Figura 2.- Diagrama de bloques de la maqueta de la práctica.*

En la figura anterior  $K_{1i}$  representa cada una de las ganancias del amplificador y  $K_2$  es la constante de la tacodinamo. El sistema a considerar tiene por ganancia estática  $K'_i$  que es igual al producto  $K_{1i} \cdot K_m \cdot K_2$ , y la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{K'_i}{Ts + 1} \quad (4)$$

En la **práctica 1** también analizábamos el sistema realimentado (*figura3*), al que asociamos un modelo de **sistema de segundo orden** cuya Función de Transferencia, en relación al sistema de primer orden es:

$$M(s) = \frac{\frac{K'_i}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K'_i}{T}} \quad (5)$$

donde  $K'_i = K_{1i} K_m K_2$

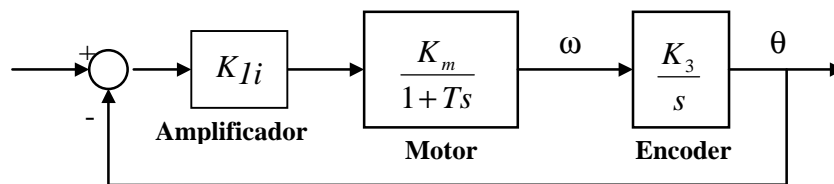


Figura 3.- Sistema realimentado.

Vamos a utilizar como señal de excitación del motor una senoide de frecuencia variable que obtendremos a través de un generador de señal.

Para ajustar las posibles ganancias del amplificador se dispone de un potenciómetro ubicado en la caja de bornas junto con el resto de conectores, que nos permitirán conectar las entradas y salidas de los diferentes módulos, así como ver mediante el osciloscopio la respuesta del sistema. En la parte izquierda del panel de conexiones hay un selector de modo de funcionamiento. Para esta práctica **debe seleccionarse ±5 V como rango de entrada.**

Para realizar el análisis de ambos sistemas se deberán dibujar sus diagramas de Bode de amplitud y fase, considerando que la salida del sistema, cuando a la entrada se la presenta una señal senoidal, es otra senoide de la misma frecuencia y desfasada un cierto ángulo respecto de la primera, función de la frecuencia.

Es aconsejable medir las tensiones en el osciloscopio **de pico a pico**, para así poder filtrar posibles asimetrías del motor en cuanto a su sentido de giro. Así mismo, se aconseja también medir los desfases temporales entre los máximos de las dos señales.

### 3 – Sistema de Primer Orden

**A.-** Representar en papel semilogarítmico los puntos experimentales referidos a la *Ganancia* en dB y *Fase* en grados frente *frecuencia angular* ( $G_{dB}$  vs.  $\omega(\text{rad/s})$  ;  $\Phi(^{\circ})$  vs.  $\omega(\text{rad/s})$ )

**B.-** Sobre los puntos experimentales representados dibujar los diagramas asintóticos de Bode **tanto en ganancia como en fase**. Obtener gráficamente, los parámetros del sistema (constante de tiempo  $T$  y ganancia  $K$ )

**C.-** Comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores utilizando MATLAB.

Ejemplo de aplicación:

Sea el sistema de función de transferencia:  $G(s) = K/(Ts+1)$

- definimos los polinomios del numerador y denominador (MATLAB):

- » num=[ K ]
- » den=[ T 1 ]
- » bode ( num , den )

## 4 – Sistema de Segundo Orden

A.- Representar en papel semilogarítmico los puntos experimentales referidos a la *Ganancia* en dB y *Fase* en grados frente *frecuencia angular* ( $G_{dB}$  vs.  $w(\text{rad/s})$ ;  $\Phi(^{\circ})$  vs.  $w(\text{rad/s})$ ) para las posiciones de la ganancia del amplificador  $K_1$  y  $K_3$

B.- Sobre los puntos experimentales representados dibujar los diagramas asintóticos de Bode **tanto en ganancia como en fase**. Analizar las figuras obtenidas para concluir qué tipo de sistema de segundo orden se ajusta mejor a los datos empíricos: *polos reales distintos*, *polo doble*, o *polos complejos conjugados*. A partir de este análisis obtener unos valores de los parámetros del modelo Sistema de Segundo Orden:  $w_n$  y  $\zeta$  (frecuencia natural del sistema y coeficiente de amortiguamiento)

C.- Comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores utilizando MATLAB. Ejemplo:

```
> num=[wn^2]
> den=[1 2*d*wn wn^2]
> bode(num,den)
```

### NOTAS

Para realizar el diagrama de Bode, comenzar con una frecuencia de 0.1 Hz, e ir aumentando.

Seleccionar una amplitud suficiente para que el motor gire con soltura, pero sin llegar a la velocidad máxima. Esta amplitud será distinta para las posiciones 1 y 3 del potenciómetro, ya que varía la ganancia total del sistema (con la misma tensión de entrada, el motor gira mucho más deprisa en la posición 3 que en la 1).

## 5 – Conclusión

Realizar una conclusión final relacionada a los resultados obtenidos en la práctica.

## 6 – Visión General del Alumno

Comentarios personales relativos a la práctica.

## APENDICE

### Diagrama de Bode de un sistema de primer orden

Dado un sistema de primer orden, cuya función de transferencia viene dada por la fórmula (4) operamos para obtener una expresión de su módulo y de su fase:

$$G(j\omega) = \frac{K'_i}{j\omega T + 1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K'_i - 20 \log(T\omega + 1) \\ \arg(G(j\omega)) = -\arctg(\omega T) \end{cases} \quad (6)$$

El diagrama de Bode de un sistema de primer orden para el caso de  $K'_i = 2$  y  $T = 0.2$  es como sigue:

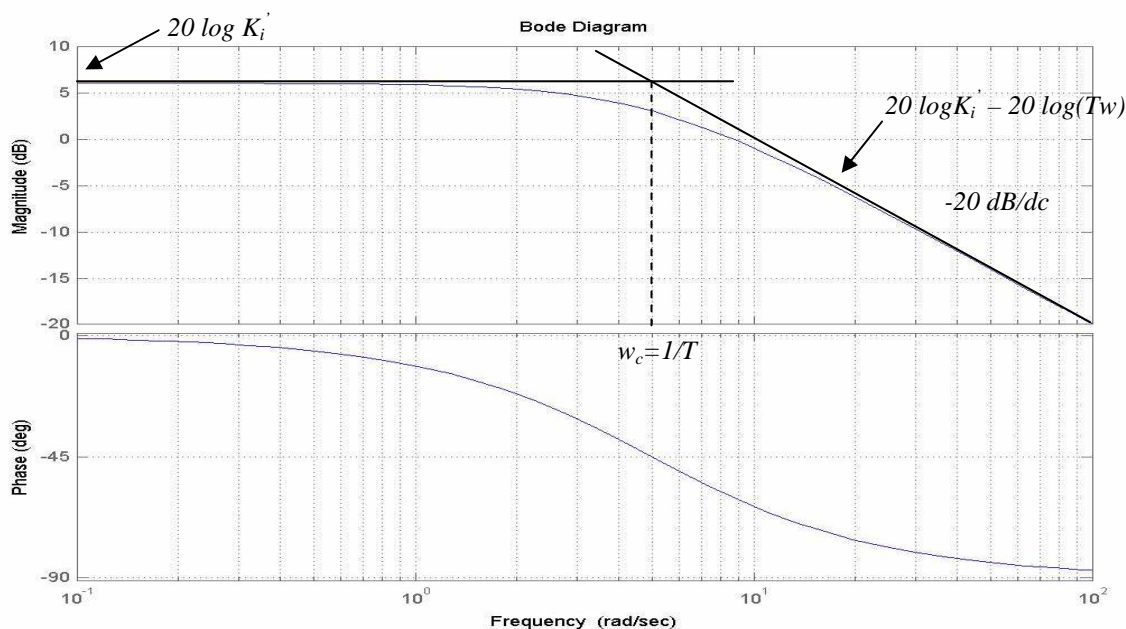


Figura 4.- Diagrama de Bode de un sistema de Primer Orden

Observando la gráfica, se observa que existen dos comportamientos lineales, uno para frecuencias bajas y otro para frecuencias altas. En ambos casos la curva tiende a una **asíntota**. Para verlo analíticamente operamos en la expresión (6) aplicando límites en la expresión de la amplitud:

$$\omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| \approx 20 \log K' \quad (7.1)$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| \approx 20 \log K' - 20 \log(T\omega) \quad (7.2)$$

Estas expresiones son dos asíntotas. (7.1) es una recta paralela al eje de abcisas y (7.2) es otra recta de pendiente  $-20 \text{ dB/dc}$

### Diagrama de Bode de un sistema de segundo orden

La forma canónica de un sistema de segundo orden es la siguiente:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8)$$

Como sistema de segundo orden tiene dos polos:

$$\omega_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow G(s) = \frac{K\omega_1\omega_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} \quad (9)$$

Atendiendo a la forma de estos polos distinguimos dos casos:

#### A. Polos reales:

Ocurren para  $\xi \geq 1$ .

##### a) Polos reales distintos:

Cuanto mayor sea  $\xi$ , más separados estarán los polos entre sí. Para polos suficientemente separados, en el diagrama de Bode podemos entonces establecer tres asíntotas, tal y como se muestra en la figura 5, para el caso de  $K=1$ ,  $d=20$  y  $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$

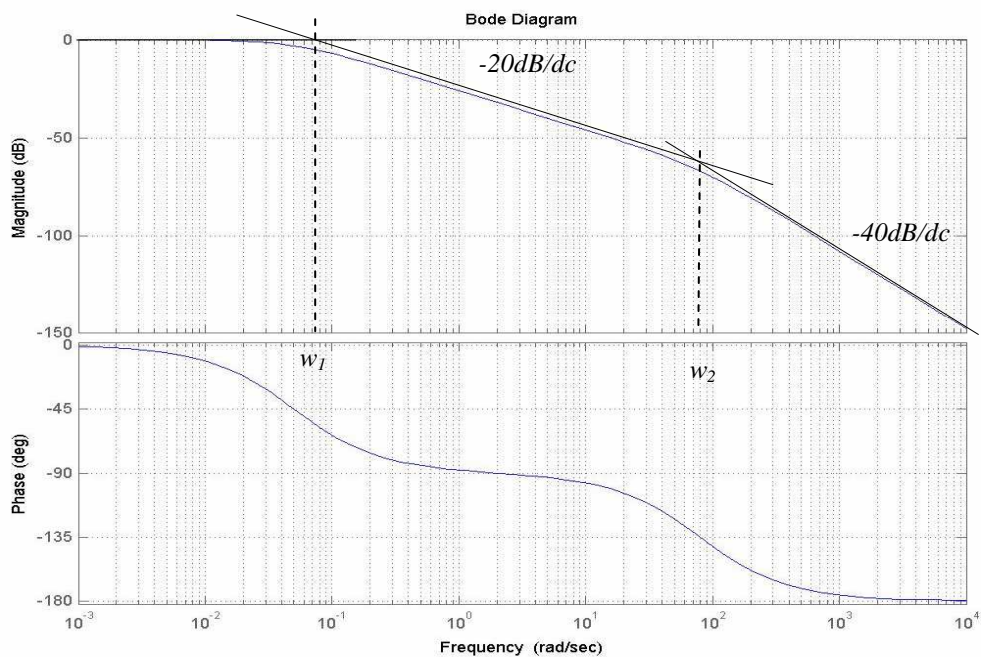


Figura 5.- Diagrama de Bode para un sistema de Segundo Orden con polos reales distintos

En este caso, al identificar los polos  $w_1$  y  $w_2$  queda identificada la Función de Transferencia del sistema.

b) *Polo doble:*

Cuando, en la práctica, los polos están suficientemente juntos, en una primera aproximación se les puede considerar iguales. Gráficamente no se puede establecer más que dos asíntotas, tal y como se muestra en la figura 6, una paralela al eje de abscisas y otra de  $-40dB/dc$ . Analíticamente, dos polos reales iguales (polo doble) ocurre para el caso límite  $\xi = 1$ . En la figura 6 se escogió para la representación  $w_n = 2 \text{ rad/s}$

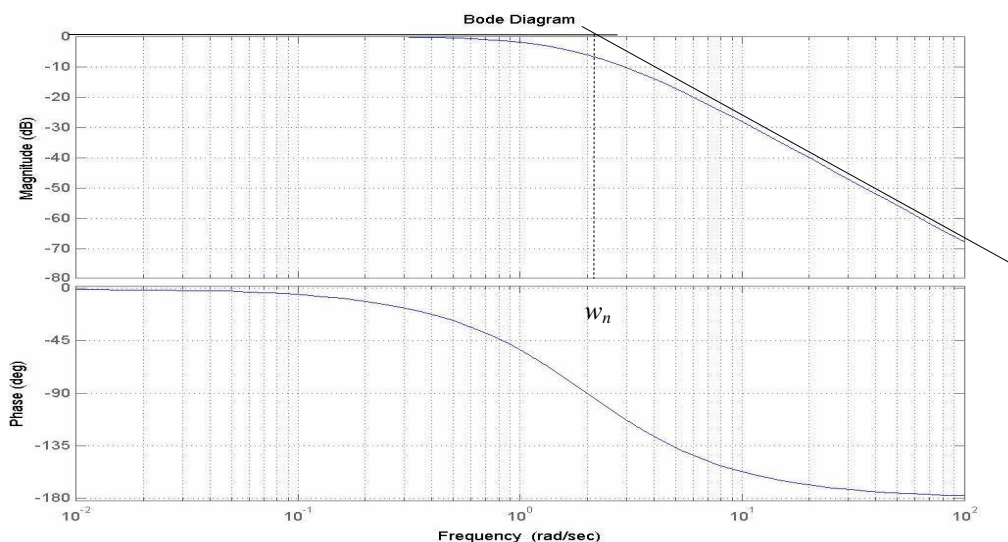


Figura 6.- Diagrama de Bode para un sistema de Segundo Orden con polos reales iguales

**B. Polos complejos conjugados:** para  $0 < \xi < 1$

Este caso resulta de especial interés, pues en el diagrama de Bode aparece un fenómeno de resonancia, que se manifiesta como un pico  $\Delta G_{dB}$  en el diagrama de amplitud. Analíticamente se puede ver que dicho pico ocurre cuando:

$$w = w_n \quad (10)$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=w_n} = \frac{K}{2\xi} \Rightarrow \Delta G_{dB} = 20 \log \frac{1}{2\xi} \quad (11)$$

De lo que se deduce que el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  se puede obtener gráficamente. Obsérvese la figura 7, para un sistema con  $\xi = 0.1$   $K = 1$   $w_n = 2 \text{ rad/s}$



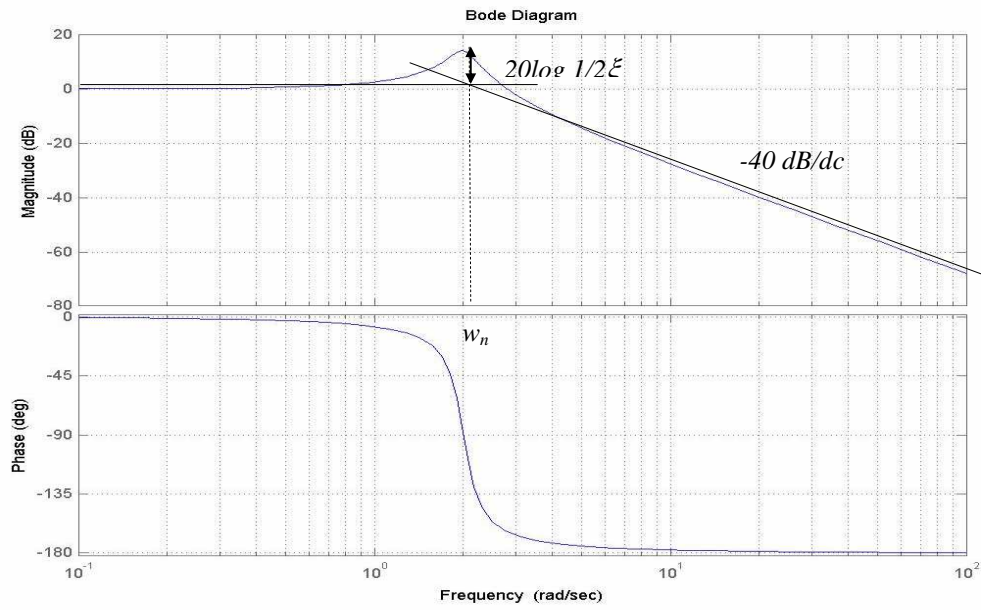


Figura 7.- Diagrama de Bode para un sistema de Segundo Orden con polos complejos conjugados.