ESTABILIDAD

Métodos algebraicos para el análisis de estabilidad.

1. Concepto de estabilidad.
2. Criterio de Routh-Hurwitz.

Dolores Blanco, Ramón Barber, María Malfaz y Miguel Ángel Salichs

Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 5
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 6
- F. Matía y A. Jiménez, “Teoría de Sistemas”, Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 5

MÉTODO DE ROUTH-HURWITZ

- Tiempo continuo
  - Método de Routh-Hurwitz:

Polinomio característico (denominador de la F.T.)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

MÉTODO DE ROUTH-HURWITZ

- Condiciones necesarias pero no suficientes:
  - Todos los coeficientes a_i tienen el mismo signo
  - Ningún coeficiente es nulo.
- Tabla de Routh

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & \\
s^{n-3} & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^{2} & u_{1} & u_{2} & 0 & \cdots & \\
s^{1} & v_{1} & 0 & 0 & \cdots & \\
s^{0} & w_{1} & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

TABLA DE ROUTH

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & & & \cdots & \\
s^{n-3} & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & & & & & \\
s^1 & & & & & \\
s^0 & & & & &
\end{array}
$$

$$
b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
$$

TABLA DE ROUTH

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & \boxed{a_{n}} & a_{n-2} & \boxed{a_{n-4}} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} & \boxed{a_{n-5}} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & \\
s^{n-3} & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^{2} & u_{1} & u_{2} & 0 & \cdots & \\
s^{1} & v_{1} & 0 & 0 & \cdots & \\
s^{0} & w_{1} & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

$$
b_{1} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_{2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
$$

TABLA DE ROUTH

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & \\
s^{n-3} & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^{2} & u_{1} & u_{2} & 0 & \cdots & \\
s^{1} & v_{1} & 0 & 0 & \cdots & \\
s^{0} & w_{1} & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

$$
b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
\qquad
b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
$$

$$
c_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}
$$

TABLA DE ROUTH

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & \\
s^{n-3} & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^{2} & u_{1} & u_{2} & 0 & \cdots & \\
s^{1} & v_{1} & 0 & 0 & \cdots & \\
s^{0} & w_{1} & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & \\
s^{n-3} & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^{2} & u_{1} & u_{2} & 0 & \cdots & \\
s^{1} & v_{1} & 0 & 0 & \cdots & \\
s^{0} & w_{1} & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

El sistema será estable
si todos los coeficientes de la primera columna son del mismo signo

EJEMPLO

- Ejemplo

$$M(s)=\frac{1}{s^5+s^4+10s^3+72s^2+152s+240}$$

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 10 & 152 \\
s^4 & 1 & 72 & 240 \\
s^3 & -62 & -88 & 0 \\
s^2 & 70.6 & 240 & \\
s^1 & 122.6 & & \\
s^0 & 240 & &
\end{array}$$

$$b_1=-\frac{72-10}{1}=-62,\quad b_2=-\frac{240-152}{1}=-88$$

$$c_1=-\frac{-88+62\cdot 72}{-62}=70{,}6,\quad c_2=-\frac{0+62\cdot 240}{-62}=240$$

$$d_1=-\frac{-62\cdot 240+70{,}6\cdot 88}{70{,}6}=122{,}8$$

$$e_1=-\frac{0-122{,}6\cdot 240}{122{,}6}=240$$

- En la primera columna hay dos cambios de signo, por lo que tenemos dos raíces en el semiplano derecho: sistema inestable.

CASOS ESPECIALES

$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 5 \\ s^3 & 2 & 8 & 0 \\ s^2 & 0 & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

CASOS ESPECIALES

- Aparición de un cero en primera columna:
  - Sustituir el cero por un numero ε positivo pequeño y continuar. Para contabilizar los cambios se hace tender a cero.
  - Hacer cambio de variable s=1/x y sobre el nuevo polinomio p(x) se vuelve a desarrollar el criterio de Routh

CASOS ESPECIALES

$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 4 & 5 \\
s^3 & 2 & 8 & 0 \\
s^2 & 0 \to \varepsilon & 5 & 0 \\
s^1 & \dfrac{8\varepsilon - 10}{\varepsilon} & 0 & 0 \\
s^0 & 5 & &
\end{array}$$

$$\frac{8\varepsilon - 10}{\varepsilon} < 0$$

Sistema inestable

CASOS ESPECIALES

$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18}$$

s^4	1	11	18
s^3	2	18	0
s^2	2	18	0
s^1	0	0	0
s^0			

CASOS ESPECIALES

- Aparición de una fila de ceros:
  - Se toman los coeficientes e la fila situada por encima.
  - Se construye la ecuación auxiliar.
  - Se deriva la ecuación auxiliar.
  - Se sustituye la fila de ceros por los coeficientes de la derivada.
  - Se continua con el método

CASOS ESPECIALES

$$M(s)=\frac{1}{s^4+2s^3+11s^2+18s+18}$$

s^4	1	11	18
s^3	2	18	0
s^2	2	18	0
s^1	$0 \rightarrow 4$	0	0
s^0	18		

$$A(s)=2s^2+18 \quad \rightarrow \quad \frac{dA(s)}{ds}=4s+0$$

$$2s^2+18=0 \quad \rightarrow \quad s=\pm 3j$$

ESTABILIDAD EN FUNCIÓN DE PARÁMETROS

$$M(s)=\frac{k}{s^3+8s^2+17s+10+k}$$

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & 17 \\ s^2 & 8 & 10+K \\ s^1 & \frac{63}{4}-1/8\,K & 0 \\ s^0 & 10+K & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{63}{4}-\frac{k}{8}>0 \\ 10+k>0 \end{array}\right\} \Rightarrow -10<k<126$$