LUGAR DE LAS RAÍCES

Lugar de las raíces.

1. Introducción. Criterios del módulo y argumento.
2. Gráficas del lugar de las raíces.
3. Reglas para construir el lugar de las raíces.
4. Lugar inverso de las raíces.
5. Lugar de las raíces generalizado. Contorno de las raíces.
6. Interpretación del lugar de las raíces.

Bibliografía

- Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall.
  - Capítulo 6
- Dorf, R.C., "Sistemas modernos de control", Ed. Addison-Wesley.
  - Capítulo
- Kuo, B.C.,"Sistemas de control automático", Ed. Prentice Hall.
  - Capítulo 8
- F. Matía y A. Jiménez, “Teoría de Sistemas”, Sección de Publicaciones Universidad Politécnica de Madrid
  - Capítulo 7

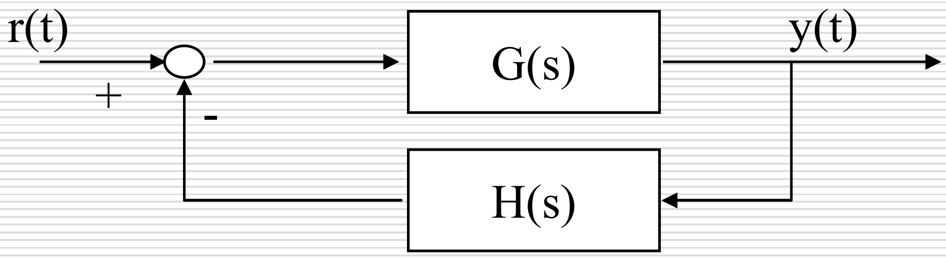
CONCEPTO

- El lugar de las raíces sirve para estudiar como influye la ganancia en bucle abierto en el comportamiento dinámico de un sistema realimentado.

- Es una herramienta para el análisis dinámico de sistemas realimentados:

  - Estabilidad
  - Rapidez del sistema en cadena cerrada al variar k
  - Oscilaciones

CONCEPTO



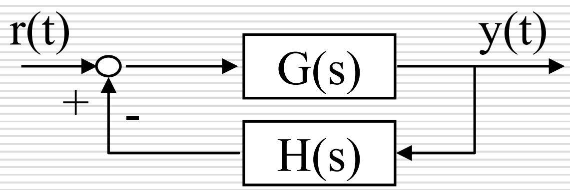
- La función de transferencia en cadena cerrada es:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = k\frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

CONCEPTO

- Los polos de M(s) son las raíces de



$$1 + k \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} = 0$$

- k es proporcional a la ganancia estática
- Si modificamos el valor de k, varían los polos de M(s). (los ceros no varían)

- Se denomina **lugar de las raíces** al lugar geométrico de los polos de M(s) al variar k desde cero hasta infinito.

CONCEPTO

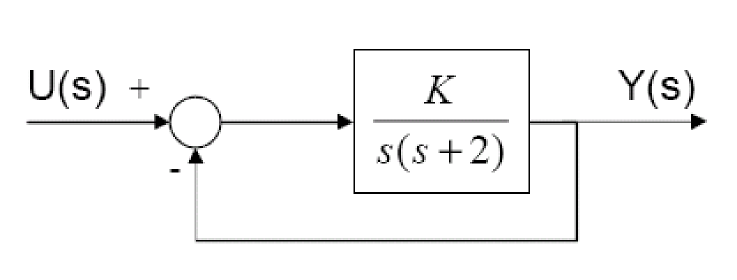
- El lugar de las raíces sirve para estudiar como influye la ganancia en bucle abierto en el comportamiento dinámico de un sistema realimentado.

- Es una herramienta para el análisis dinámico de sistemas realimentados:

  - Estabilidad
  - Rapidez
    al variar k
  - Oscilaciones

  del sistema en cadena cerrada

EJEMPLO



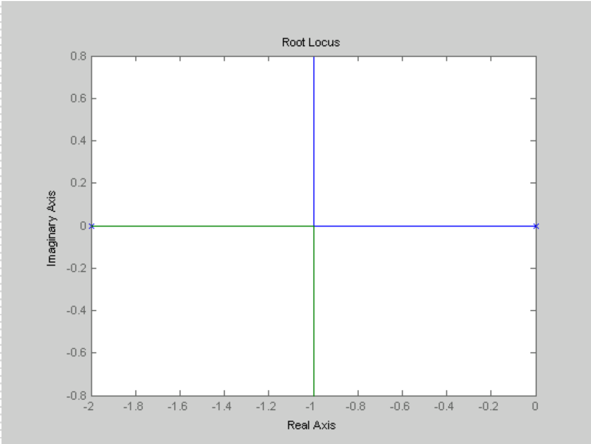
$$M(s)=\frac{\frac{k}{s(s+2)}}{1+\frac{k}{s(s+2)}}=\frac{k}{s^2+2s+k}$$

Polos del sistema: $$s^2+2s+k=0 \Rightarrow \begin{cases} s_1=-1+\sqrt{1-k} \\ s_2=-1-\sqrt{1-k} \end{cases}$$

$$(k=0) \Rightarrow \begin{cases} s_1=0 \\ s_2=-2 \end{cases}$$

$$(k=1) \Rightarrow \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-1 \end{cases}$$

$$(k=10) \Rightarrow \begin{cases} s_1=-1+3j \\ s_2=-1-3j \end{cases}$$

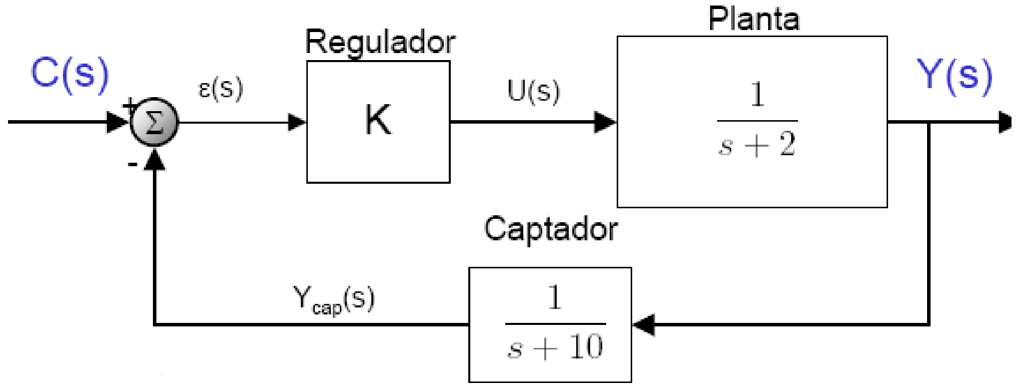


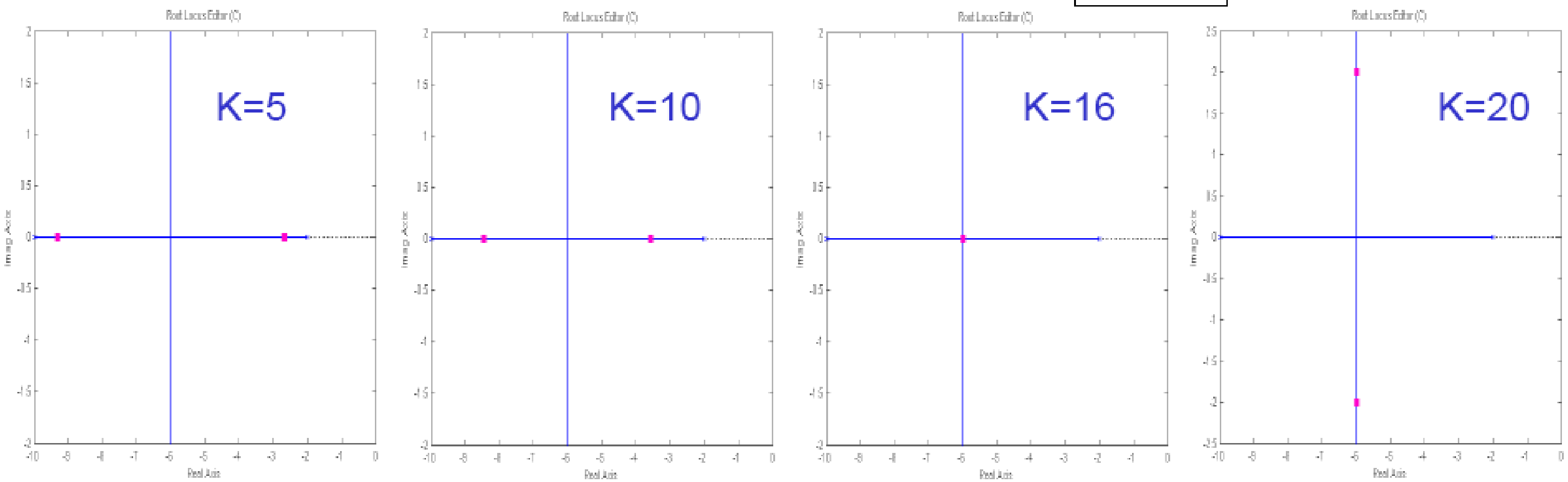
Criterio del módulo y del argumento

- Partiendo de la igualdad compleja anterior:

Definición:

El L.R. es el lugar geométrico en el plano complejo que ocupan las raíces de la ecuación característica cuando varía el parámetro K





Criterio del módulo y del argumento

- Partiendo de la igualdad compleja anterior:

$$1+k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}=0, \qquad k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}=-1$$

- Criterio del módulo

$$k\frac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|}=1, \qquad \boxed{k=\frac{\prod|s-p_i|}{\prod|s-z_i|}}$$

- Criterio del argumento

$$\sum\arg(s-z_i)-\sum\arg(s-p_i)=(2q+1)\pi$$

  - o también

$$\boxed{\sum\arg(s-p_i)-\sum\arg(s-z_i)=(2q+1)\pi}$$

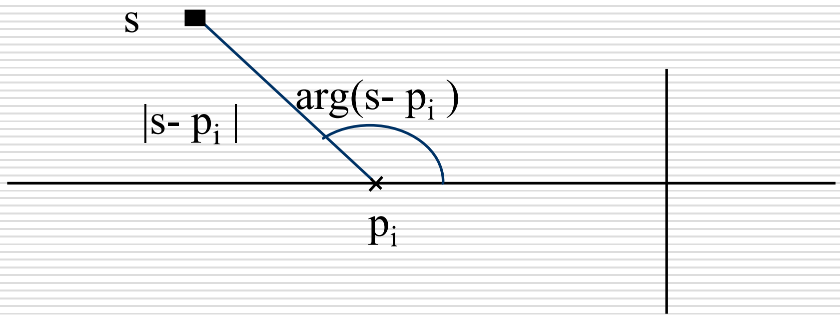
CRITERIO DEL ARGUMENTO

$$1 + k\frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} = -1$$

- **Criterio del argumento** : permite determinar si un punto s pertenece o no al lugar de las raíces.

$$\sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_i) = (2q + 1)\pi$$

$$\boxed{\sum \arg(s - p_i) - \sum \arg(s - z_i) = (2q + 1)\pi}$$



CRITERIO DEL MÓDULO

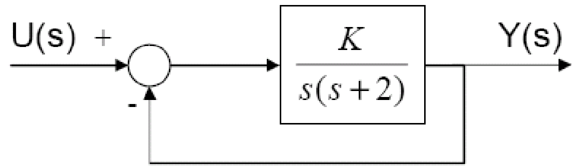
$$1+k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}=0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}=-1$$

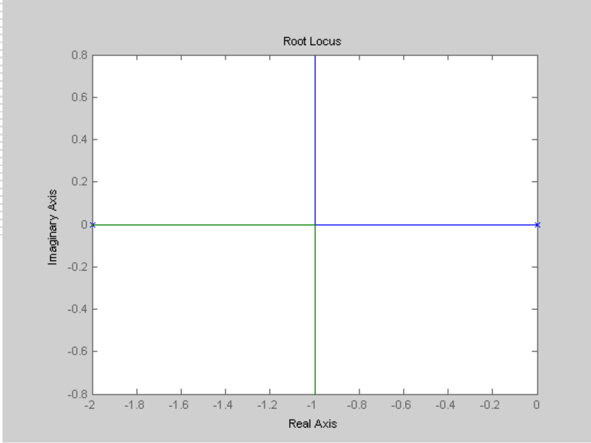
- **Criterio del módulo**: permite determinar el valor de k para un punto del lugar de las raíces.

$$k\frac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=\frac{\prod|s-p_i|}{\prod|s-z_i|}}$$

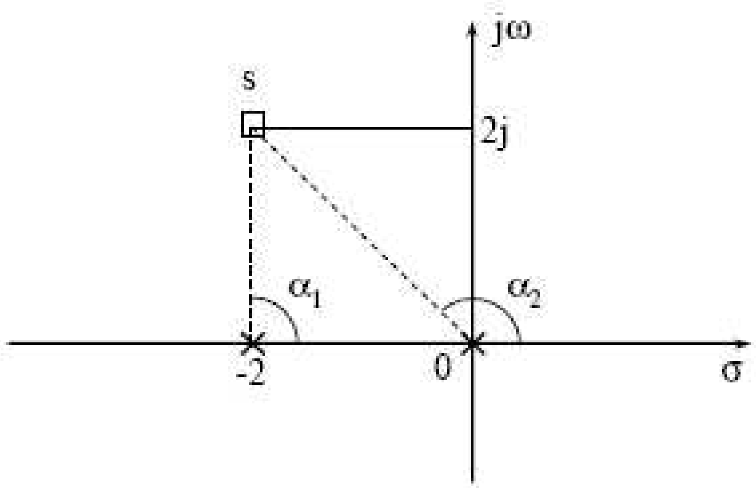
$$k\equiv\frac{\text{producto de distancias a todos los polos}}{\text{producto de distancias a todos los ceros}}$$

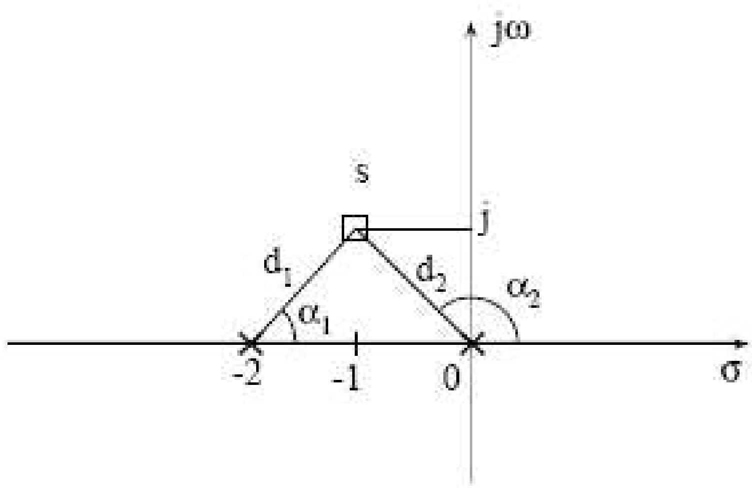
Ejemplo - Criterios





- Ejemplo:





REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 1. Número de ramas**

n = número de polos de G(s)H(s)
m = número de ceros de G(s)H(s)

entonces

número de ramas = max (m,n)

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 2. Puntos de comienzo y final**

$$1 + k\frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} = 0$$

$$\prod (s - p_i) + k\prod (s - z_i) = 0$$

$$k = 0 \Rightarrow \prod (s - p_i) = 0 \Rightarrow \text{Comienza en los polos}$$

$$\frac{1}{k}\prod (s - p_i) + \prod (s - z_i) = 0$$

$$k = \infty \Rightarrow \prod (s - z_i) = 0 \Rightarrow \text{Finaliza en los ceros}$$

La diferencia entre polos y ceros corresponde a puntos del infinito

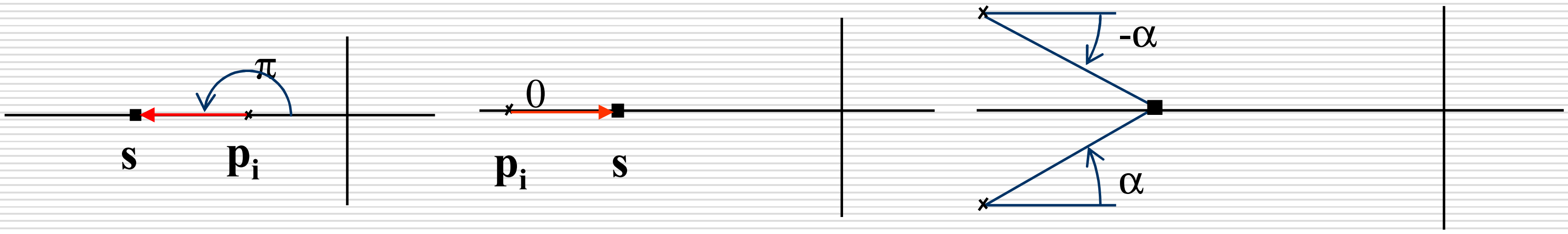
REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 3. Puntos del eje real**

  Aplicando el criterio del argumento en un punto del eje real

$$\sum \arg(s - p_i) - \sum \arg(s - z_i) = (2q + 1)\pi$$

  - la aportación de cada raíz real a la derecha es π
  - la aportación de cada raíz real a la izquierda es 0
  - la aportación de cada par de raíces complejas conjugadas es α-α= 0

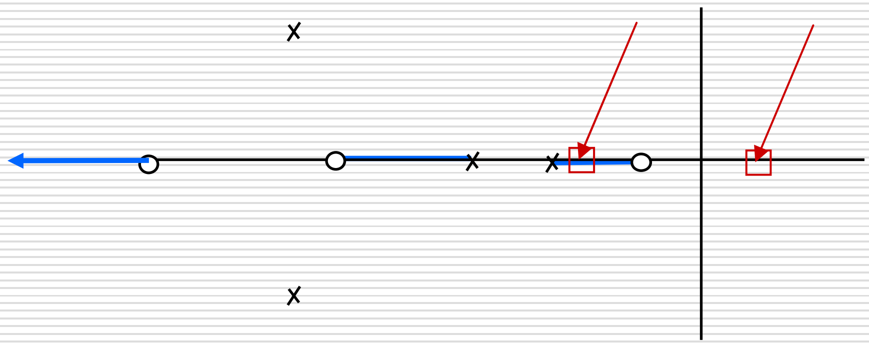


Por tanto, para que se cumpla el criterio del argumento debe haber un número impar de raíces reales a la derecha.

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 3. Puntos del eje real**

  Un punto del eje real pertenecerá al lugar de las raíces cuando haya un número impar de raíces reales a su derecha.



REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

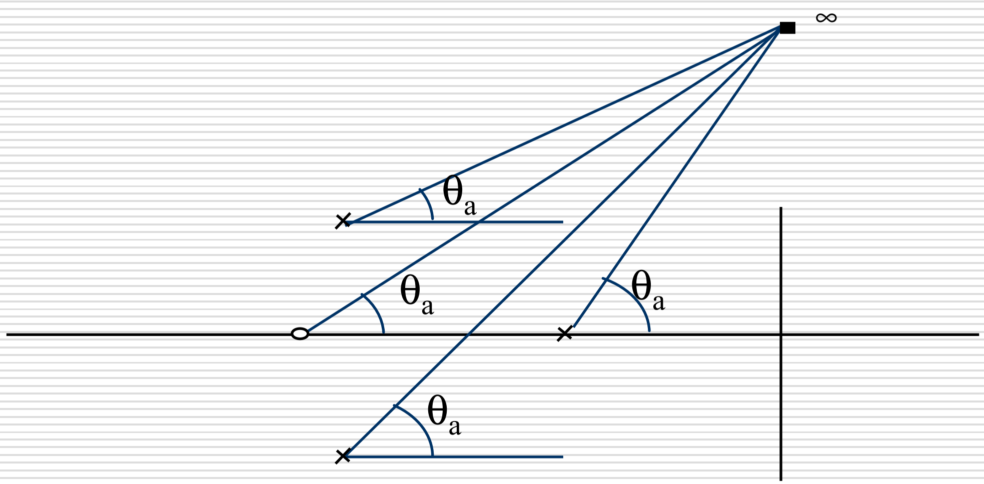
- **Regla 4. Simetría del lugar de las raíces.**

Las raíces son siempre reales o pares de complejos conjugados.

El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 5. Asíntotas**



$$\sum \arg(s - p_i) - \sum \arg(s - z_i) = n\theta_a - m\theta_a = (2q + 1)\pi$$

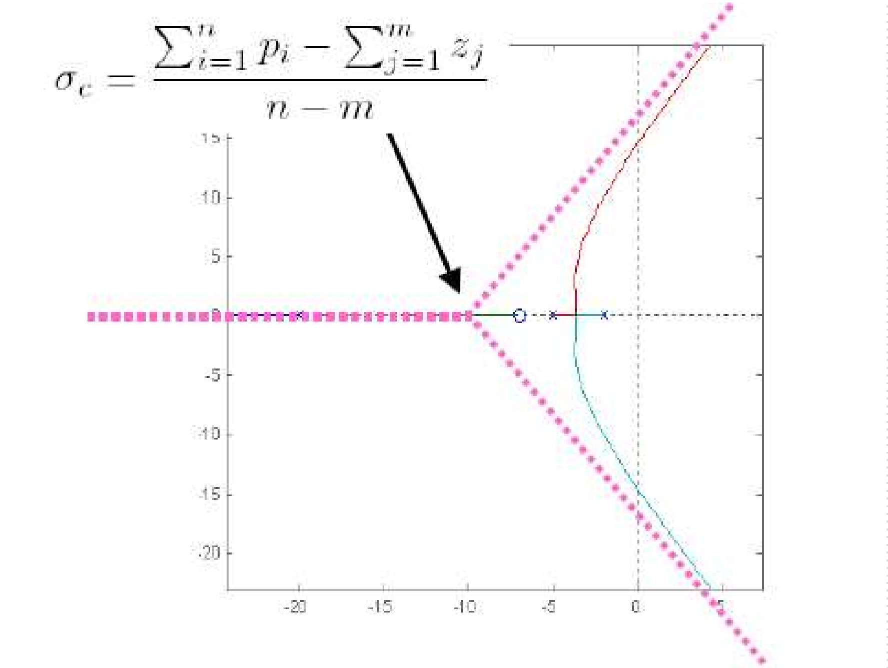
$$\theta_a = \frac{2q + 1}{n - m}\pi$$

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 6. Centroide**

  El punto en que se unen las asíntotas se denomina centroide.

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$



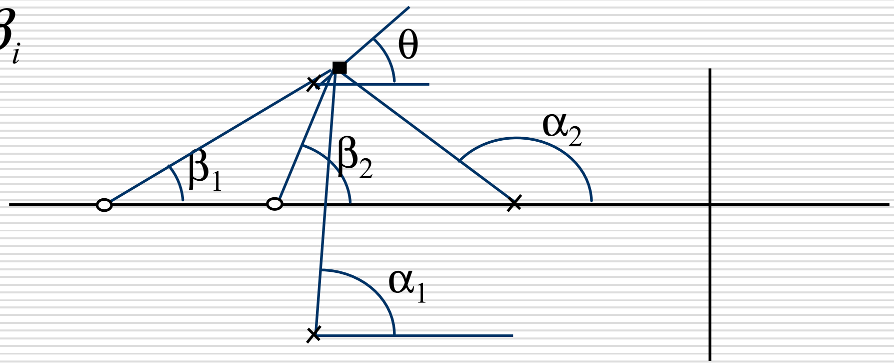
REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 7. Ángulos de salida y llegada.**
  - Ángulos de salida

    Tomando un punto infinítamente cercano a un polo

$$\sum \arg(s - p_i) - \sum \arg(s - z_i) = \sum \alpha_i + \theta - \sum \beta_i = (2q+1)\pi$$

$$\theta = (2q+1)\pi - \sum \alpha_i + \sum \beta_i$$

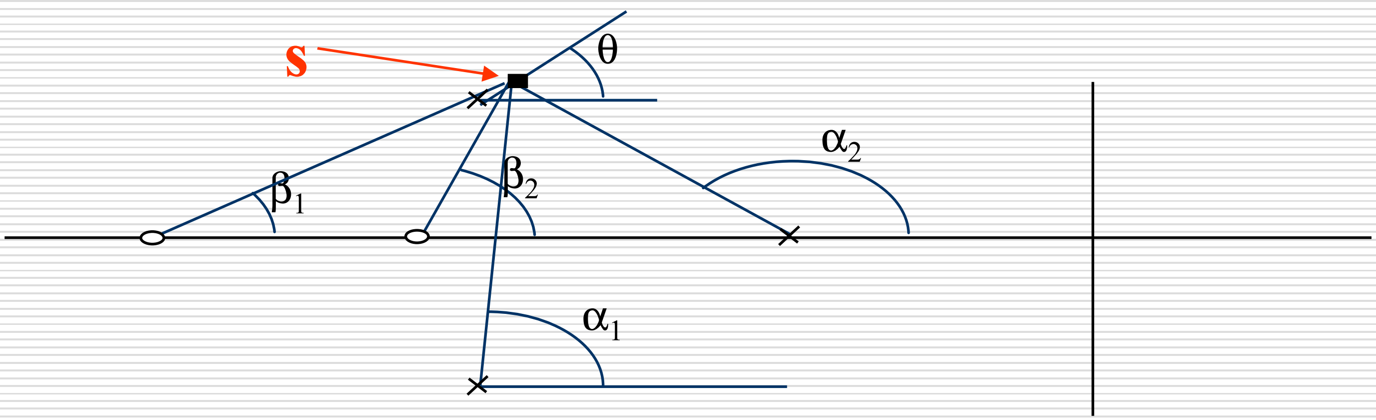


  - Ángulos de llegada

    Se calculan de forma equivalente, tomando un punto infinítamente cercano a un cero

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

Regla 7. Ángulos de salida y llegada.



$$\sum \arg(s - p_i) - \sum \arg(s - z_i) = \sum \alpha_i + \theta - \sum \beta_i = (2q+1)\pi$$

$$\theta = (2q+1)\pi - \sum \alpha_i + \sum \beta_i$$

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

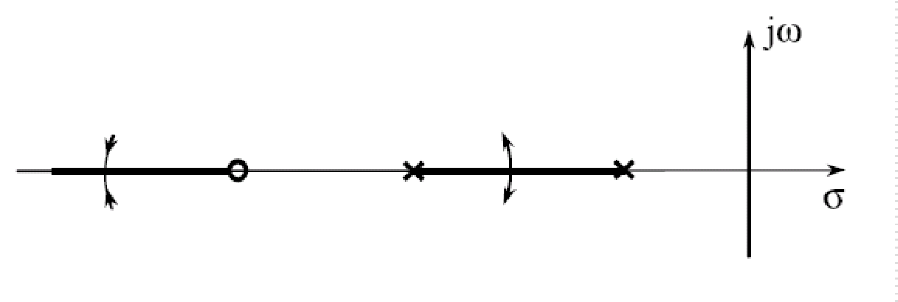
- **Regla 8. Puntos de dispersión y confluencia**
  - Coinciden con máximos (dispersión) y mínimos (confluencia) locales de k sobre el eje real

$$\frac{d\,k}{d\,s} = 0$$

- Las soluciones deben satisfacer además los criterios del módulo y el argumento.
- También se puede resolver a través de la ecuación:

$$\sum \frac{1}{\sigma - p_i} = \sum \frac{1}{\sigma - z_i}$$

- Tanteo por zonas



REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- Regla 9. Intersección con el eje imaginario
  - Se calcula usando el método de Routh:
    - Cuando los polos de un sistema de segundo orden cortan al eje imaginario el sistema es marginalmente estable.
    - Si aplicamos el criterio de Routh en función de k, el sistema será marginalmente estable para el valor de k que nos de una fila de ceros en la tabla.
    - La situación de los polos correspondientes a este valor de k se calculará con la ecuación auxiliar de la tabla.

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- **Regla 10. Valor de k en un punto del lugar de las raíces**
  - Aplicando el criterio del módulo

$$k = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|}$$

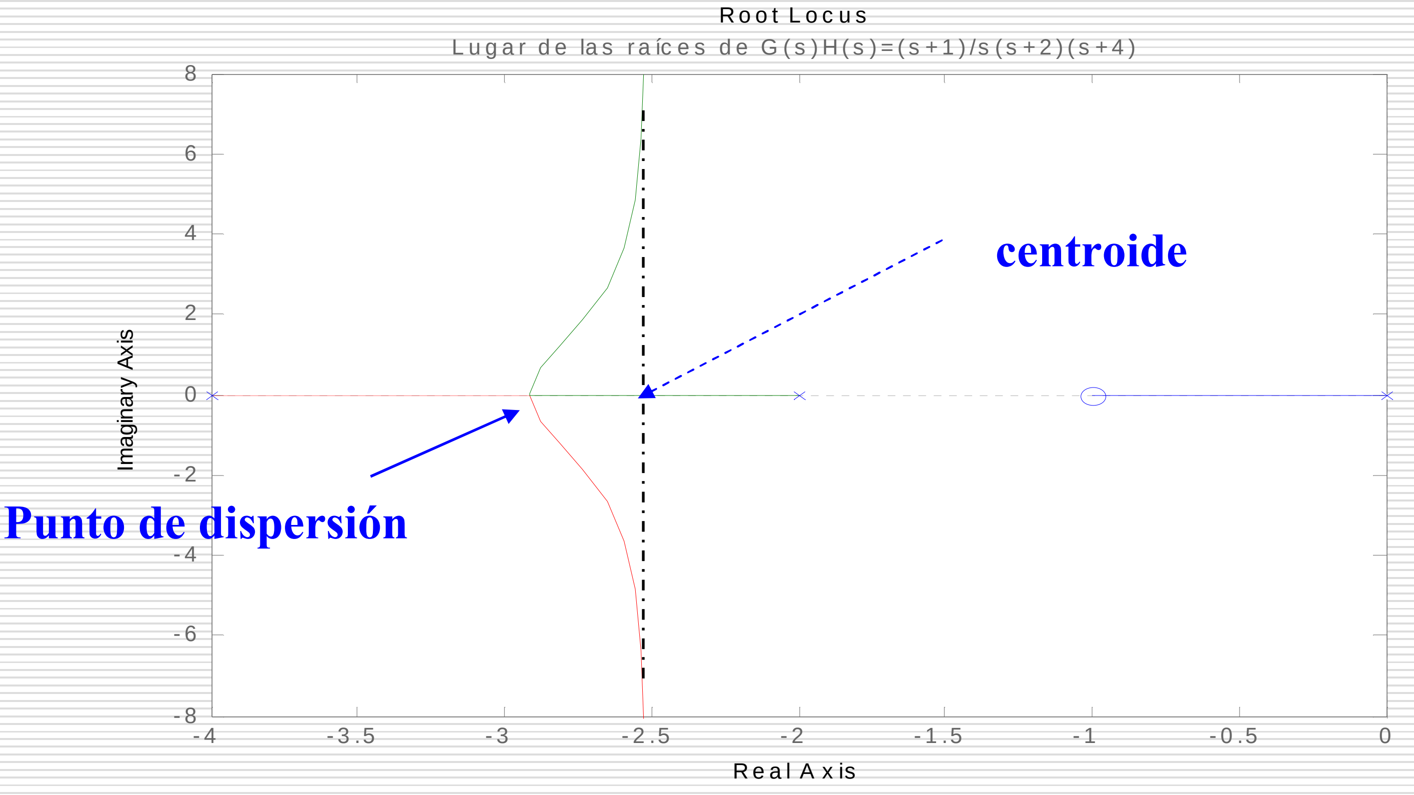
- **Regla 11. Suma de las raíces**

Si la ecuación característica es

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

entonces $\sum raices = -a_{n-1}$

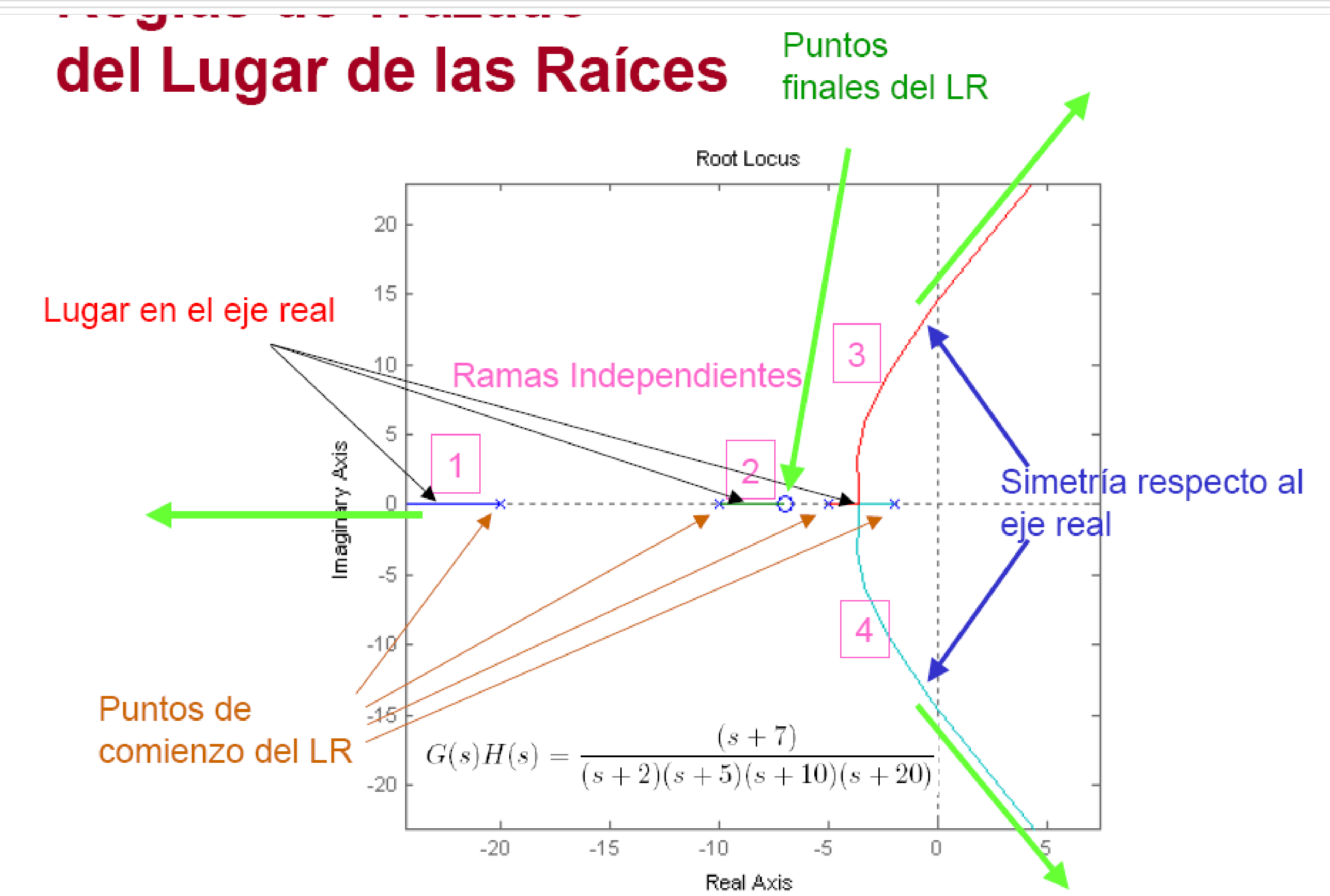
Ejemplo de Lugar de las raíces



REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- Regla 1. Número de ramas
- Regla 2. Puntos de comienzo y final
- Regla 3. Eje real
- Regla 4. Simetría del lugar de las raíces
- Regla 5. Asíntotas
- Regla 6. Centroide
- Regla 7. Ángulos de salida y llegada
- Regla 8. Puntos de dispersión y confluencia
- Regla 9. Intersección con el eje imaginario
- Valor de k en un punto del lugar de las raíces
- Suma de raíces.

Reglas para el trazado del lugar de las raíces



LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- Se denomina lugar inverso de las raíces al lugar geométrico de los polos de M(s) al variar k desde cero hasta menos infinito.

$$1 + k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)} = 0 \qquad \boxed{-\infty < k < 0}$$

$$1 + k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)} = -1$$

LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- Varía el criterio del argumento

$$\sum \arg(s-p_i) - \sum \arg(s-z_i) = 2q\pi$$

- Varía el criterio del módulo

$$|k| \frac{\prod |s-z_i|}{\prod |s-p_i|} = 1$$

$$|k| = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-z_i|}$$

- Se modifican las reglas que hacen uso de los criterios del argumento y del módulo.

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- **Regla 3. Eje real**

  Un punto del eje real pertenecerá al lugar inverso de las raíces cuando haya un número par de raíces reales a su derecha.

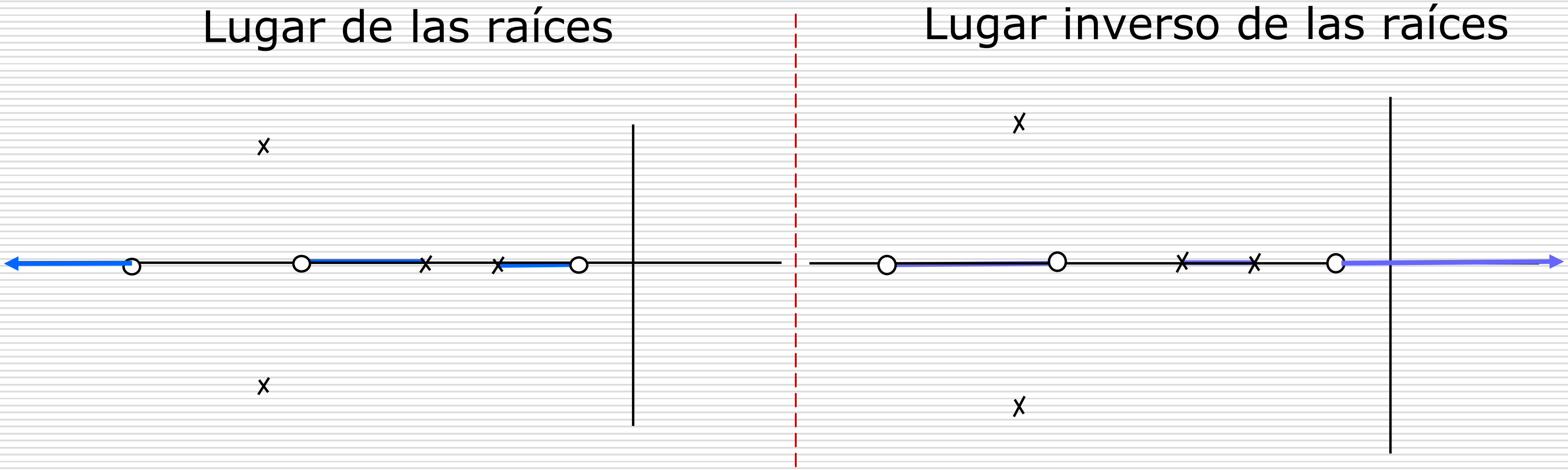
$$\sum \arg(s-p_i) - \sum \arg(s-z_i) = 2q\pi$$

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- **Regla 3. Eje real**

  Un punto del eje real pertenecerá al lugar inverso de las raíces cuando haya un número par de raíces reales a su derecha.

$$\sum \arg(s-p_i) - \sum \arg(s-z_i) = 2q\pi$$



REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- **Regla 5. Asíntotas**

$$\sum \arg(s-p_i) - \sum \arg(s-z_i) = n\theta_a - m\theta_a = 2q\pi$$

$$\boxed{\theta_a = \frac{2q}{n-m}\pi}$$

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

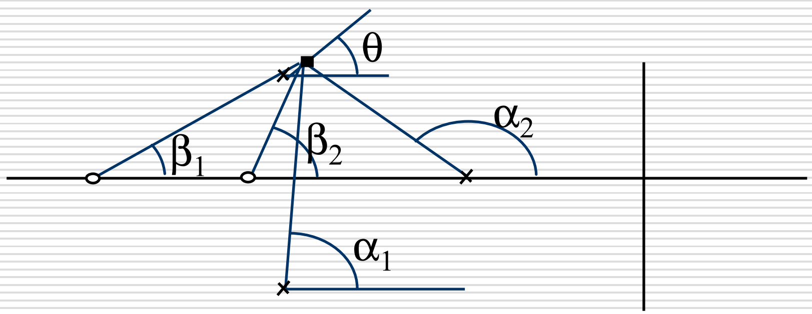
- **Regla 7. Ángulos de salida y llegada.**
  - Ángulos de salida

    Tomando un punto infinítamente cercano a un polo

$$\sum \arg(s-p_i) - \sum \arg(s-z_i) = 2q\pi$$

$$\sum \alpha_i + \theta - \sum \beta_i = 2q\pi$$

$$\theta = 2q\pi - \sum \alpha_i + \sum \beta_i$$



  - Ángulos de llegada

    Se calculan de forma equivalente, tomando un punto infinítamente cercano a un cero

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

- **Regla 10. Valor de k en un punto del lugar de las raíces**

$$|k| = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|}$$

REGLAS DEL TRAZADO DEL LUGAR INVERSO DE LAS RAÍCES

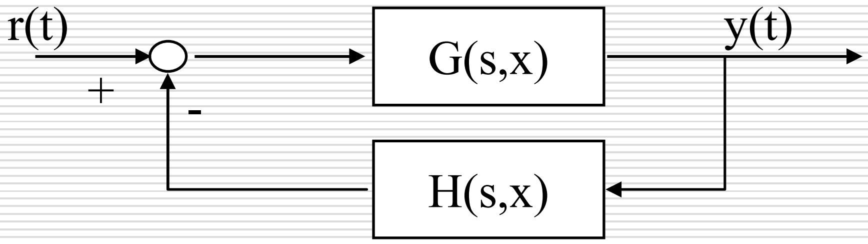
- Regla 1. Número de ramas
- Regla 2. Puntos de comienzo y final
- Regla 3. Eje real
- Regla 4. Simetría del lugar de las raíces
- Regla 5. Asíntotas
- Regla 6. Centroide
- Regla 7. Ángulos de salida y llegada
- Regla 8. Puntos de dispersión y confluencia
- Regla 9. Intersección con el eje imaginario
- Regla 10. Valor de k en un punto del lugar de las raíces
- Regla 11. Suma de raíces.

CONTORNO DE LAS RAÍCES

- El lugar de las raíces sirve para estudiar como influye la ganancia en bucle abierto en el comportamiento dinámico de un sistema realimentado.
- El **contorno de la raíces** es un método que nos permite, en ciertos casos, extender el método del lugar de las raíces al estudio del comportamiento dinámico de un sistema realimentado, cuando varia un parámetro distinto de la ganancia.

Contorno de las raíces (II)

- Contorno de las raíces



Sea x un parámetro variable

$$M(s,x) = \frac{G(s,x)}{1+G(s,x)H(s,x)} = \frac{A(s,x)}{B(s,x)}$$

CONTORNO DE LAS RAÍCES

Si en el numerador y/o en el denominador se pueda hacer la siguiente transformación

$$P(s,x)=0$$

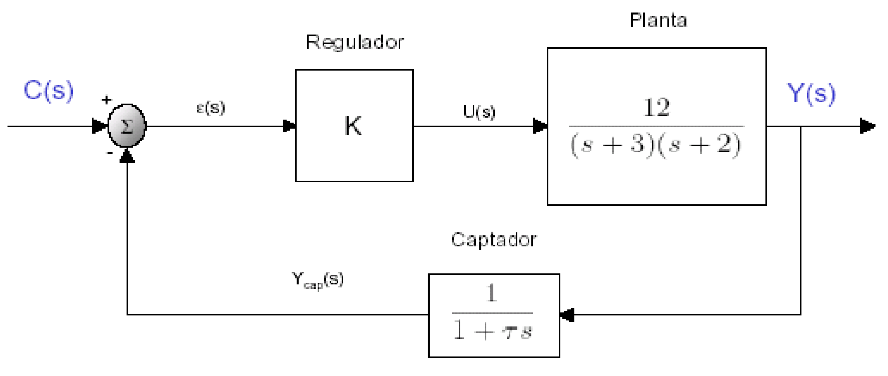
$$D(s)+xN(s)=0$$

$$\boxed{1+x\frac{N(s)}{D(s)}=0}$$

Entonces es posible aplicar el método del lugar de las raíces para saber como influye x en las raíces de P(s;x)

- Ya que al variar x pueden variar tanto las raíces del numerador como las del denominador de M(s), en el caso general será necesario hacer dos contornos de las raíces, uno para el numerador y otro para el denominador.

EJEMPLO DE CONTORNO DE LAS RAÍCES



Determinar el comportamiento del sistema realimentado en función de la constante de tiempo, τ, del captador para K=1

$$GH(s) = \frac{12}{(s+2)(s+3)(1+\tau s)}$$

Ecuacion caracteristica: $(s+2)(s+3)(1+\tau s)+12 = 0$

se puede reescribir como:

$$\left[(s+2)(s+3)+12\right] + (s+2)(s+3)\tau s = 0$$

o en el formato:

$$\tau \frac{s(s+3)(s+2)}{(s^2+5s+18)} = -1$$

Ejemplo tomado de Univ. Oviedo (http://isa.uniovi.es/~idiaz/SA/Teoria/04-05/SA.Tema6.pdf)

EJEMPLO DE CONTORNO DE LAS RAÍCES

El problema queda planteado en términos de un LR:

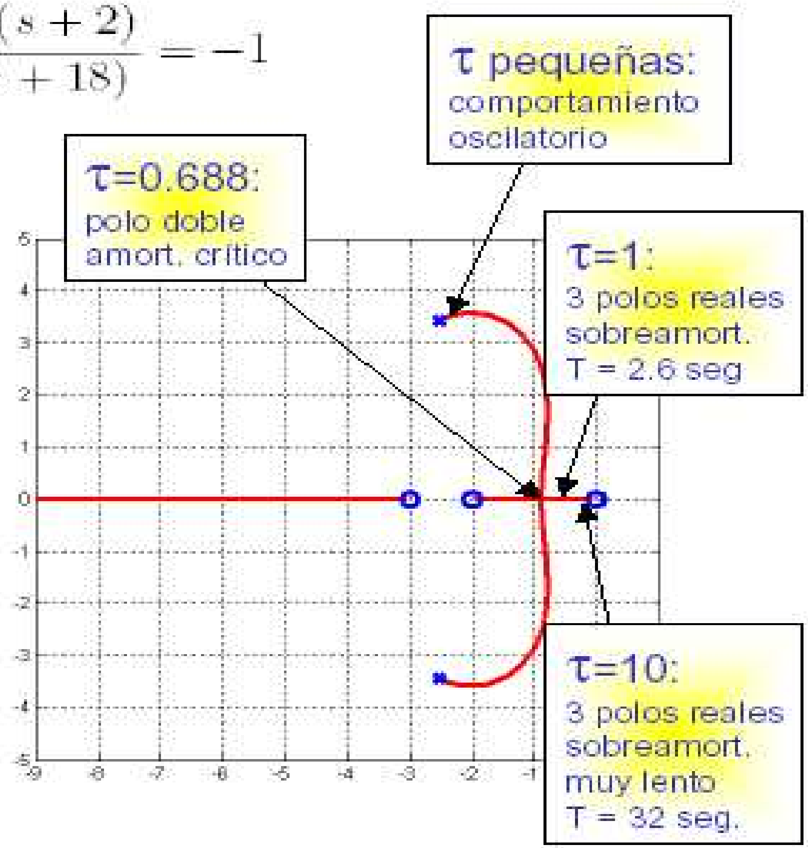
$$\tau \frac{s(s+3)(s+2)}{(s^2+5s+18)} = -1$$

El LR tiene 3 ceros…

$$z_j = \{0, -3, -2\}$$

… y dos polos

$$p_i = -2.5000 \pm 3.4$$

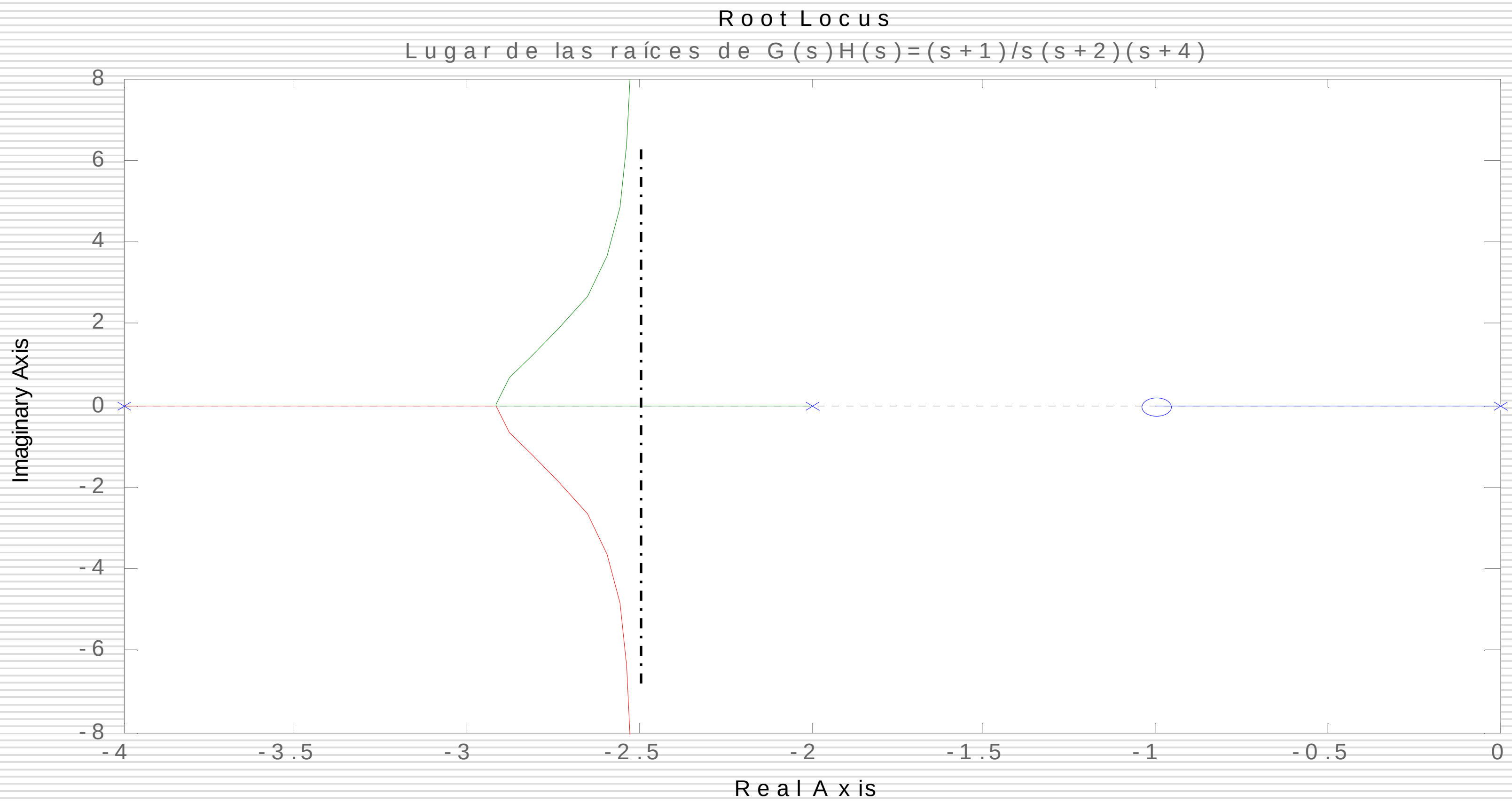


Conclusión

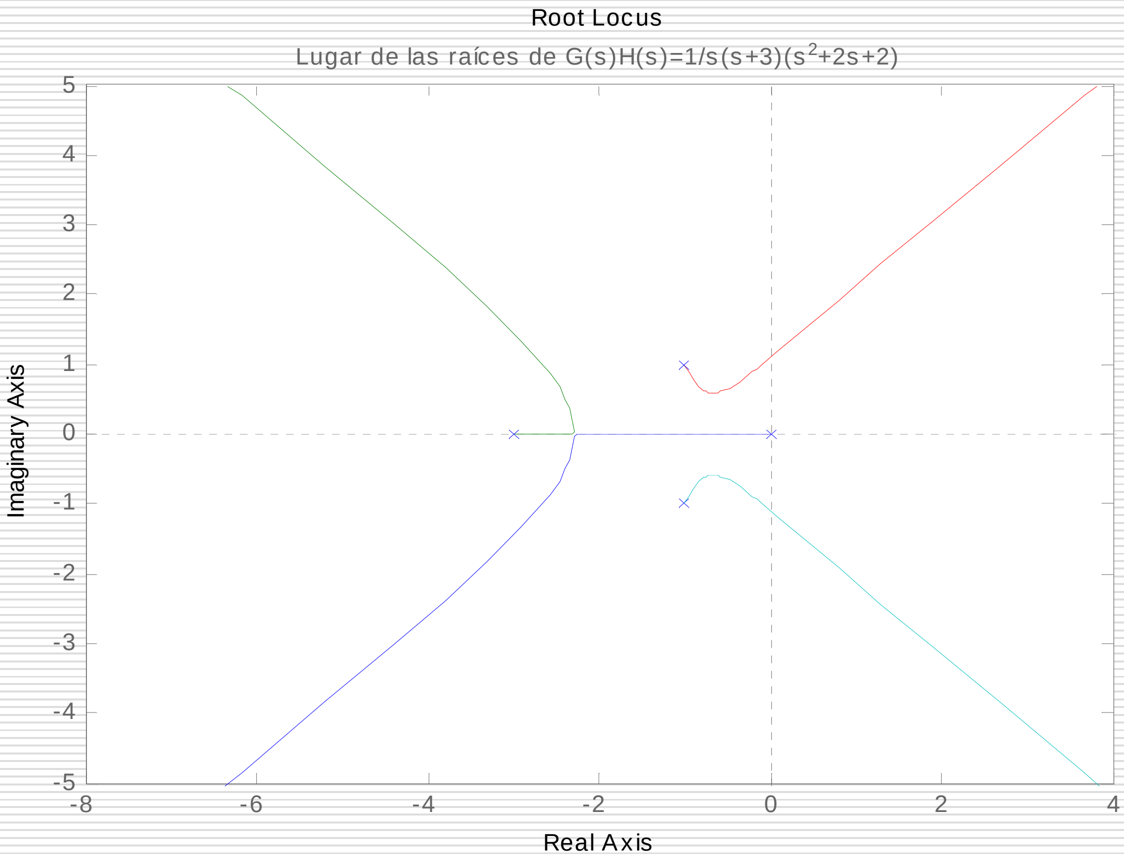
Vemos cómo un captador lento influye negativamente en el comportamiento del lazo ralentizándolo

Ejemplo tomado de Univ. Oviedo (http://isa.uniovi.es/~idiaz/SA/Teoria/04-05/SA.Tema6.pdf)

INTERPRETACIÓN



INTERPRETACIÓN



LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

$$G(s)H(s) = e^{-Ts} k \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

- Criterio del argumento

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$e^{-Ts} k \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} = -1$$

$$\arg(e^{-Ts}) + \sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_i) = (2q + 1)\pi$$

$$\arg(e^{-Ts}) = \arg(e^{-T(\sigma + j\varpi)}) = \arg(e^{-T\sigma} e^{-j\varpi T}) = -\varpi T$$

$$-\varpi T + \sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_i) = (2q + 1)\pi$$

LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

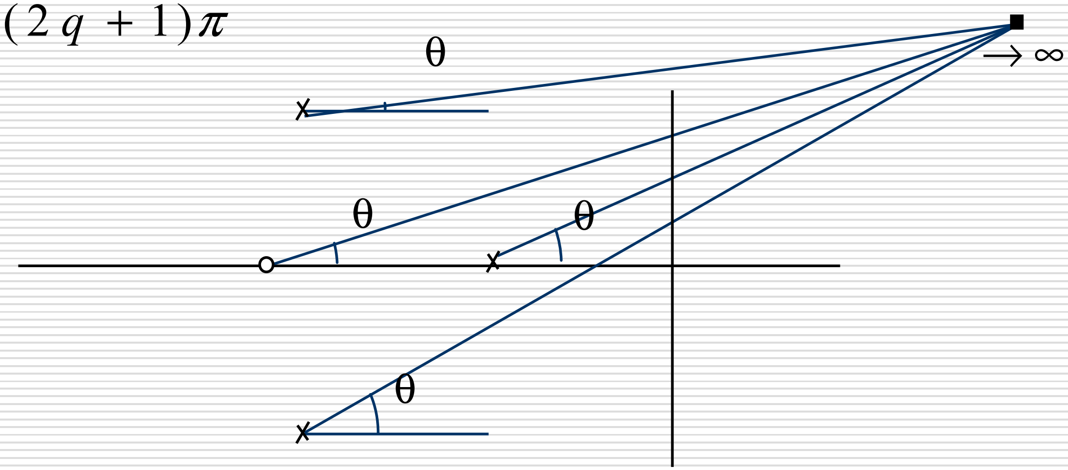
- Aplicación del criterio del argumento en un punto con parte real infinito

$$-\varpi T + \sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_i) = (2q+1)\pi$$

$$-\varpi T + m\theta - n\theta = (2q+1)\pi$$

$$(\theta \to 0)$$

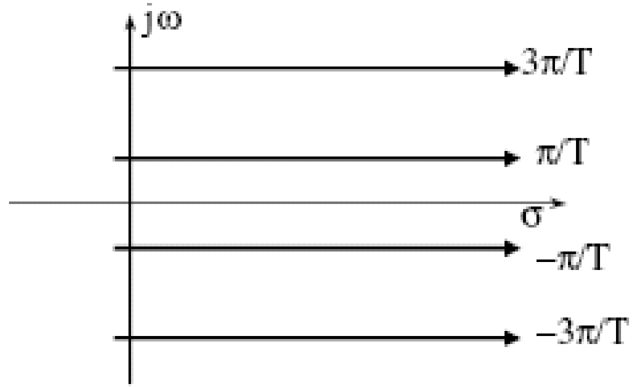
$$-\varpi T = (2q+1)\pi$$



LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

- Aparecen infinitas asíntotas en el semiplano positivo paralelas al eje real

$$-\varpi T = (2q+1)\pi$$



LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

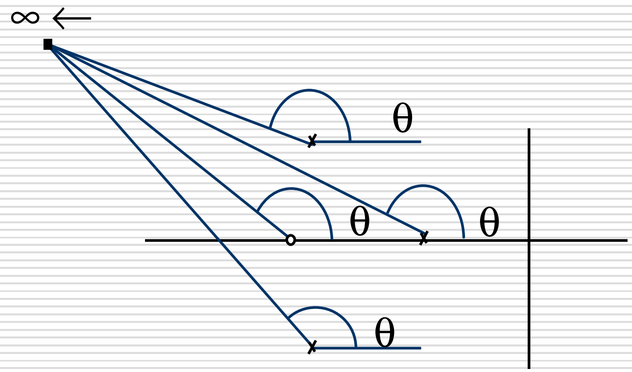
- Aplicación del criterio del argumento en un punto con parte real menos infinito

$$-\varpi T + \sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_i) = (2q+1)$$

$$-\varpi T + m\theta - n\theta = (2q+1)\pi$$

$$(\theta \rightarrow \pi)$$

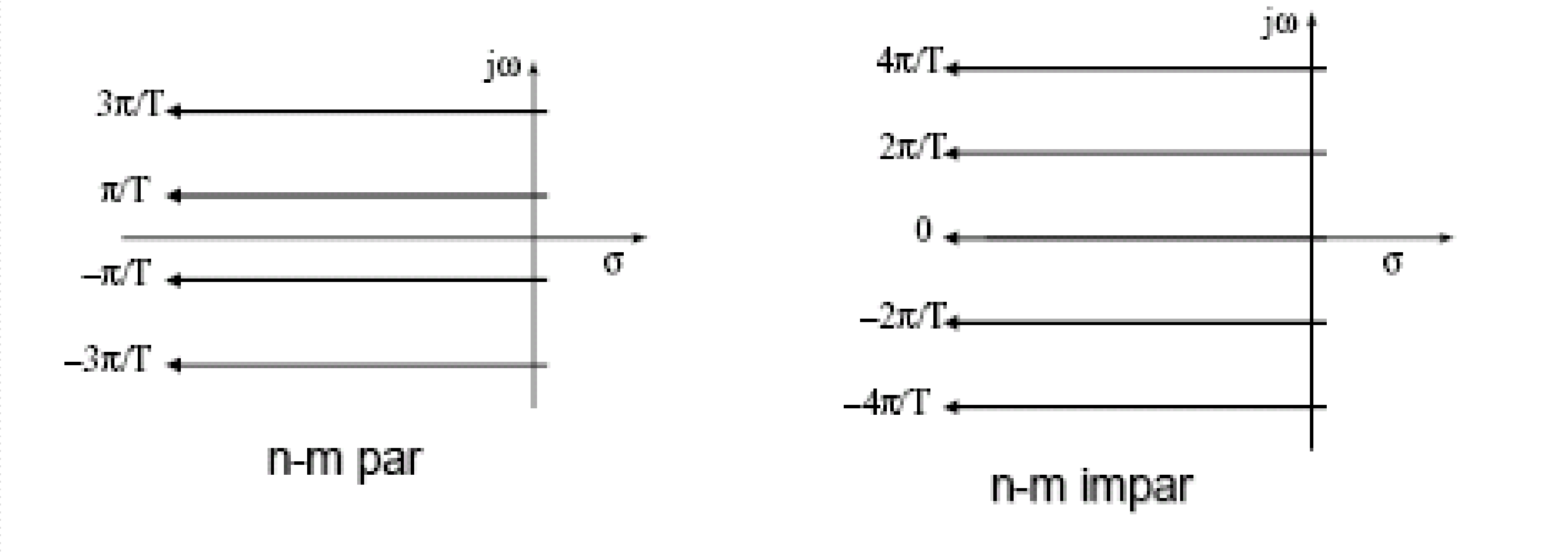
$$-\varpi T + (m-n)\pi = (2q+1)\pi$$



- Aparecen infinitas asíntotas en el semiplano negativo paralelas al eje real

LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

$$-\varpi T + (m-n)\pi = (2q+1)\pi$$



LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS CON RETARDO PURO

- Como consecuencia de las asíntotas, los sistemas con retardo puro realimentados se hacen siempre inestables para k grandes.
- Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$