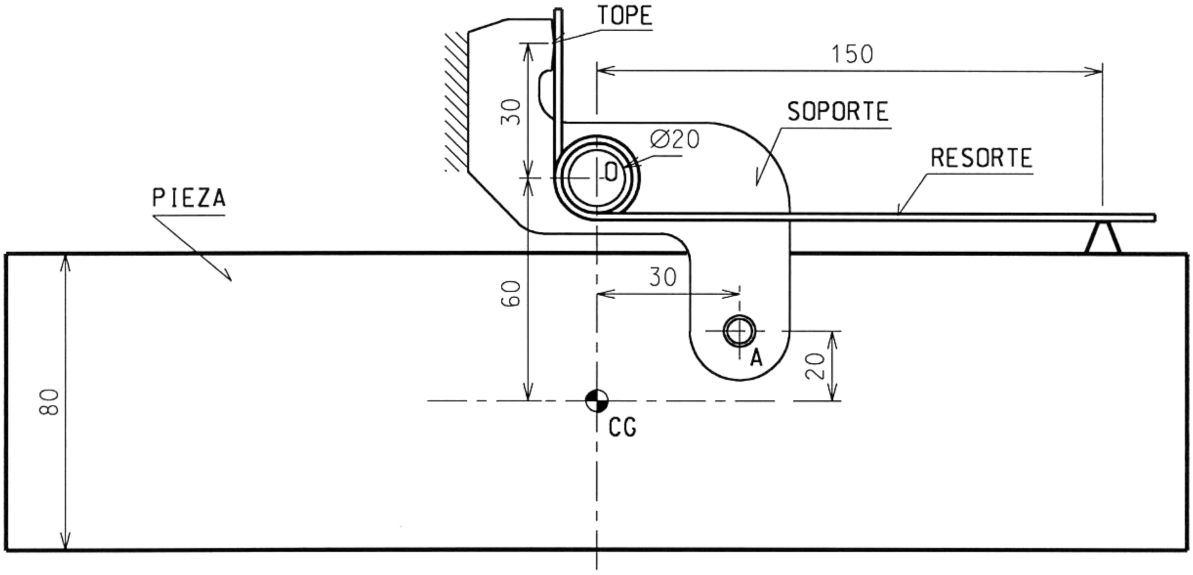
Una pieza metálica de peso **W=50 N** y forma de paralepípedo está suspendida de un soporte rígido **S** mediante una articulación **A**, como se aprecia en el croquis (sin escala) de la figura.

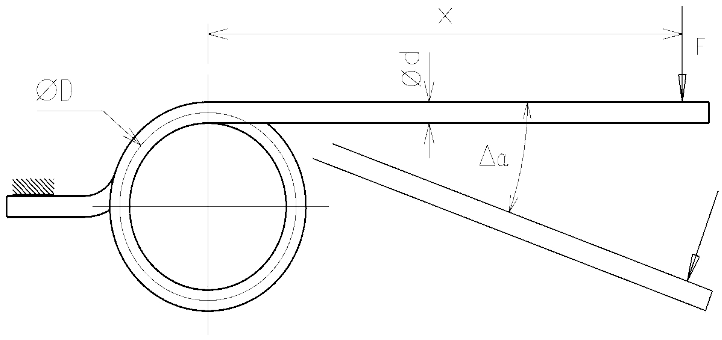
Para mantener la pieza con su eje longitudinal en posición horizontal (según la figura) se debe montar un resorte de torsión helicoidal unido al soporte por un bulón de **Ø20 mm** en **O**. Entre el bulón y el resorte hay una holgura radial de **1 mm**.

El resorte será de hilo circular de acero de **R_E=750** MPa y de **Ø3 mm** formando sus extremos un ángulo de **180º** en estado libre y cerrando espiras con el incremento de carga.

Determinar el número de espiras requerido. **(1,5 puntos)**

Establecer la calidad que debería tener el acero del resorte para asegurar un coeficiente de seguridad **s=1,75**. **(1 punto)**



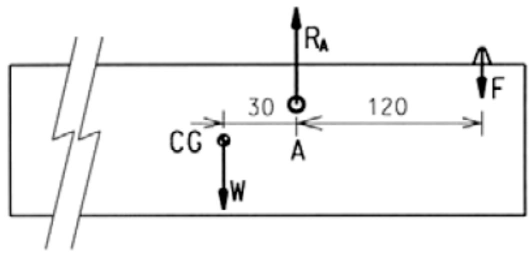


FORMULARIO DE MUELLES DE TORSIÓN

HILO DE SECCIÓN CIRCULAR

MAGNITUD		VALOR
Límite elástico del material (a tracción)	R_E	
Módulo de elasticidad (YOUNG)	E	
Coeficiente de seguridad	s	
Tensión de flexión admisible	σ_{ADM}	$\frac{R_E}{s}$
Diámetro medio de espira	D	
Diámetro de hilo	d	
Diámetro interior de espira	D_{INT}	$D - d$
Índice de curvatura	C	$\frac{D}{d}$
Nº de espiras útiles	N	
Rigidez = Constante del muelle	k	$\frac{M}{\Delta\alpha} = \frac{d^4E}{3888DN}$
Flexibilidad	f	$\frac{1}{k}$
Carga axial	F	
Distancia normal carga-eje	x	
Par aplicado	M	Fx
Deformación angular bajo carga F (º)	$\Delta\alpha$	$\frac{3888FxDN}{d^4E}$
Diámetro interior de espira bajo carga F (signo + cerrando espiras)	D'_{INT}	$\frac{D_{INT}N}{N \pm \Delta\alpha/360}$
Factor de corrección de tensión (signo + cerrando espiras)	K_C	$\frac{C(4C \pm 1) - 1}{4C(C \pm 1)}$
Tensión máxima del muelle	σ_{MAX}	$\frac{10{,}8FxK_C}{d^3}$
Constante de tensión	k_σ	$\frac{\sigma_{MAX}}{\Delta\alpha} = \frac{EK_C}{360NC}$
Masa aprox. del muelle (δ = densidad)	m	$\delta\frac{\pi d^2}{4}(\pi DN + L_{EXTREMOS})$

Para equilibrar la pieza se requiere aplicar un momento mediante una fuerza F, generada por el resorte. Del equilibrio de momentos en la articulación, conociendo que W = 50 N, resulta:

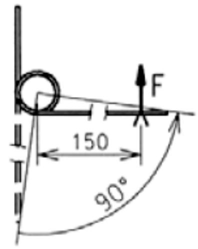


$$F \cdot 120 = W \cdot 30 \qquad \Rightarrow \qquad F = 12{,}5\,\text{N}.$$

Luego el par que debe generar el resorte:

$$M = F \cdot 150 = 1{,}875\,\text{Nm}.$$

Como la deformación para esta carga, con la pieza en horizontal, es de 90º (según la figura), se obtiene la rigidez angular necesaria:



$$k = \frac{M}{\alpha} = \frac{1{,}875}{90} = 0{,}020833\,\text{Nm}/^{\text{o}}.$$

El resorte se monta en un bulón de 20 mm. de diámetro, con una holgura radial de 1 mm., luego su diámetro interior será:

$$D_{INT} = 20 + 2 \cdot 1 = 22\,\text{mm}.$$

Al ser el diámetro de la espira $d = 3$ mm. , el diámetro medio será:

$$D = D_{INT} + d = 22 + 3 = 25\,\text{mm}.$$

Conocidos el diámetro medio, el diámetro de la espira, el modulo de elasticidad (E = 2 · 10^5 MPa.) y la rigidez angular, se obtiene el número de espiras del resorte:

$$k = \frac{d^4 \cdot E}{3888 \cdot D \cdot N} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{d^4 \cdot E}{3888 \cdot D \cdot k} = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{3888 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}020833} = 8 \ \text{espiras}$$

Conocido el índice de curvatura se puede calcular el factor de corrección de tensión:

$$C = \frac{D}{d} = \frac{25}{3} = 8{,}33 \qquad \Rightarrow \qquad K_C = \frac{C \cdot (4 \cdot C + 1) - 1}{4 \cdot C \cdot (C + 1)} = \frac{8{,}33 \cdot (4 \cdot 8{,}33 + 1) - 1}{4 \cdot 8{,}33 \cdot (8{,}33 + 1)} = 0{,}9164$$

Y la tensión máxima que alcanzaría el resorte con la pieza en equilibrio, con el momento calculado M = 1,875 Nm, sería:

$$\sigma_{MAX} = \frac{10{,}8 \cdot M}{d^3} \cdot K_C \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{MAX} = \frac{10{,}8 \cdot 1{,}875}{(3 \cdot 10^{-3})^3} \cdot 0{,}9164 = 687{,}3 \ \text{MPa}.$$

Con el límite elástico a tracción del acero inicial (R_E = 750 MPa) no se asegura el coeficiente de seguridad solicitado:

$$s = \frac{R_E}{\sigma_{MAX}} = \frac{750}{687{,}3} = 1{,}09 \ < \ 1{,}75$$

Para asegurar que el coeficiente de seguridad sea mayor del establecido se debe cumplir que:

$$s = \frac{R_E}{\sigma_{MAX}} \geq 1{,}75 \qquad \Rightarrow \qquad R_E \geq 1{,}75 \cdot \sigma_{MAX} \qquad \Rightarrow \qquad R_E \geq 1202{,}8 \ \text{MPa}.$$

Una máquina para bobinar pequeños solenoides con hilo esmaltado de cobre de **Ø 0,1 mm** dispone de un tensor formado por un resorte helicoidal y una polea de guía en su extremo libre, según la figura, para mantener la tracción del hilo entre valores adecuados y así evitar roturas de éste y defectos en el bobinado.

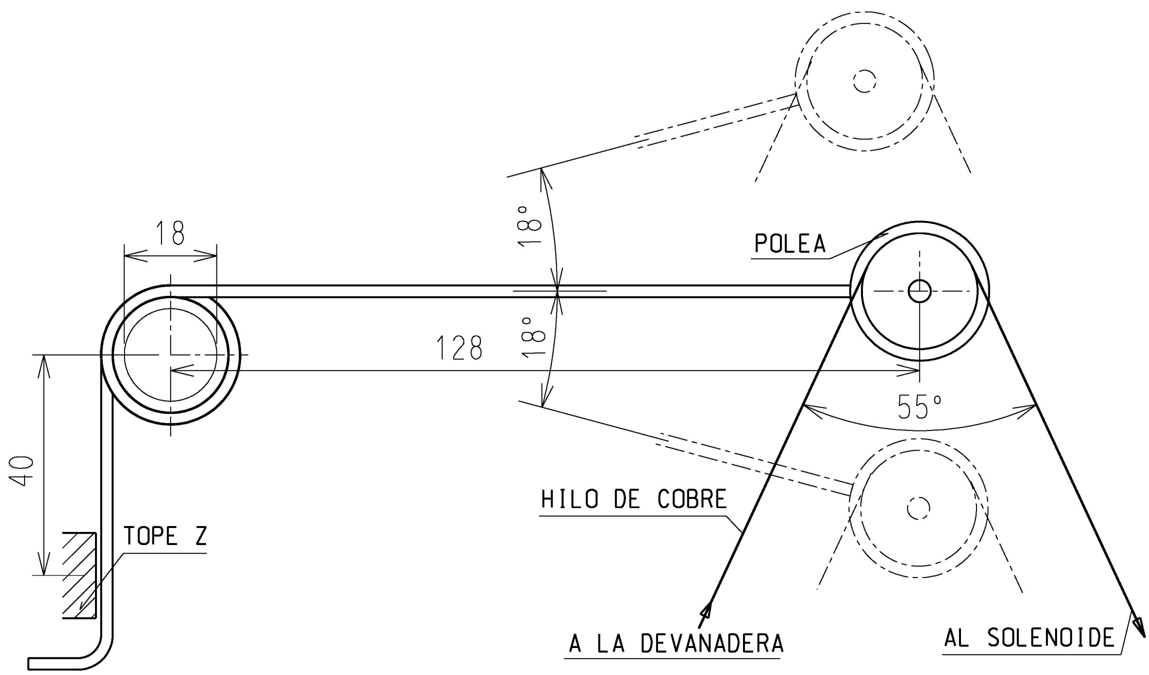
La tracción del hilo debe permanecer con valores de **0,17 N ±20%**, en correspondencia con la posición de la polea-guía del tensor, entre **+18º** y **-18º** con la horizontal (extremos a 90º).

El hilo del resorte es de acero de **980 MPa** de límite elástico, con diámetro de **Ø1 mm** y está montado sobre un pivote de **Ø18 mm**.

SE PIDE:

1.- Determinar la rigidez angular que requiere el resorte
2.- Obtener la forma y dimensiones del resorte sin carga y las espiras que debe tener.
3.- Calcular la reacción sobre el tope **Z** y la tensión máxima que alcanza el resorte con la máxima tracción del hilo.

NOTA: Se pueden despreciar las deformaciones de los extremos.



SOLUCIÓN:

1.- Las tracciones del hilo de cobre **T** producen una carga sobre el eje de la polea:

$$F = 2T\cos\frac{55^o}{2} = 1{,}774\mathbf{T}\ \text{N}$$

Los valores de la tracción del hilo están comprendidos entre:

$\mathbf{T_{MIN}}$= 0,8.0,17=**0,136 N** y $\mathbf{T_{MAX}}$= 1,2.0,17=**0,204 N**

y las cargas correspondientes:

$\mathbf{F_{MIN}}$**= 0,241 N** y $\mathbf{F_{MAX}}$**= 0,362 N**

Esta variación de carga: **ΔF=** F_{MAX}- F_{MIN}=**0,121N** produce una variación de momento

torsor: **ΔM**=x.ΔF=128.0,121=**15,47 N.mm** que debe corresponder con la variación del ángulo de deformación:

$$\Delta\alpha = 2.18^o = \mathbf{36^o}$$

por lo que la **rigidez angular** resultante es: $\underline{\mathbf{k_\alpha}} = \frac{\Delta M}{\Delta\alpha} = \frac{15{,}47}{36} = \underline{\mathbf{0{,}43\ N.mm/^o}}$

2.- La figura corresponde a la posición con carga media:

$\mathbf{F_{MED}}$=1,774.0,17= **0,302 N** y el momento: $\mathbf{M_{MED}}$=128.0,302= **38,65 Nmm**

y su deformación será: $\alpha_{MED} = \frac{M_{MED}}{k_\alpha} = \frac{38{,}65}{0{,}43} = \mathbf{90^o}$ lo cual supone que los **extremos sin carga** forman un ángulo de **180º**, esto es, **<u>están alineados</u>**.

El diámetro interior del resorte debe ser al menos de 19 mm, dejando 1 mm de holgura con el eje-soporte. Así, el diámetro medio es: **D**=19+1=**20mm**.

Conocida la rigidez se obtiene el nº de espiras:

$$N = \frac{d^4E}{3888Dk}$$ con d= 1mm E=200GPa D=20mm y k=0,43 Nmm/º

resulta: **<u>N=6,0 espiras</u>**

3.- El momento torsor con la máxima tracción del hilo corresponde a la deformación máxima, esto es:
$\mathbf{M_{MAX}}$=0,43.(90º+18º)=**46,44 Nmm** y la reacción en el tope:

$$\underline{\mathbf{R_Z}} = \frac{M_{MAX}}{40mm} = \underline{\mathbf{1{,}16\ N}}$$

La máxima tensión se corresponde con la carga máxima:

La curvatura es C=D/d=20 y el factor corrector, cerrando espiras según la figura, es:

$$K_C = \frac{C(4C+1)-1}{4C(C+1)} = 0{,}964$$ y la tensión máxima: $$\underline{\sigma_{MAX} = \frac{10{,}8MK_C}{d^3}} = \underline{\mathbf{483\ MPa}}$$

que se sitúa al 50% aprox. del limite elástico, equivalente a **s=2**.

Un resorte de torsión de existencia comercial está fabricado con alambre de acero de □1,4 mm, tiene 6 espiras y extremos rectos de 50 mm de largo y 180º de separación. El diámetro exterior es de 15 mm. El resorte ha de ser empleado en una aplicación en la que el momento de torsión en la situación de reposo es un 20% del máximo. (**2 puntos**)

Se pide:

1. El valor del momento torsor que originaría una tensión máxima igual a la tensión admisible del material
2. Si el momento de torsión obtenido en el apartado 1 se usa como momento torsionante de operación máximo ¿cuál sería el valor mínimo del diámetro interior?
3. Angulo de deformación correspondiente a la situación de reposo.
4. Realizar el esquema CARGA-DEFORMACIÓN del muelle indicando los puntos más significativos con sus valores correspondientes.

Datos:

- Limite elástico del material 880 N/mm^2
- Coeficiente de seguridad 1,65

SOLUCIÓN:

d = 1,4 mm
N = 6 espiras
x = 50 mm
α =180º separación extremos (muelle libre)

D_{EXT} = 15 mm.
M_{reposo} =0,2 $M_{máximo}$
R_E = 880 N/mm^2
s = 1,65

1. El valor del momento torsor que originaría una tensión máxima igual a la tensión admisible del material

$$\sigma_{ADM} = \frac{R_E}{s} = \frac{880}{1.65} = 533{,}33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ADM} = \sigma_{MAX} = \frac{10{,}8MK_C}{d^3} \Rightarrow M = \frac{\sigma_{MAX} d^3}{10{,}8K_C}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{15-1.4}{1.4} = 9.7 \Rightarrow K_c = 0{,}928$$

$$\boxed{M = \frac{533{,}33 \cdot 1.4^3}{10{,}8 \cdot 0.928} = 145{,}92 \text{Nmm}}$$

2. Si el momento de torsión obtenido en el apartado 1 se usa como momento torsionante de operación máximo, valor mínimo del diámetro interior

$$D'_{INT} = \frac{D_{INT} N}{N + \frac{\Delta\alpha}{360}} = \frac{12{,}2 \cdot 6}{6 + \frac{60{,}3}{360}} \Rightarrow \boxed{D'_{INT} = 11{,}9 \text{ mm}}$$

$$k = \frac{d^4 E}{3888DN} = \frac{1{,}4^4 2 \cdot 10^5}{3888 \cdot 13{,}6 \cdot 6} = 0{,}002 \text{ Nm/º}$$

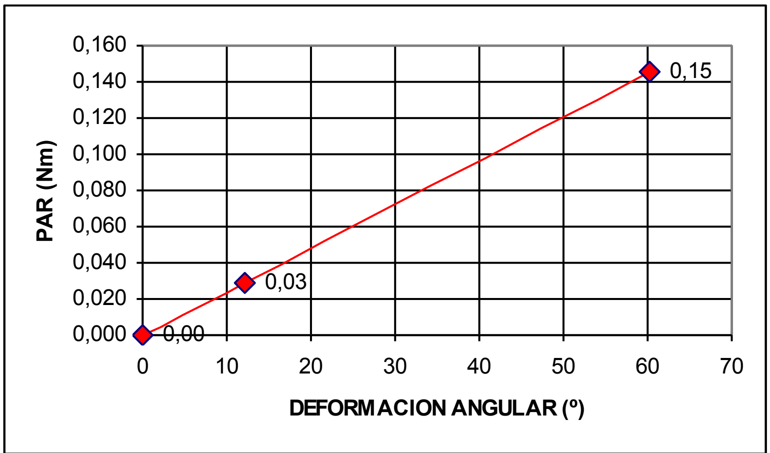
M= k Δα → Δα = M_{max} / k = 0,145 / 0,002 = 60,3 º

3. Angulo de deformación correspondiente a la situación de reposo.

M= k Δα

M_{reposo} =0,2 $M_{máximo}$ → $\Delta\alpha_{reposo}$ = 0,2 $\Delta\alpha_{máximo}$ → $\Delta\alpha_{reposo}$ = 0,2 · 60,3 → $\boxed{\Delta\alpha_{reposo} = 12{,}06º}$

4. Esquema CARGA-DEFORMACIÓN del muelle.



Posición	Deformac. Δα (º)	Momento M (Nm)	Tensión (N/mm^2)
Libre	0	0	0
Montaje	12,79	0,031	113,10
Máximo	63,96	0,155	533,33

En fisioterapia de rehabilitación se utilizan “puños elásticos de resorte” para la potenciación de la musculatura de los dedos y manos.

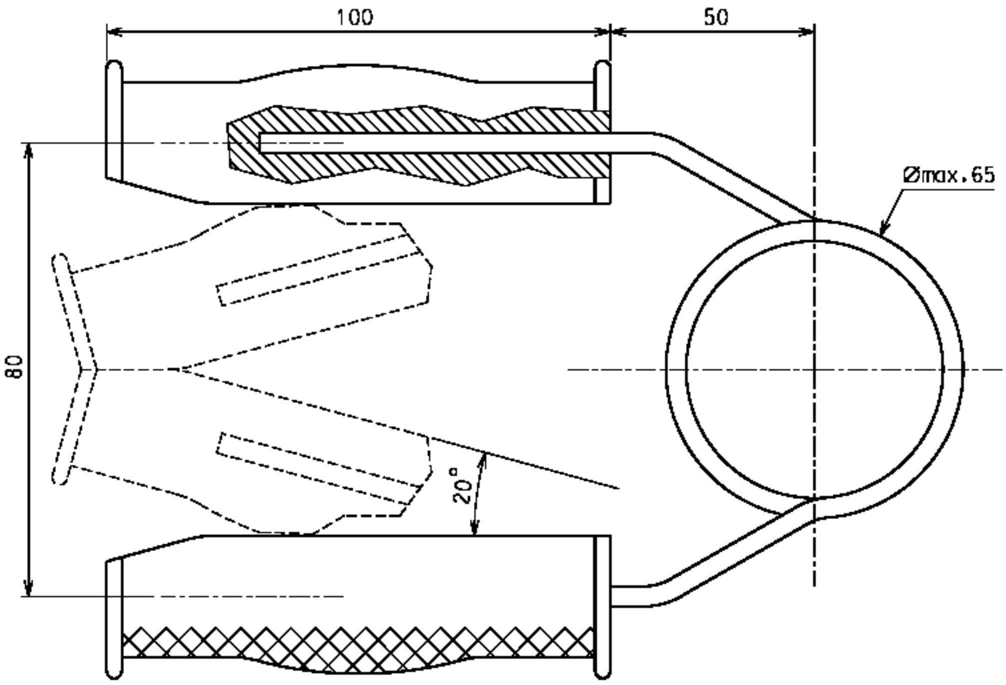
La figura sin escala representa un prediseño de un modelo en reposo, con el que se debe alcanzar una carga lineal de **1,32 kN/m** sobre toda la empuñadura en su deflexión máxima (en líneas de puntos).

El resorte cilíndrico-helicoidal de torsión tiene sus extremos insertados en las empuñaduras y debe ser de hilo de acero **F-1410 (R_E=1100 MPa)** con un diámetro **3<d<7mm**, siendo **d** un número entero.

SE PIDE:

1.- Determinar las dimensiones del resorte.

2.- Obtener el coeficiente de seguridad mínimo durante su utilización.



SOLUCIÓN

1.- La carga lineal máxima sobre la empuñadura y su correspondiente deflexión nos permiten obtener la rigidez angular necesaria:

Carga sobre la empuñadura: **F** = 1,32 kN/m . 100 mm = **132 N** en dirección normal.

Par máximo aplicado: **M** = 132 N . 100 mm = **13,2 Nm**

Deflexión máxima del resorte: $\boldsymbol{\alpha}$ = 2.20º = **40º**

Rigidez angular requerida: **k** = M/α = **0,33 Nm/º**

La expresión de la rigidez es: $k = \dfrac{d^4 E}{3888 D N}$ y siendo el diámetro exterior 65 mm como máximo, admitimos 64 mm y resulta D=64 –d.

Los valores posibles para **d** son 4, 5 y 6 mm, y los correspondientes de N, con E=200000 MPa aparecen el la tabla, junto con la curvatura **C**, el factor de corrección **K_C** "cerrando espiras" y la tensión máxima que permitirá decidir la solución adecuada:

d	**4**	**5**	**6**	**mm**
N	0,67	1,65	**3,49**	**esp.**
C	15	11,8	9,67	
K_C	0,952	0,940	0,927	
σ_{MAX}	*2120*	*1071*	**612**	**MPa**

La única solución válida es **HILO DE 6 mm y DIÁMETRO EXTERIOR DE 64 mm** ya que con los otros hilos se obtienen tensiones inviables.

El nº de espiras resulta **N=3,5 espiras** que se adapta a la forma del croquis, ya que debe ser un número entero mas 0,5 esp.

2.- Con la deflexión máxima, la carga y la tensión son máximas y en esta situación el coeficiente de seguridad, con relación al límite elástico es mínimo:

s = 1100 / 612 **= 1,8**

que se considera adecuado ya que la carga está limitada por la geometría, cuando las empuñaduras hacen tope.

Un dispositivo de telemando de un puente-grúa dispone de una palanca para realizar las operaciones de SUBIR-PARO-BAJAR las cargas, adoptando inclinaciones de +30º, 0º y -30º respectivamente.

La posición central es estable y se consigue por la acción de dos muelles helicoidales de torsión iguales, montados lateralmente a la palanca, en posición simétrica y sobre el eje de giro de la palanca.

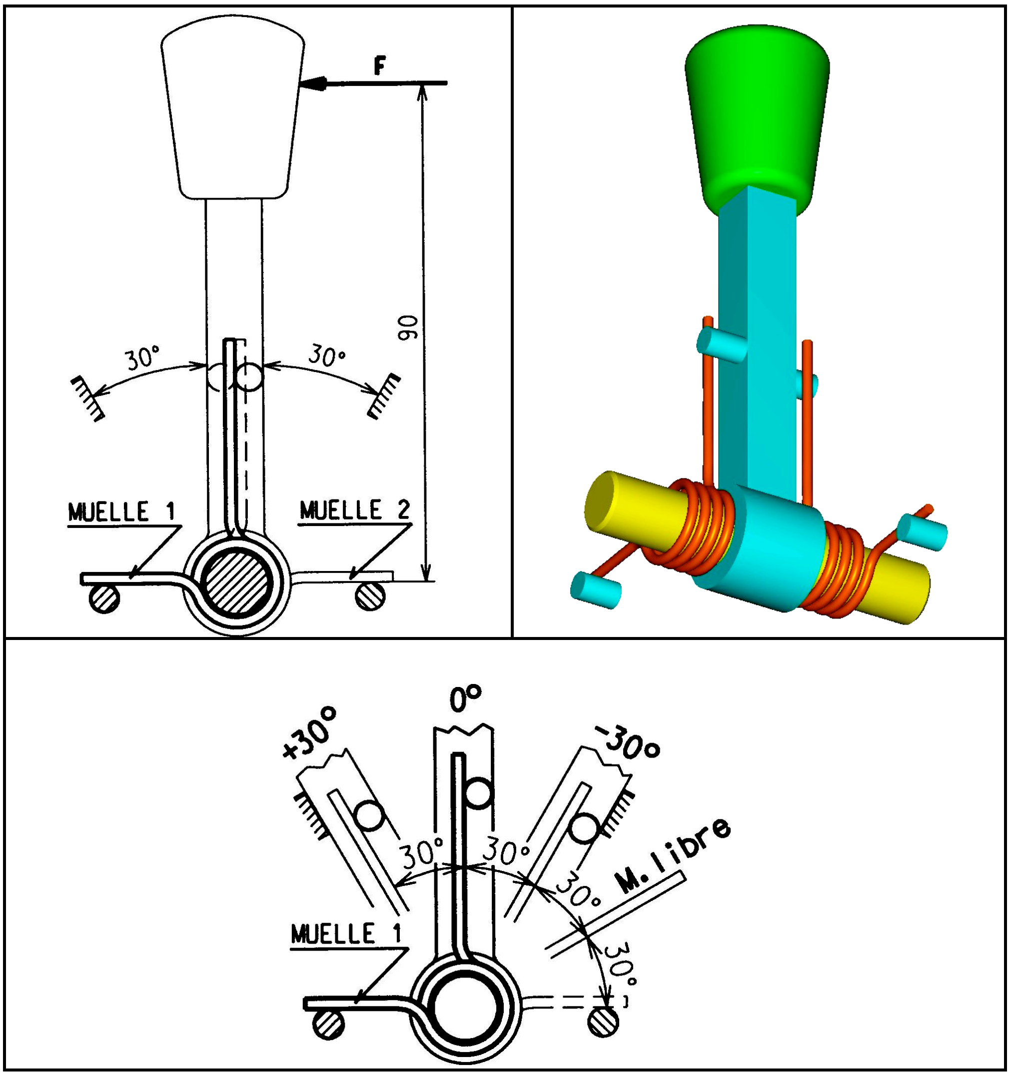
La máxima fuerza **F** de desplazamiento a realizar, normal a la palanca, debe ser **2 N**, aplicada en la empuñadura y a **90 mm** del centro del eje

SE PIDE:

1.- Determinar la rigidez angular de los resortes y representar la carga **F** en función del ángulo de inclinación.

2.- Dibujar la característica de un resorte aislado, indicando la carga y deformación en cada posición

3.- Obtener el nº de espiras que debe tener cada resorte, sabiendo que el hilo es de acero de **Ø1,5 mm** y el diámetro del eje de giro es **Ø9 mm**:



SOLUCIÓN

1.- Para un ángulo de inclinación α obtenemos:

Siendo $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ las acciones de los muelles sobre la palanca, k la rigidez angular de cada uno y M_O el par ejercido en "0":

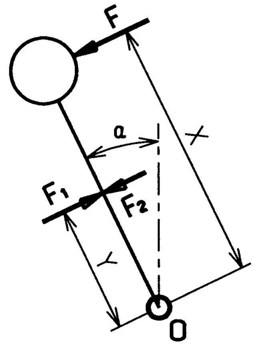
$$yF_1 = M_O + \alpha k \qquad yF_2 = M_O - \alpha k$$

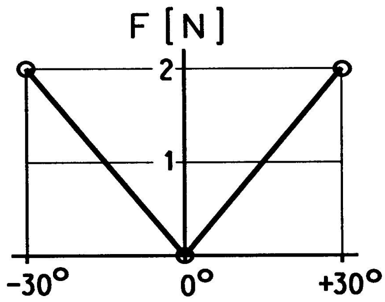
Tomando momentos en **O**: $Fx + yF_2 = yF_1$ y sustituyendo:

$Fx = 2K\alpha$ de donde: $k = \dfrac{Fx}{2\alpha}$ y siendo:

F=2N a=30º x=90 mm se obtiene:

<u>k=3 Nmm/º</u>

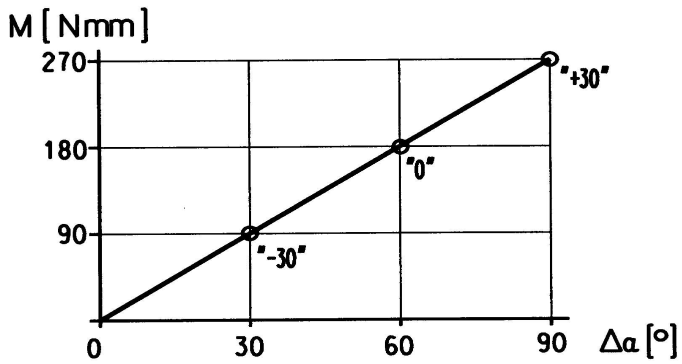




El valor de **F** en función de α resulta:

$$F = \frac{2k\alpha}{x} = \frac{\alpha}{15}\,N$$

2.- La característica de cada resorte es: $\mathbf{M=k\alpha}$:



3.- De la expresión de la rigidez angular obtenemos: $N = \dfrac{d^4E}{3888Dk}$ y siendo:

d=1,5mm E=200000 N/mm^2 k=3 Nmm/º D=9+1+d=11,5 mm

resulta:

<u>N=7,55 espiras</u>