Para calibrar la rigidez de un resorte a compresión se utiliza un dispositivo donde se colocan 3 pesas diferentes, calibradas en laboratorio. El coeficiente de rigidez se determina dividiendo el valor del peso por la longitud comprimida, establecida por un sistema de medida de longitudes también calibrado en laboratorio.

$$k = \frac{m \cdot g}{x}$$

Estimar la incertidumbre de la rigidez de un resorte a compresión, con los siguientes datos de una calibración.

- $k_{TEÓRICA}$ = 1200 N/m
- Datos de las masas de las pesas:
  - M1 = 10.224 kg U(M1) = 10 g (k = 2).
  - M2 = 20.422 kg U(M2) = 10 g (k = 2).
  - M3 = 30.617 kg U(M3) = 10 g (k = 2).
- El equipo de medida longitudinal presenta una resolución de 0.1 mm y una incertidumbre expandida U(X) = 50 μm (k = 2).
- Datos de la gravedad:
  - g = 9.8066 m/s^2 U(g) = 0.004 m/s^2 (k = 2).
- Datos de incertidumbre asociados al montaje.
  - $U_{Montaje}$ = 7 N/m (k = 2).
- La resolución empleada es de 1 N/m.
- Los datos de las medidas de la rigidez del resorte, para tres puntos diferentes, son:

Puntos de calibración		PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
Valor nominal		1200 N/m	1200 N/m	1200 N/m
Datos registrados	k_{1j}	1202	1208	1211
	k_{2j}	1203	1210	1212
	k_{3j}	1205	1209	1211
	k_{4j}	1201	1210	1213
	k_{5j}	1204	1210	1212
	k_{6j}	1203	1207	1212
	k_{7j}	1204	1207	1211
	k_{8j}	1203	1209	1214
	k_{9j}	1202	1208	1212
	k_{10j}	1203	1207	1212

SOLUCIÓN

Punto 1	X1 = M1*g/k =	0.0836 m	u(X1)=	2.50E-05 m
Punto 2	X2 = M2*g/k =	0.1669 m	u(X2)=	2.50E-05 m
Punto 3	X3 = M3*g/k =	0.2502 m	u(X3)=	2.50E-05 m

Punto 1	M1 =	10.224 kg	u(M1)=	5.00E-03 kg
Punto 2	M2 =	20.422 kg	u(M2)=	5.00E-03 kg
Punto 3	M3 =	30.617 kg	u(M3)=	5.00E-03 kg

g = 9.8066 m/s2 U(g) = 0.004 m/s2 (k = 2).	u(g) = 0.002 m/s^2

E= 1 N/m

Ptos. de calib.	Punto 1	Punto 2	Punto 3
Valor Nominal	1200	1200	1200
Lectura 1	1202	1208	1211
Lectura 2	1203	1210	1212
Lectura 3	1205	1209	1211
Lectura 4	1201	1210	1213
Lectura 5	1204	1210	1212
Lectura 6	1203	1207	1212
Lectura 7	1204	1207	1211
Lectura 8	1203	1209	1214
Lectura 9	1202	1208	1212
Lectura 10	1203	1207	1212

$\bar{k}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}$	1203	1208.5	1212
$s_{ci} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}-\bar{k}_i)^2}{n-1}}$	1.155	1.269	0.943
$u(\bar{k}_i) = \frac{s_{ci}}{\sqrt{n}}$	0.365	0.401	0.298
$\left(g/x_i\right)^2 u^2(m_i)$	0.3444	0.0863	0.0384
$\left(-mg/x_i^2\right)^2 u^2(x_i)$	0.1289	0.0323	0.0144
$\left(m/x_i\right)^2 u^2(g)$	5.7600	5.7600	5.7600
$u(k_{0i})$	2.4967	2.4246	2.4110
$u(E) = \frac{E}{\sqrt{12}}$	0.2887	0.2887	0.2887
$u(\delta_{montaje}) = \frac{U_{montaje}}{2}$	3.5000	3.5000	3.5000
$U(C_i) =$	8.649	8.573	8.540
$C_i =$	-3	-8.5	-12

$U =$ 8.649 N/m

La ecuación modelo para la corrección de calibración será la siguiente:

$$C_i = k_{oi} - \overline{k}_i + \delta_{montaje} = \frac{m_i g}{x_i} - \overline{k}_i + \delta_{montaje} + \delta_E$$

- C_i es la corrección final de calibración en el punto de calibración i
- k_{oi} es el valor nominal del patrón en el punto de calibración i
- $\overline{k}_i$ es el valor medio de las medidas en el punto de calibración i
- $\delta_{montaje}$ es la corrección debida al montaje.
- δ_E es la corrección debida a la resolución del equipo.

Aplicando la ley de propagación de varianzas (sobre los estimadores) tendremos la expresión para la incertidumbre típica combinada:

$$u\left(C_i\right) = \sqrt{u^2\left(k_{oi}\right) + u^2(\overline{k}_i) + u^2(\delta_{montaje}) + u^2\left(\delta_E\right)}$$

Componentes de la incertidumbre:

- $u(\overline{k}_i)$, Incertidumbre tipo A debida a la repetibilidad de las medidas.

$$u\left(rep\right) = \frac{s_{ci}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij} - \overline{k}_i\right)^2}{n-1}}$$

k_{ij}, rigidez registrada en la medida "j" del punto de calibración "i"

$\overline{k}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_{ij}$ valor medio de las n = 10 medidas tomadas en el punto de calibración i

- $u\left(k_{oi}\right)$, Incertidumbre tipo B debida al patrón.: Al ser una medida indirecta vendrá dada por la ley de propagación de varianzas,

$$u^2\left(k_{oi}\right) = \left(\frac{\partial k_i}{\partial m_i}\right)^2 u^2\left(m_i\right) + \left(\frac{\partial k_i}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right) + \left(\frac{\partial k_i}{\partial g}\right)^2 u^2\left(g\right)$$

$$u^2\left(k_{oi}\right) = \left(\frac{g}{x_i}\right)^2 u^2\left(m_i\right) + \left(\frac{-mg_i}{x_i^2}\right)^2 u^2\left(x_i\right) + \left(\frac{m_i}{x_i}\right)^2 u^2\left(g\right)$$

$u\left(m_i\right) = \frac{U\left(M_i\right)}{K_{cert}}$ es la incertidumbre de la masa patrón y se calcula a partir del certificado de calibración

$u^2\left(x_i\right) = \left(\frac{U\left(X_i\right)}{K_{cert}}\right)^2 + \left(\frac{E_{regla}}{\sqrt{12}}\right)^2$ es la incertidumbre de la regla patrón y se calcula a partir del certificado de calibración y de la incertidumbre asociada a su resolución E_{regla}

$u\left(g\right) = \frac{U\left(g\right)}{K_{cert}}$ es la incertidumbre de la gravedad y se calcula a partir del certificado de calibración.

- $u(\delta_{montaje})$: Incertidumbre debida al incorrecto posicionamiento del resorte respecto a la vertical: Basándose en la experiencia se estima que su valor es:

$$u(\delta_{montaje}) = \frac{U_{montaje}}{k} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ N/m$$

- $u(\delta_E)$: incertidumbre debida a la resolución del equipo. Puede describirse por una distribución rectangular, su valor es:

$$u(\delta_{montaje}) = \frac{E}{\sqrt{12}}$$

Cálculo de la incertidumbre expandida (con factor de cobertura k = 2):

Considerando que todas las variables de entrada son independientes se tiene la expresión:

$$U\left(C_i\right) = k\sqrt{\left(\frac{g}{x_i}\right)^2\left(\frac{U\left(M_i\right)}{K_{cert}}\right)^2 + \left(\frac{-mg_i}{x_i^2}\right)^2\left[\left(\frac{U\left(X_i\right)}{K_{cert}}\right)^2 + \left(\frac{E_{regla}}{\sqrt{12}}\right)^2\right] + \left(\frac{m_i}{x_i}\right)^2\left(\frac{U\left(g\right)}{K_{cert}}\right)^2 + \left(\frac{s_{ci}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{U_{montaje}}{k}\right)^2 + \left(\frac{E}{2\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\boxed{U = \max U\left(C_i\right)}$$