6. Autómatas a Pila

Araceli Sanchis de Miguel
Agapito Ledezma Espino
José A. Iglesias Martínez
Beatriz García Jiménez
Juan Manuel Alonso Weber

Grado Ingeniería Informática
Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Introducción

Definición

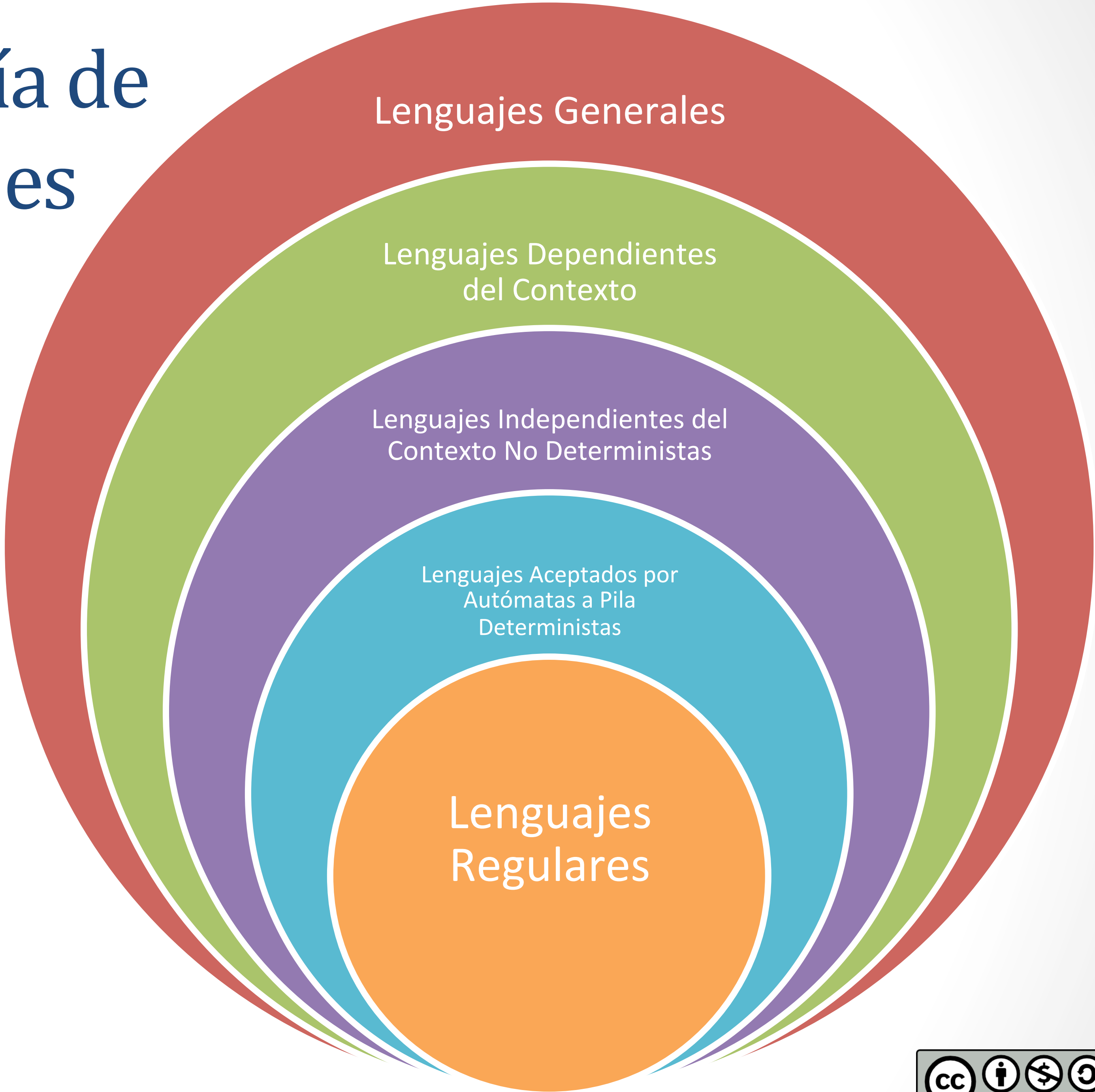
Equivalencias

Lenguajes Tipo 2

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

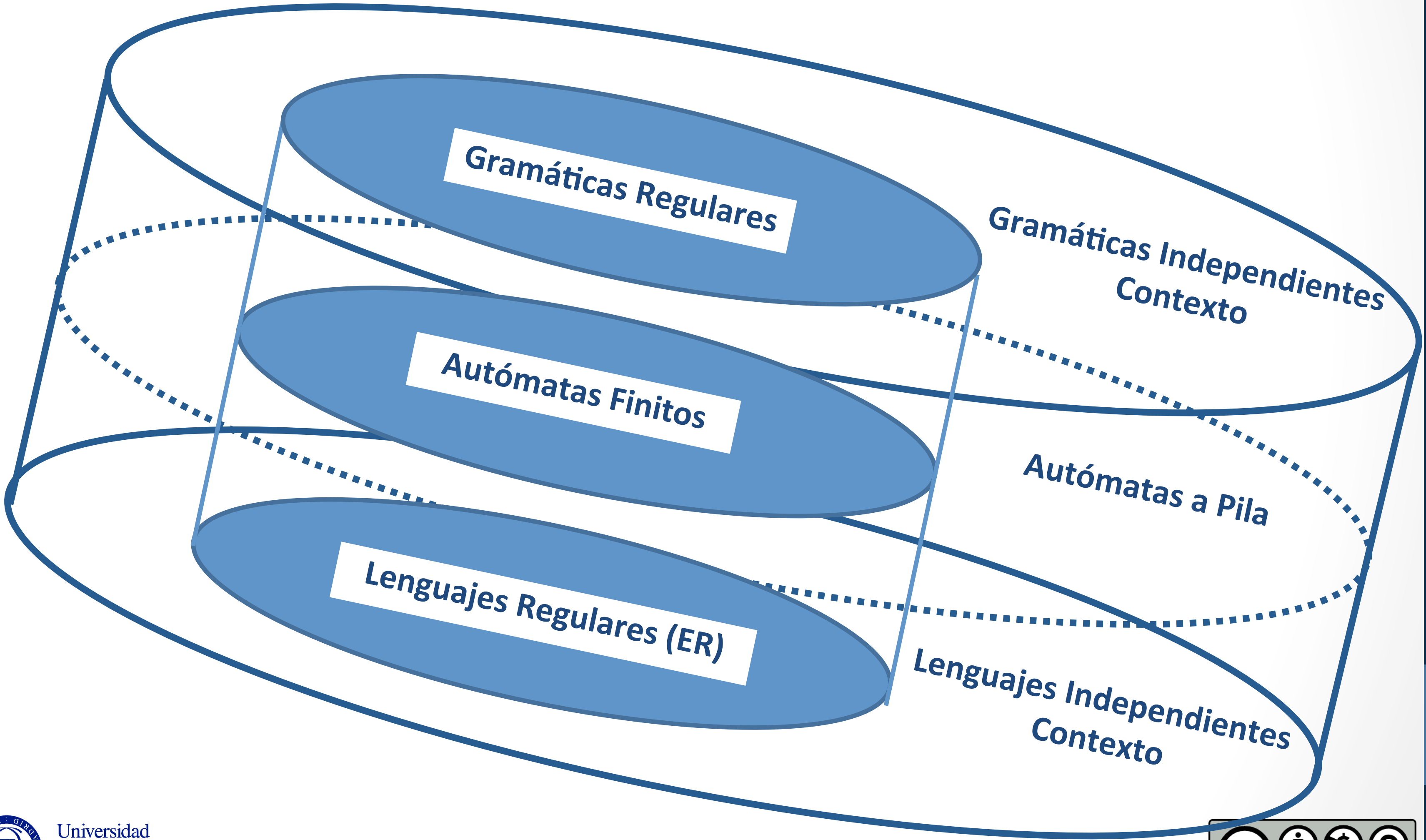
Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Jerarquía de Lenguajes



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Jerarquía de Lenguajes

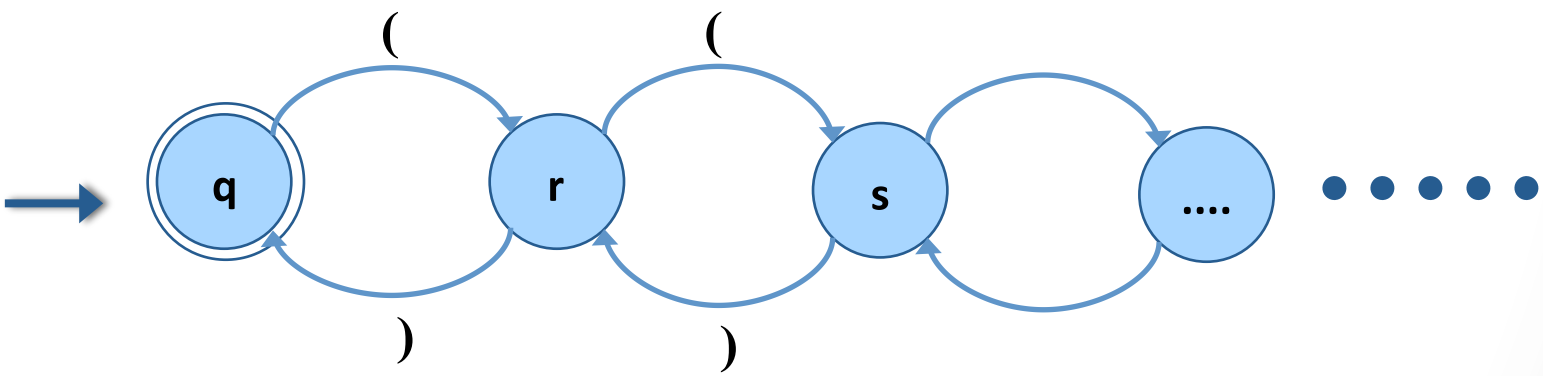


Limitaciones de los AF

Falta de memoria

No pueden reconocer expresiones matemáticas,

pej. `(2x+(2+n/25))`, mas general el lenguaje X^nY^n



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Teoremas

1 Para cada gramática G independiente del contexto, existe un autómata de pila M tal que

$$L(G)=L(M)$$

2 Para cada autómata de pila M, existe una gramática G independiente del contexto tal que

$$L(M)=L(G)$$

3 Existe un lenguaje independiente del contexto que no es el lenguaje aceptado por ningún autómata de pila determinista

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Introducción

Definición

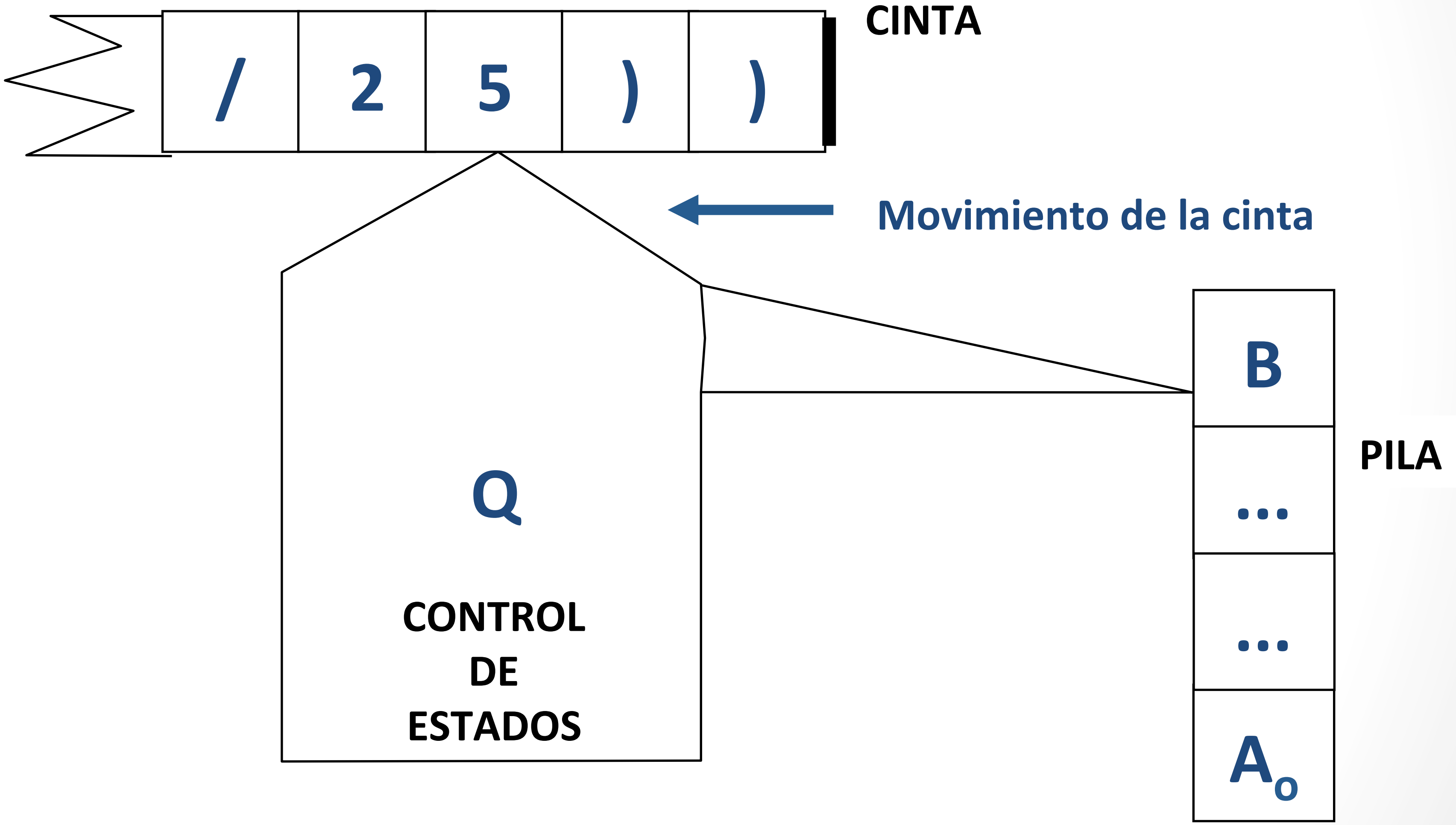
Equivalencias

Lenguajes Tipo 2

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

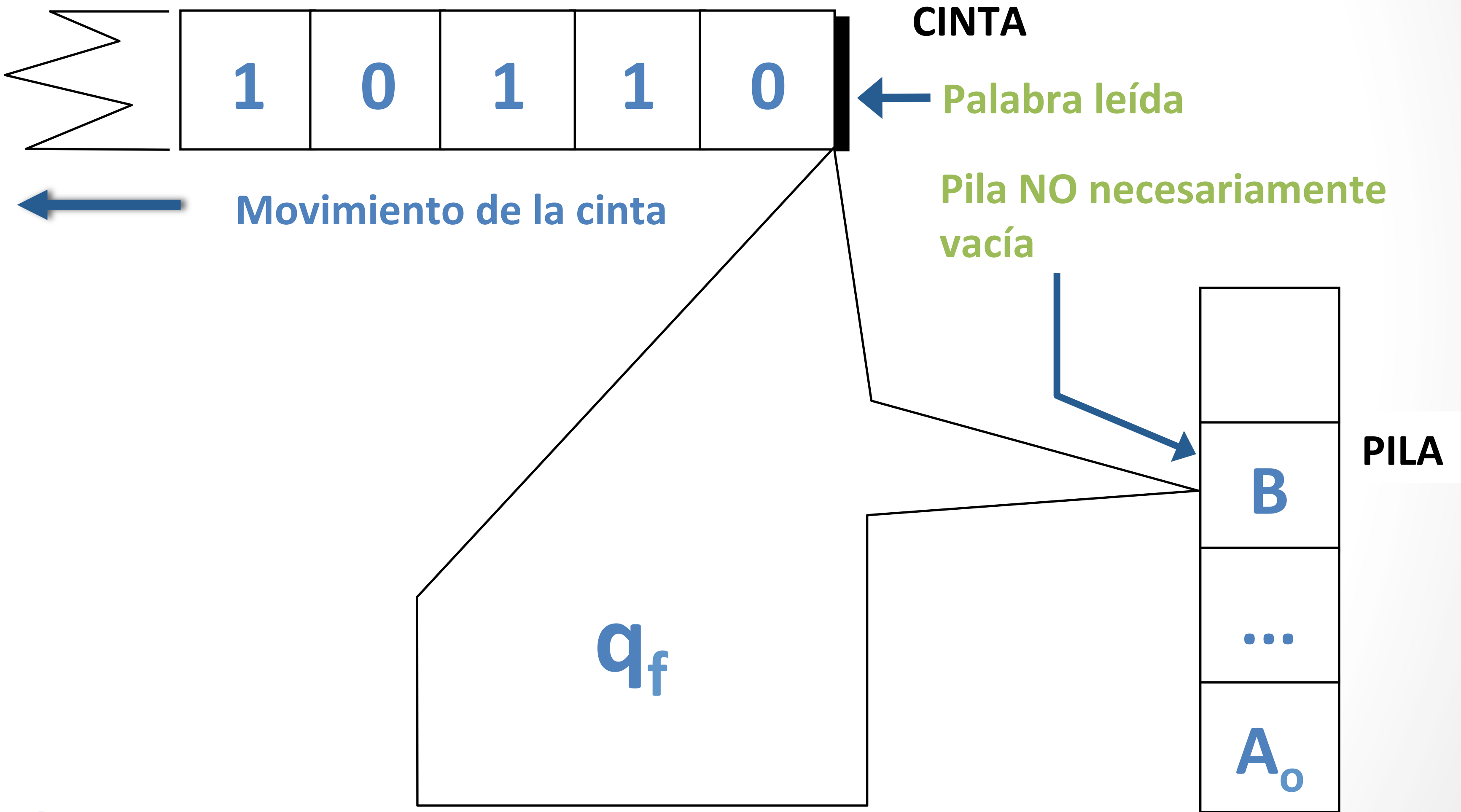
Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Definición de AP



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

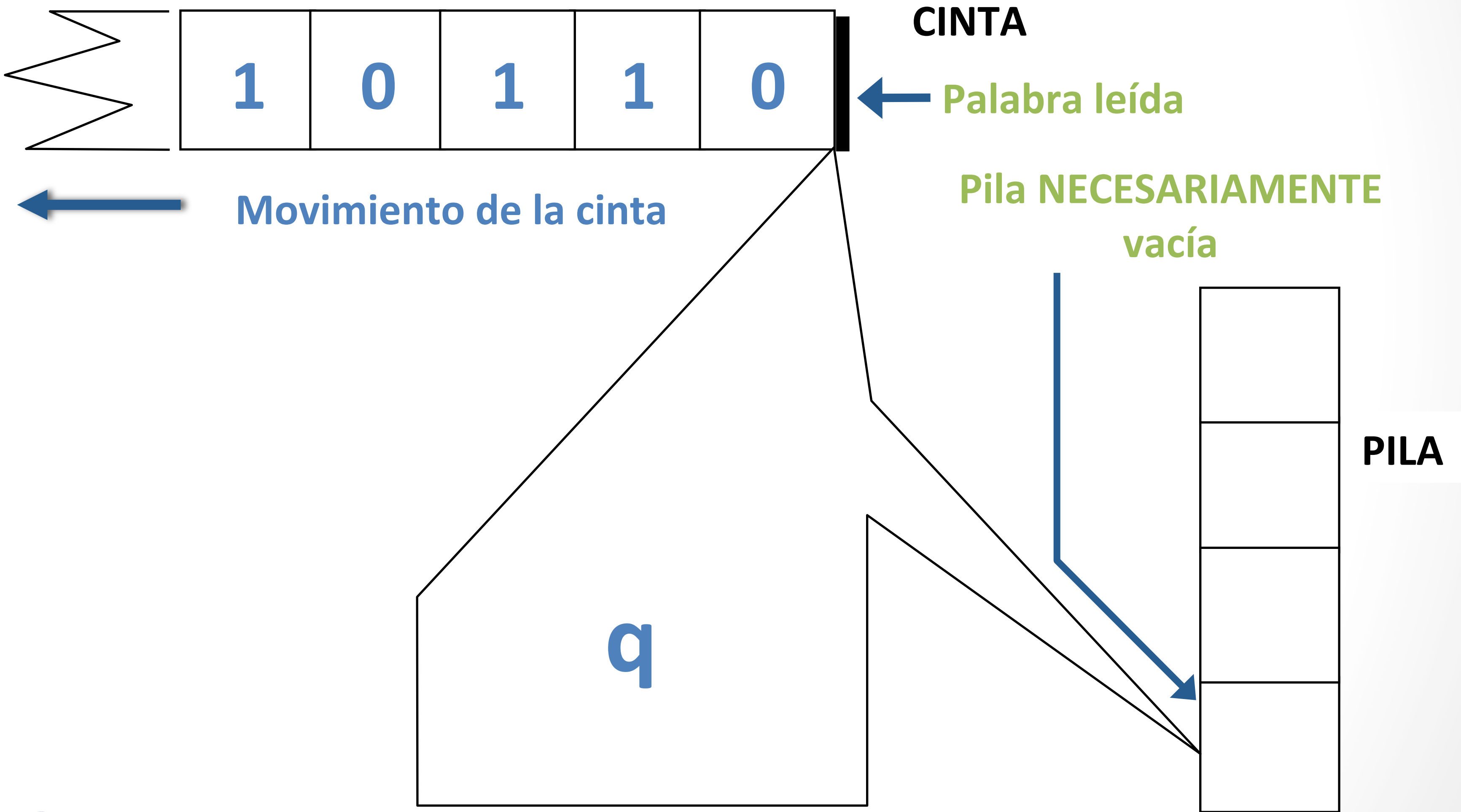
Aceptación por estados finales



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

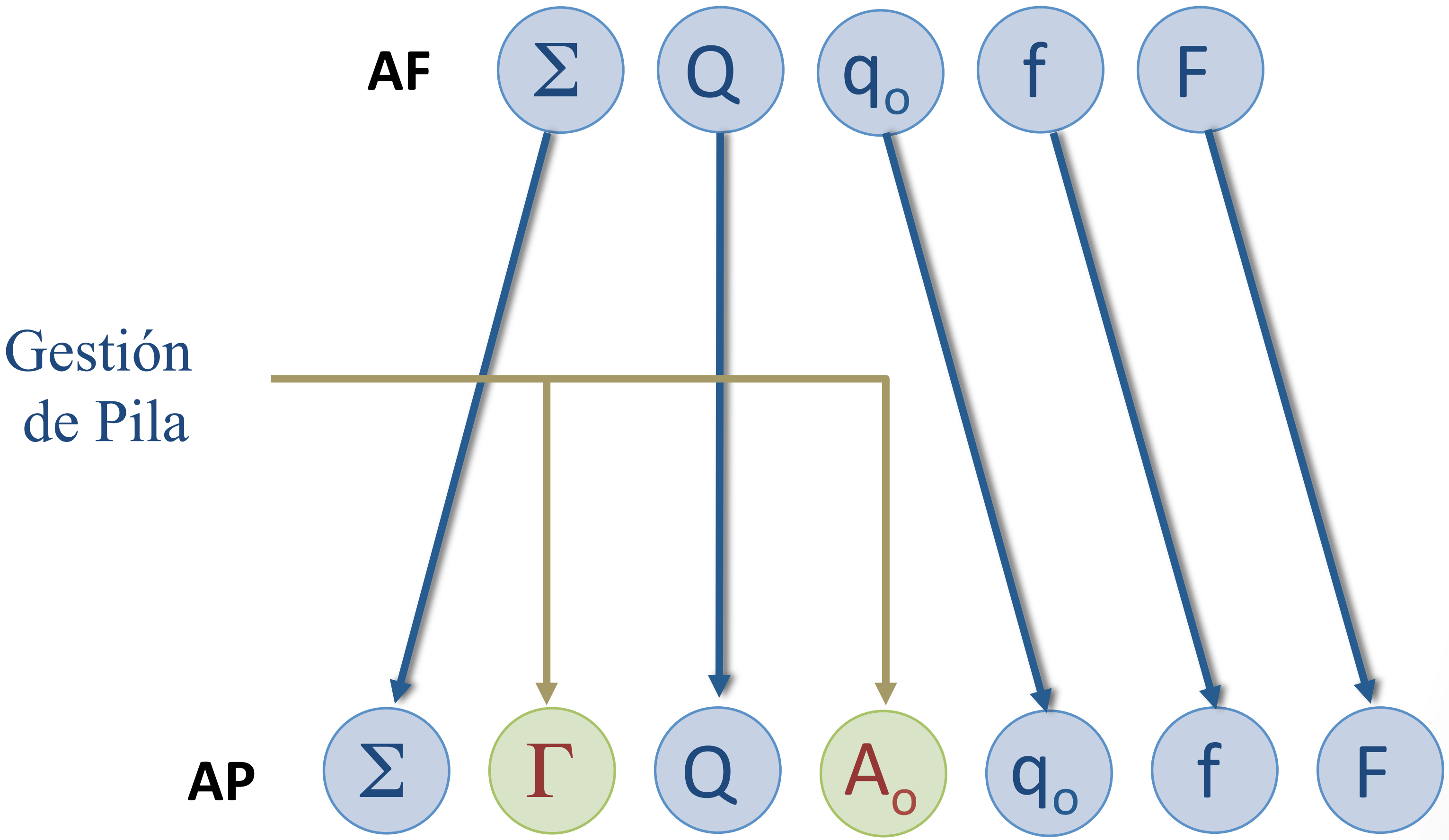
Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Aceptación por vaciado de pila



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Definición formal



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

AP: $(\Sigma, \Gamma, Q, A_o, q_o, f, F)$

Σ : alfabeto de entrada — Palabras: x, y, z, ax, ay...

Γ : alfabeto de pila — Palabras: X, Y, Z, AX, AY...

Q : conjunto finito de estados — Q = {p,q,r,...}

$A_o \in \Gamma$: símbolo inicial de la pila

$q_o \in Q$: estado inicial del autómata

f : función de transición

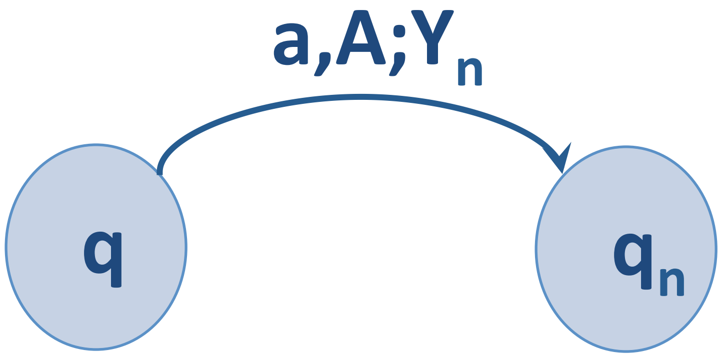
$F \subset Q$: conjunto de estados finales

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Transición

$$f(q,a,A)=\{(q_1,Z_1),(q_2, Z_2),\ldots,(q_n, Z_n)\}$$



1. Leer un símbolo de la entrada
2. Extraer un símbolo de la pila
3. Insertar una palabra en la pila
4. Pasar a un nuevo estado

$$(q,a,A;q_n,Y_n)$$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Función de Transición

$$f : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$$

Transiciones dependientes de la entrada

$Q \times \Sigma \times \Gamma$

Transiciones independientes de la entrada

$Q \times \lambda \times \Gamma$

AP Deterministas

$Q \times \Gamma^*$

AP No Deterministas

$P(Q \times \Gamma^*)$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

T. independientes de la entrada

Sea la transición:

$f(q, \lambda, A) = \{(q_1, Z_1), (q_2, Z_2), \ldots, (q_n, Z_n)\}$

donde:

$q, q_i \in Q$

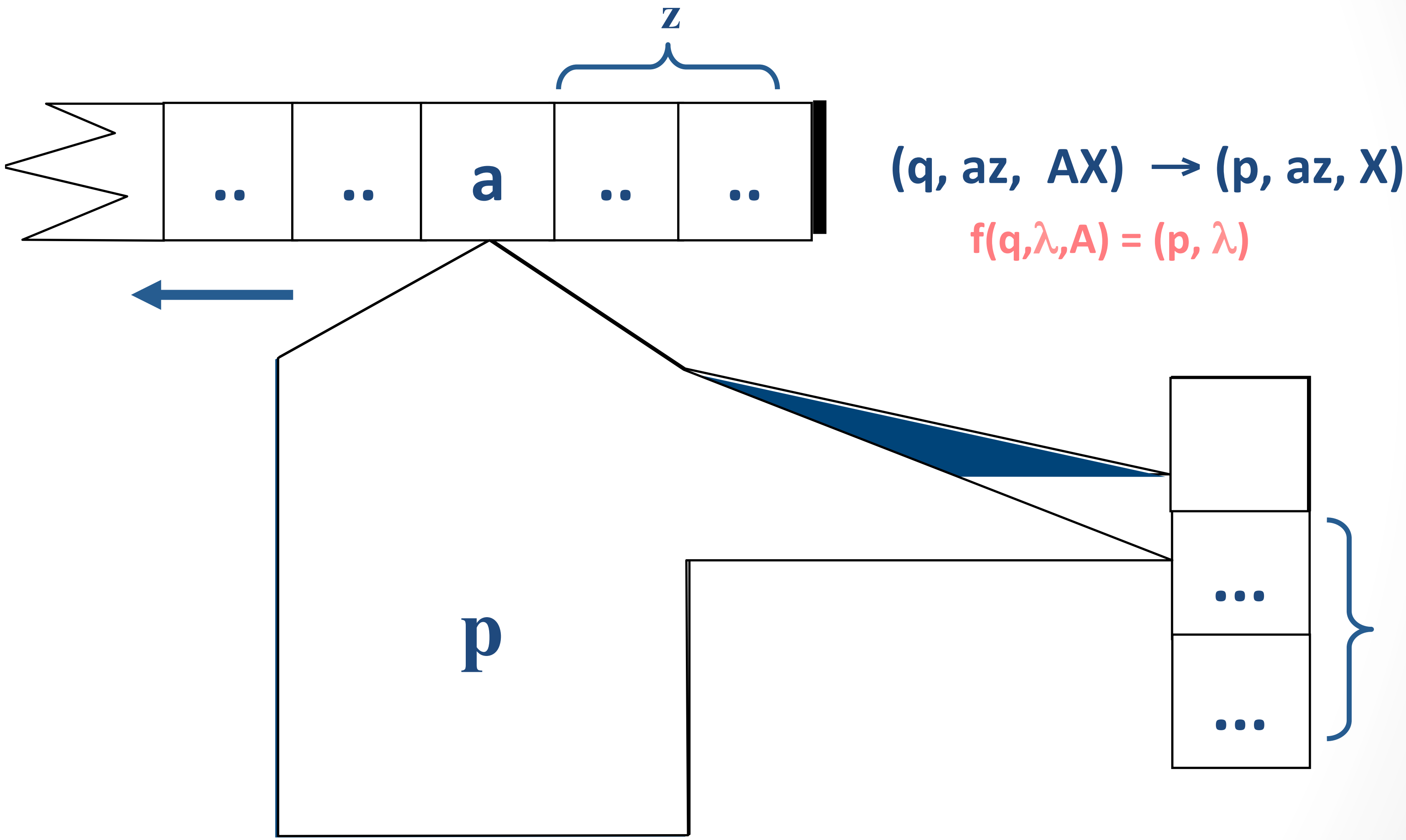
$A \in \Gamma$

$Z_i \in \Gamma^*$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

T. independientes de la entrada



(q, az, AX) $\rightarrow$ (p, az, X)

f(q,λ,A) = (p, λ)

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

T. dependientes de la entrada

Sea la transición:

$f(q,a,A) = \{(q_1,Z_1), (q_2,Z_2),\ldots,(q_n,Z_n)\}$

donde:

$q, q_i \in Q$

$a \in \Sigma$

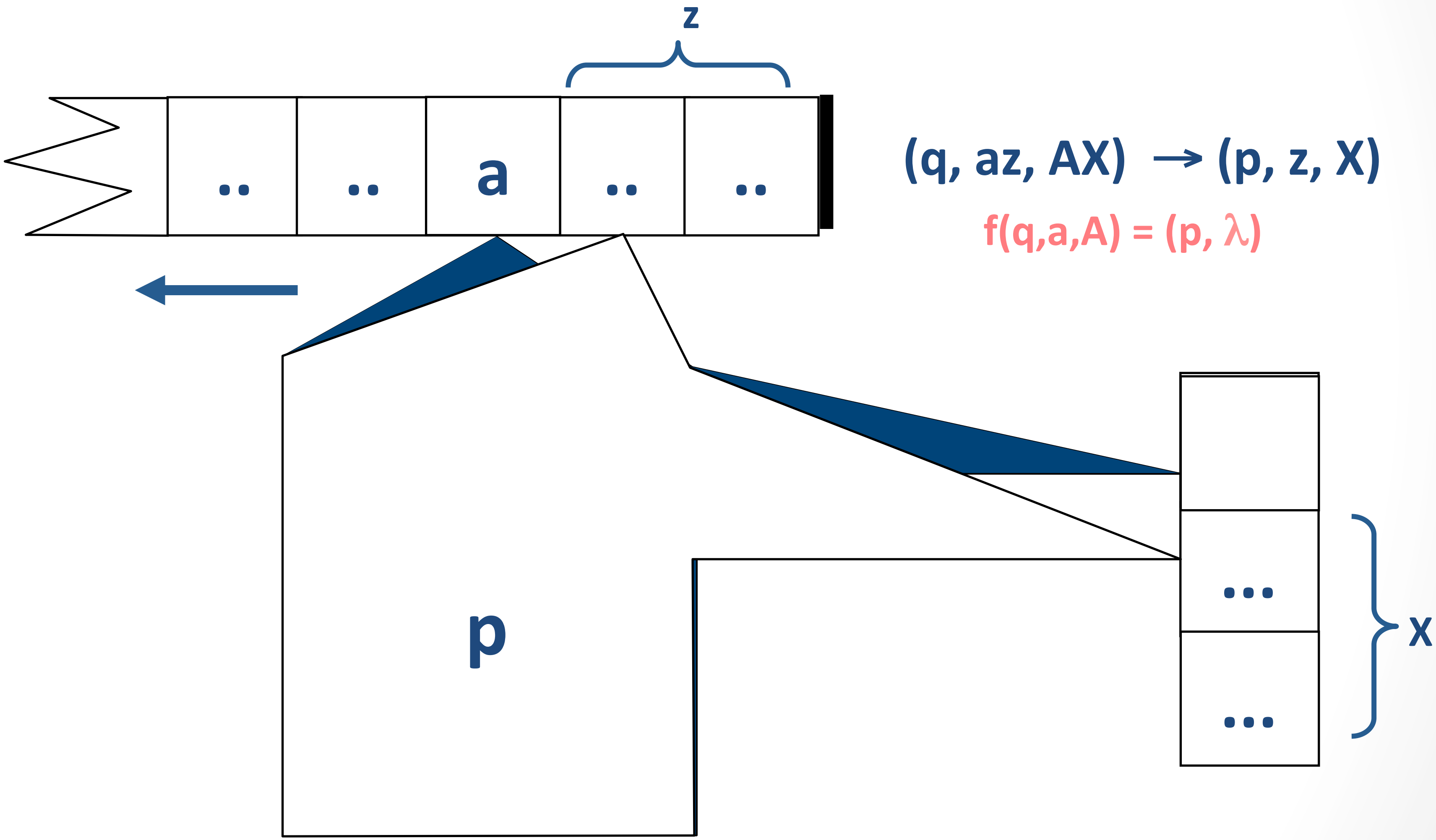
$A \in \Gamma$

$Z_i \in \Gamma^*$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

T. dependientes de la entrada



(q, az, AX) → (p, z, X)

f(q,a,A) = (p, λ)

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Descripción Instantánea

Permite describir sencillamente la configuración del AP en cada momento

Terna (q,x,z) donde:

$$q \in Q,\ x \in \Sigma^*,\ z \in \Gamma^*$$

Contiene:

- el estado actual (**q**)
- lo que queda por leer de la entrada (**x**) y
- el símbolo en la cima de la pila (**z**)

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Descripción Instantánea

Movimiento: (q,ay,AX)⊢(p,y,YX)
describe el paso de una descripción instantánea a otra

Sucesión de movimientos:
(q,ay,AX) ⊢*(p,y,YX)
representa que desde la primera descripción instantánea se puede alcanzar la segunda

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Autómatas a Pila Deterministas

$(\Sigma,\Gamma,Q,A_0,q_0,f,F)$ es determinista si verifica:

$\forall q \in Q,\ A \in \Gamma,\ |\, f(q,\lambda,A) \,| > 0 \Rightarrow f(q,a,A) = \Phi\ \ \forall a \in \Sigma$

$\forall q \in Q,\ A \in \Gamma,\ \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\},\ |\, f(q,a,A) \,| < 2$

si (p, x, y; q, z) y (p, x, y; r, w) son transiciones de un autómata a pila determinista entonces

$q \equiv r,\ z = w$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Lenguaje aceptado por un AP

Por vaciado de pila

$$LV_{AP}=\{x \mid (q_0,x,A_0) \vdash^* (p,\lambda,\lambda),\ p \in Q,\ x \in \Sigma^*\}$$

Por estado final

$$LF_{AP}=\{x \mid (q_0,x,A_0) \vdash^* (p,\lambda,X),\ p \in F,\ x \in \Sigma^*, X \in \Gamma^*\}$$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

LENGUAJE: algunas instrucciones

var ::= num; (asignación)

if cond

then

BLOQUE (asignación ó if)

if cond

then

BLOQUE (asignación ó if)

else

BLOQUE (asignación ó if)

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

AP= ({if, then, else, ::=, var, num, cond, ;}, {S, B, C, F, N, P, T, E}, {q}, q, S, f, ϕ)

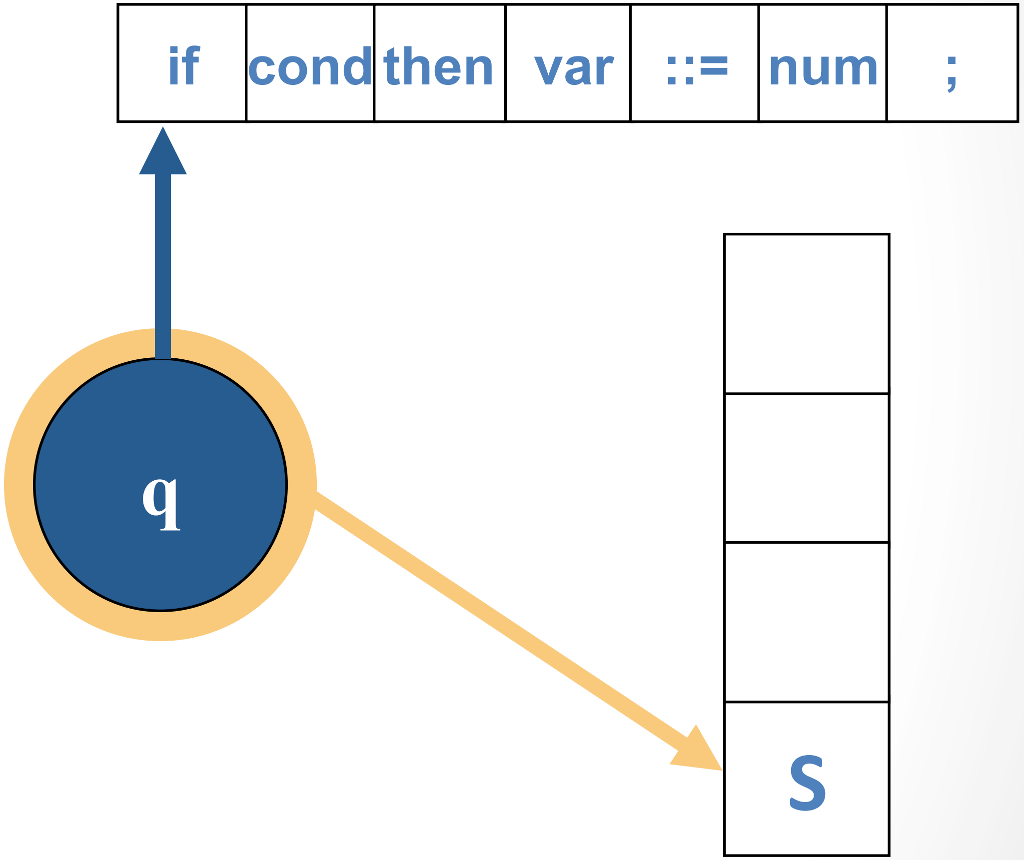
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

ELEMENTOS DE Γ

- S → Símbolo inicial
- F → ::=
- N → Numero
- P → ;
- C → Condición
- T → Then
- B → Bloque
- E → Else

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}

f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}

f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}

f(q, var, B) = {(q, FN)}

f(q, cond, C) = {(q, λ)}

f(q, ::=, F) = {(q, λ)}

f(q, num, N) = {(q, λ)}

f(q, ;, P) = {(q, λ)}

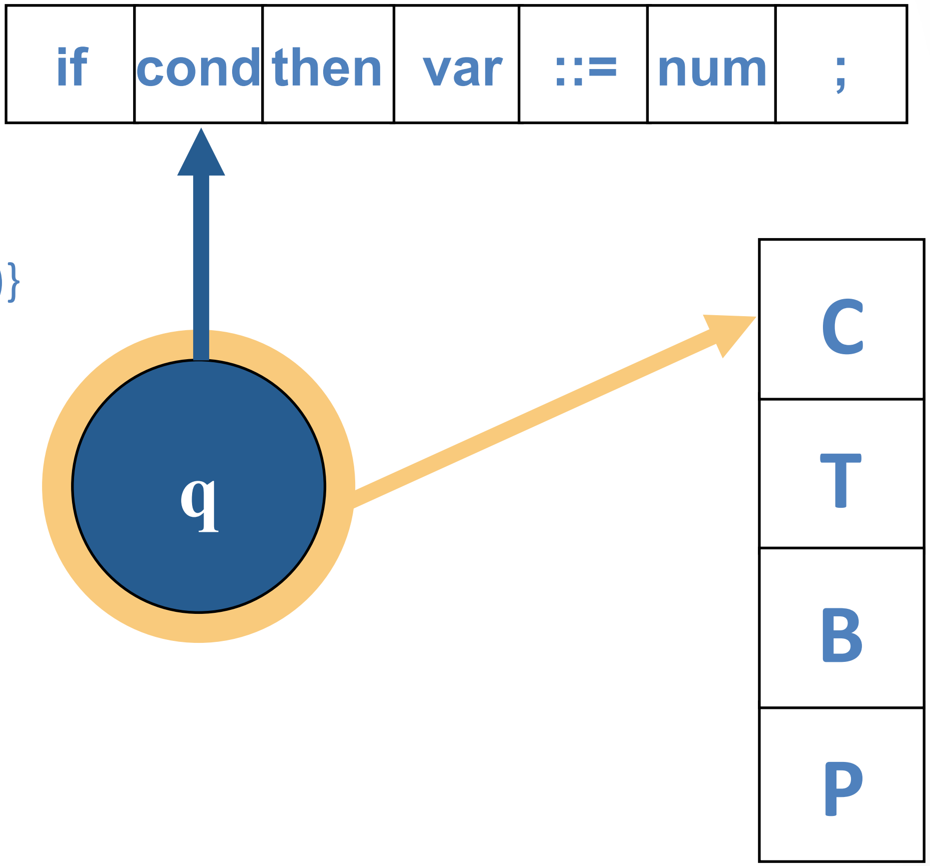
f(q, then, T) = {(q, λ)}

f(q, else, E) = {(q, λ)}

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

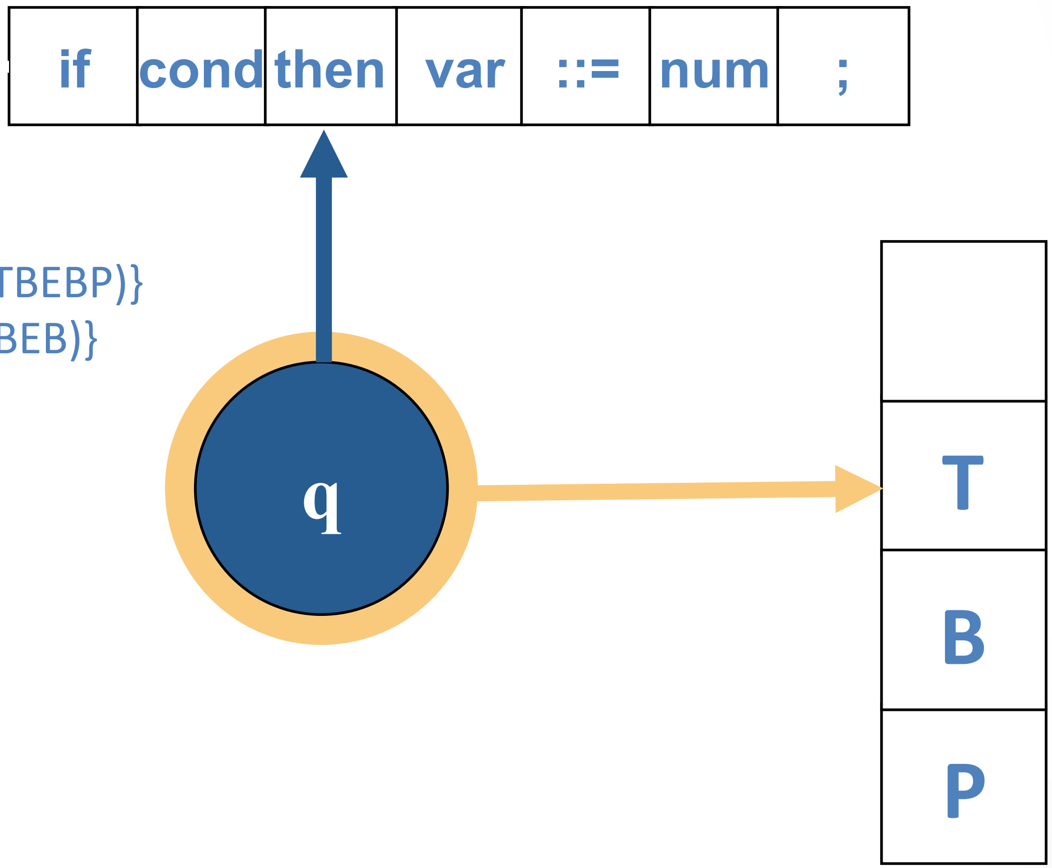
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

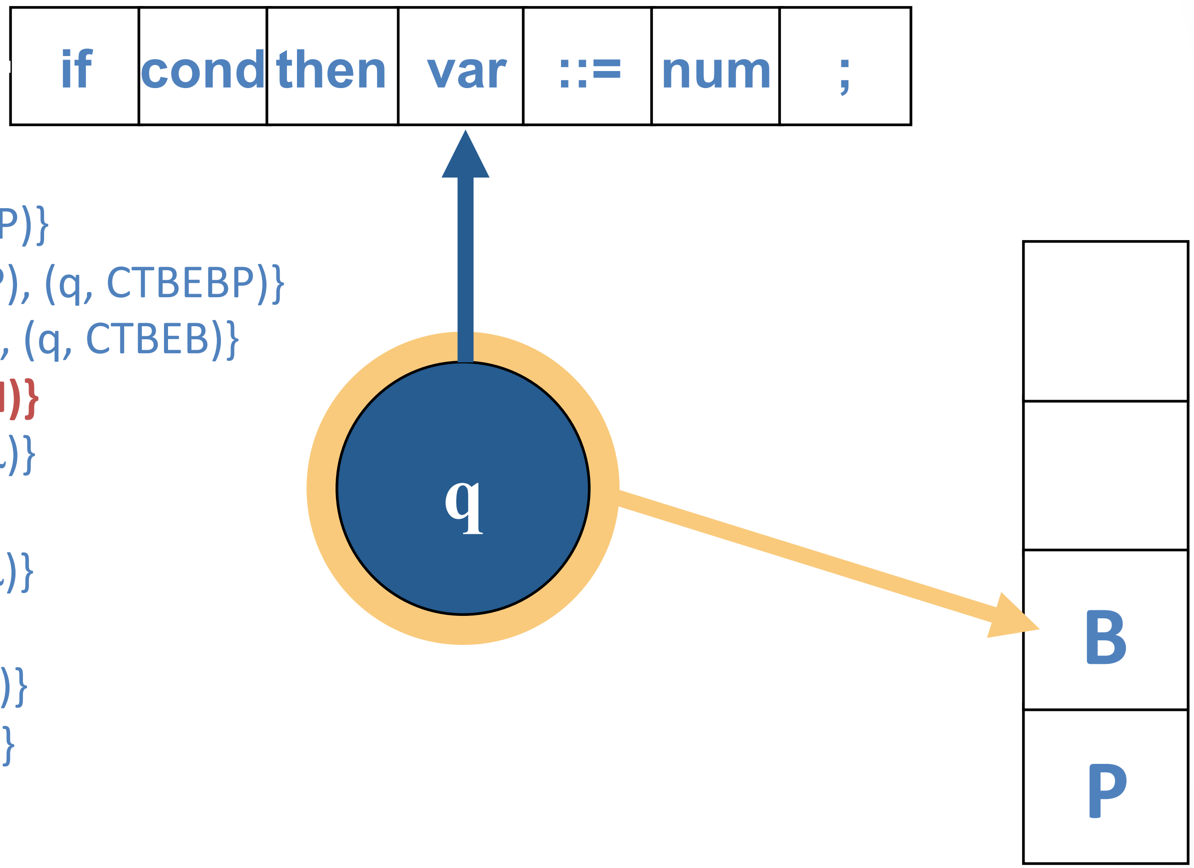
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo



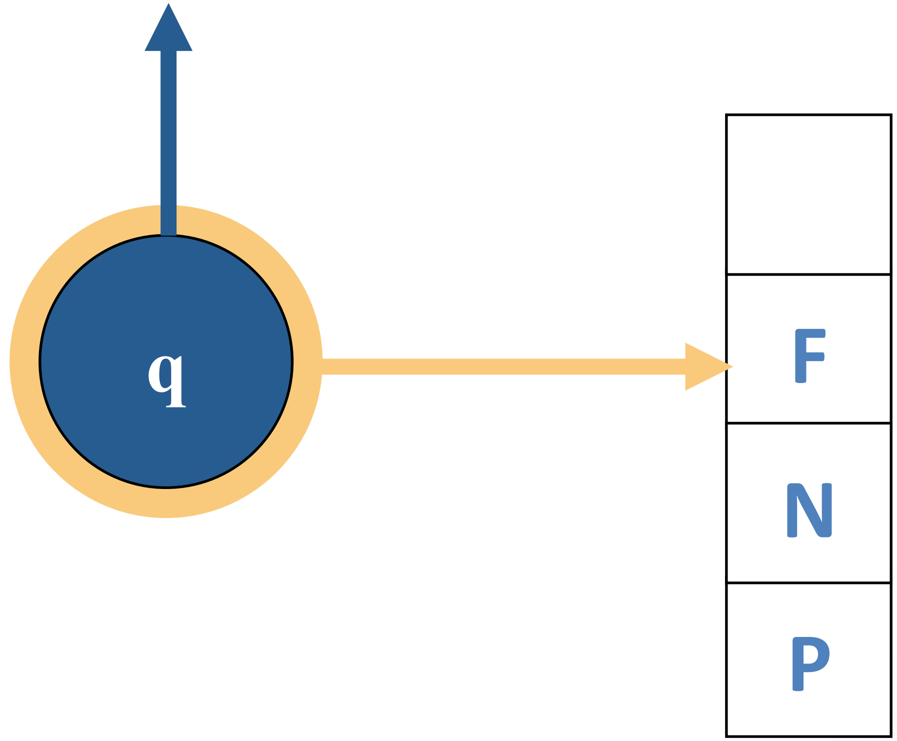
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;

f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}



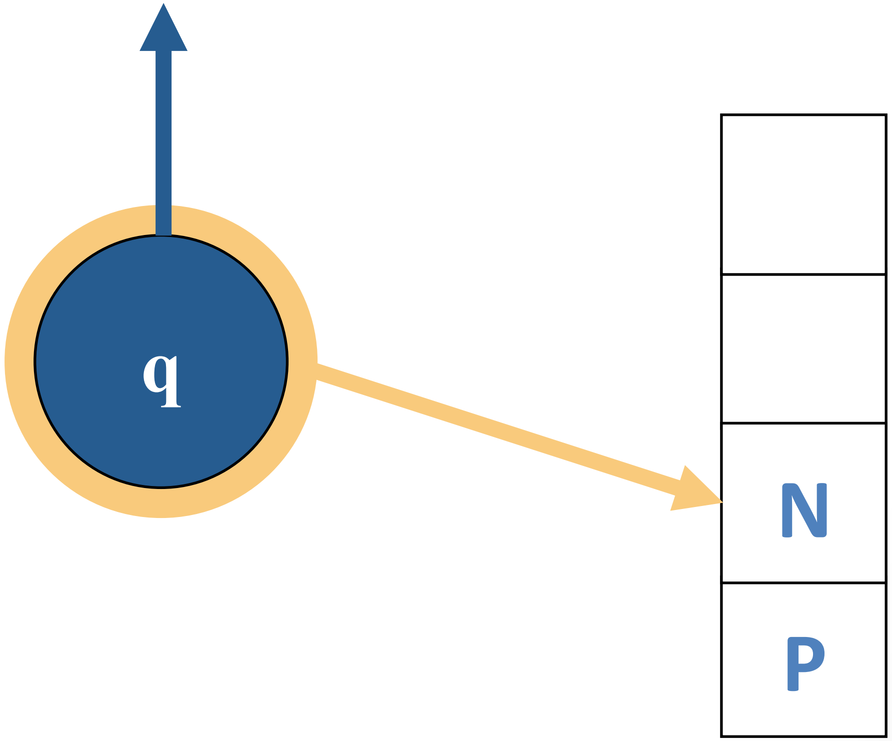
A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;

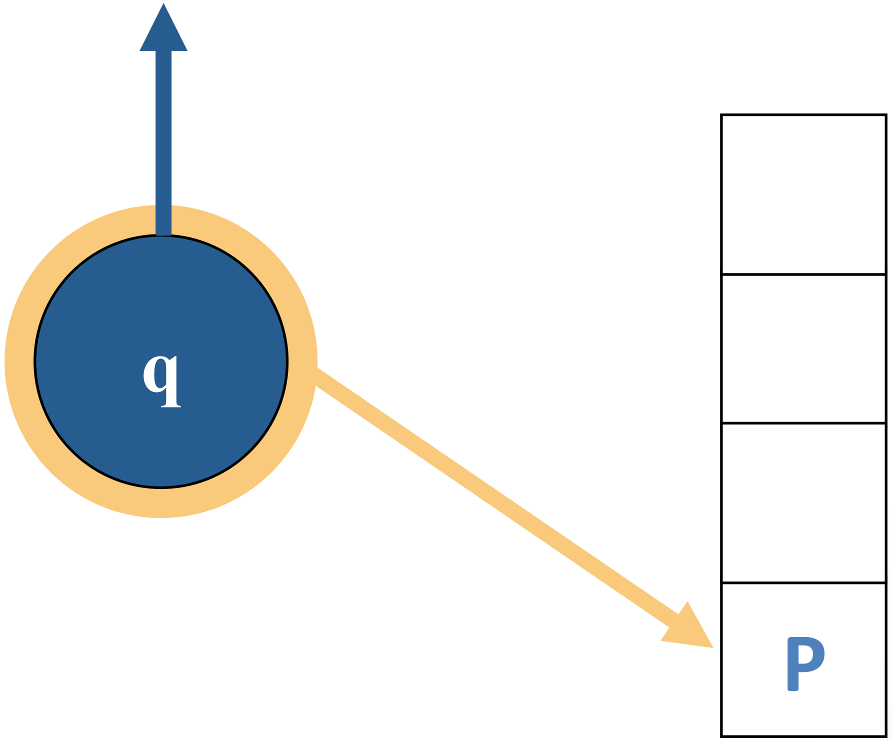
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}



A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;

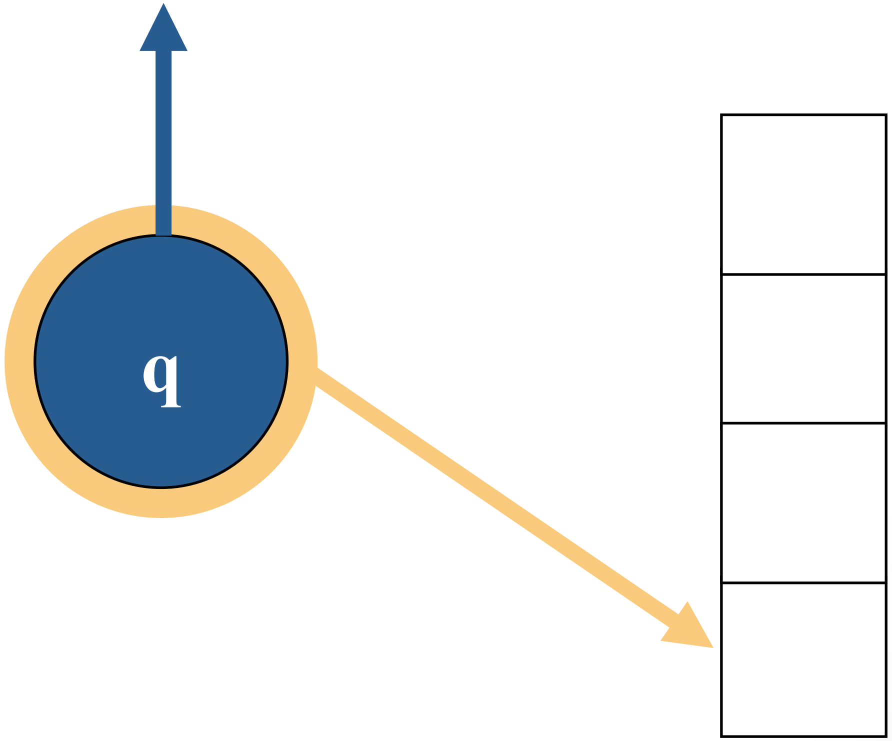


$f(q, var, S) = \{(q, FNP)\}$
$f(q, if, S) = \{(q, CTBP), (q, CTBEBP)\}$
$f(q, if, B) = \{(q, CTB), (q, CTBEB)\}$
$f(q, var, B) = \{(q, FN)\}$
$f(q, cond, C) = \{(q, \lambda)\}$
$f(q, ::=, F) = \{(q, \lambda)\}$
$f(q, num, N) = \{(q, \lambda)\}$
$f(q, ;, P) = \{(q, \lambda)\}$
$f(q, then, T) = \{(q, \lambda)\}$
$f(q, else, E) = \{(q, \lambda)\}$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;



Pila vacía
Sentencia reconocida

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Equivalencias

Teorema

Para cada autómata de pila que acepte cadenas sin vaciar su pila, existe un autómata equivalente pero que vacía su pila antes de llegar a un estado de aceptación.

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Paso de AP_F a AP_V

$AP_F = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, F)$

$AP_V = (\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p, r\}, B, p, f', \phi)$

1. Nuevo símbolo para la pila
2. Dos estados nuevos
3. Valor inicial de la pila
4. Nuevo estado inicial
5. SIN estados finales

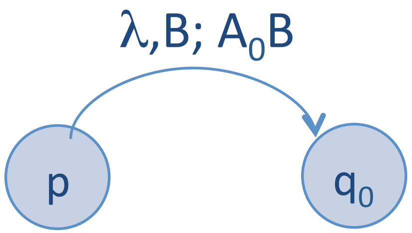
A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

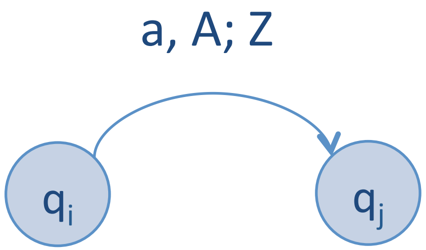
Paso de AP_F a AP_V

$AP_F = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, F)$

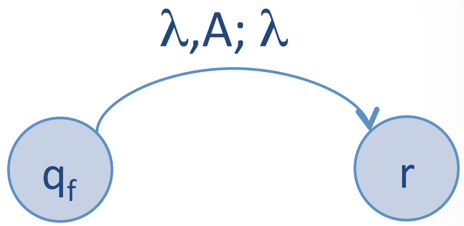
$AP_V = (\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p, r\}, B, p, f', \phi)$

f' se define así:

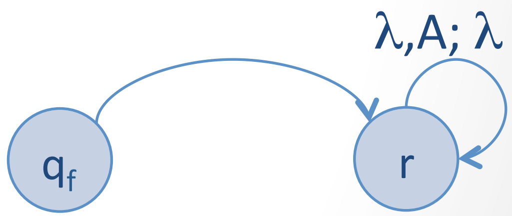




$q_i, q_j \in Q, \quad a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, A \in \Gamma, Z \in \Gamma^*$



$\forall\, q_f \in F, \; A \in \Gamma \cup \{B\}$



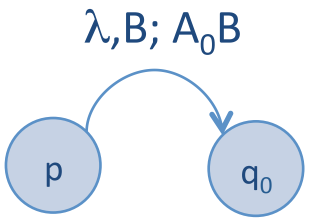
$\forall\, A \in \Gamma \cup \{B\}$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

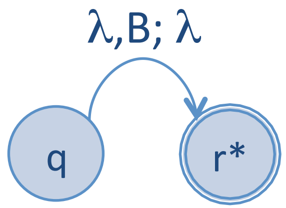
Paso de AP_V a AP_F

$AP_V=(\Sigma, \Gamma, Q, A0, q0, f, \phi) \rightarrow AP_F=(\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p, r\}, B, p, f', \{r\})$

f' se define así:



$f'(p, \lambda, B) = (q_0, A_0B)$



$(r, \lambda) \in f'(q, \lambda, B) \quad \forall\, q \in Q,$

$f(q, a, A) = f'(q, a, A) \quad \forall\, q \in Q, \; a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, A \in \Gamma$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

De Gramática Tipo 2 a AP_V

Dada una G2 en FNG, construir un AP_V:

$$G = (\Sigma_T, \Sigma_N, S, P)$$

entrada pila inicial de pila

$$AP_V = (\Sigma_T, \Sigma_N, \{q\}, S, q, f, \phi)$$

Se obtiene un AP_V con un solo estado

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

De Gramática Tipo 2 a AP_V

f se define como:

$$(q, Z) \in f(q, a, A)$$

es decir:

$f(q, a, A) = (q, Z)$ si existe una producción del tipo $A ::= a Z$

$f(q, a, A) = (q, \lambda)$ si existe una producción del tipo $A ::= a$

$f(q, a, A) = \{(q, Z), (q, \lambda)\}$

dada una producción:

$A ::= aZ \mid aD \mid b \Rightarrow$ $f(q, a, A) = \{(q, Z),$
$(q, D)\}$

$f(q, b, A) = (q, \lambda)$

Si $S ::= \lambda \Rightarrow (q,\lambda) \in f(q,\lambda,S)$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

De Gramática Tipo 2 a AP_F

Dada una G2, construir un AP_F

$$G = (\Sigma_T, \Sigma_N, S, P)$$

$$\Downarrow$$

$$AP_V = (\Sigma_T, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, \{q_2\})$$

donde:

$$\Gamma = \Sigma_T \cup \Sigma_N \cup \{A_0\}, \text{ donde } A_0 \notin \Sigma_T \cup \Sigma_N$$

$$Q=\{q_0, q_1, q_2\}$$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

De Gramática Tipo 2 a AP_F

f se define como:

$f\,(q_0, \lambda, A_0) = \{q_1, SA_0\}$

$\forall A \in \Sigma_N$, si $A ::= \alpha \in P$, $(\alpha \in \Sigma^*) \Rightarrow (q_1, \alpha) \in f\,(q_1, \lambda, A)$

es decir: $f\,(q_1, \lambda, A) = \{\ldots, (q_1, \alpha)\,, \ldots\}$

$\forall\, a \in \Sigma_T$, $(q_1, \lambda) \in f\,(q_1,a,a)$

es decir $f\,(q1,a,a) = \{\ldots, (q1,\lambda),\ldots\}$

$f\,(q_1, \lambda, A_0) = \{q_2,A_0\}$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

De AP_V a Gramática Tipo 2

Dado un AP_V, construir una G2 tal que $L(G2) = L(AP_V)$

$$AP_V = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, \phi)$$

$$\Downarrow$$

$$G = (\Sigma_T, \underbrace{\Sigma_N}_{\{S\} \cup \{ (pAq) \mid p, q \in Q, \ A \in \Gamma\}}, S, P)$$

Para construir P:

1. $S ::= (q_0, A_0, q) \ \forall q \in Q$ (se eligen las que empiezan por q_0A_0)
2. De cada transición $f(p,a,A) = (q, BB'B''....B''')$
   donde:
   $A,B,B',B'',...,B''' \in \Gamma$; $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$
   se obtiene:
   $(p\ A\ z) ::= a\ (q\ B\ r)\ (r\ B'\ s)\ s\ ...\ y\ (y\ B'''\ z)$
3. De cada transición $f(p, a, A) = (q, \lambda)$ se obtienen: $(p,A,q) ::= a$

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso

Bibliografía

- Libro Básico 1 Bibliografía. Enrique Alfonseca Cubero, Manuel Alfonseca Cubero, Roberto Moriyón Salomón. Teoría de autómatas y lenguajes formales. McGraw-Hill (2007).
  Capítulo 4 y Apartado 8.1
- Libro Básico 2 Bibliografía. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D.Ullman. Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación (3ª edición). Ed, Pearson Addison Wesley.
  Capítulo 6
- Libro Básico 4 Bibliografía. Manuel Alfonseca, Justo Sancho, Miguel Martínez Orga. Teoría de lenguajes, gramáticas y autómatas. Publicaciones R.A.E.C. 1997
  Capítulo 10

A. Sanchis, A. Ledezma, J. Iglesias, B. García, J. Alonso