ECONOMETRIA

Tema 2: El Modelo de Regresión Lineal Simple

César Alonso

Universidad Carlos III de Madrid

Relaciones empíricas y teóricas

- Como economistas, nos interesa la relación entre dos o más variables económicas. Por ello, nos concentramos en poblaciones, al menos, bivariantes.
- La teoría económica postula, en general, relaciones del tipo

$$Y = f(X)$$

  donde $f(\cdot)$ es una función.
- Dichas relaciones son **exactas o determinísticas**, de manera que a cada valor de X le corresponde un único valor de Y.
- Si tuviéramos más variables exógenas, el razonamiento sería idéntico

$$Y = f(X_1, \ldots, X_K)$$

  a cada combinación de valores de $X_1, \ldots, X_K$ le corresponde un único valor de Y.

Relaciones empíricas y teóricas

- ¿Qué sucede en general con los datos reales de variables económicas?
- **Ejemplo**: Relación entre tasa de ahorro (Y) y renta (X) (Goldberger, Capítulo 1 de "A Course in Econometrics", 1991. Harvard U. Press.)
  - La teoría económica predice una relación creciente entre tasa de ahorro y renta
  - Datos de 1027 familias de EE.UU. en los años 1960 a 1962.
  - Para simplificar, hemos agrupado los datos en intervalos para ambas variables, poniendo el punto medio del intervalo.
    Para cada combinación de X e Y presentamos la frecuencia relativa (en tanto por uno).

Relaciones empíricas y teóricas

Distribución conjunta de frecuencias de X e Y

$P(X, Y)$	X (renta en miles de dólares)					
Y (tasa de ahorro)	1.4	3.0	4.9	7.8	14.2	$P(Y)$ (suma de filas)
0.45	0.015	0.026	0.027	0.034	0.033	0.135
0.18	0.019	0.032	0.057	0.135	0.063	0.306
0.05	0.059	0.066	0.071	0.086	0.049	0.331
-0.11	0.023	0.035	0.045	0.047	0.015	0.165
-0.25	0.018	0.016	0.016	0.008	0.005	0.063
$P(X)$ (suma de columnas)	0.134	0.175	0.216	0.310	0.165	1.000

Relaciones empíricas y teóricas

- Dada la evidencia empírica, ¿podemos afirmar que existe una relación determinística entre tasa de ahorro y renta?
  - Para que ello fuera cierto, deberíamos encontrar en cada columna (para cada nivel de renta X) una única frecuencia distinta de 0.
  - Claramente, esto NO es cierto: para cada nivel de renta, existen familias que ahorran mucho y familias que desahorran mucho.
- NO hay una función que relacione ahorro y renta: tenemos una distribución, con valores más y menos probables:
  - Observamos una proporción mayor de familias con tasas de ahorro más altas cuanto mayor es su renta.

- Para verlo mejor, podemos concentrarnos en las distribuciones condicionales de la tasa de ahorro para cada nivel de renta.
  - Para ello, tenemos que dividir las frecuencias relativas de cada columna por la suma de éstas

Distribuciones condicionales de frecuencias de Y para cada valor de X

$P(Y \mid X)$	X (renta en miles de dólares)				
Y (tasa de ahorro)	1.4	3.0	4.9	7.8	14.2
0.45	0.112	0.149	0.125	0.110	0.200
0.18	0.142	0.183	0.264	0.435	0.382
0.05	0.440	0.377	0.329	0.277	0.297
-0.11	0.172	0.200	0.208	0.152	0.091
-0.25	0.134	0.091	0.074	0.026	0.030
Suma de columnas	1	1	1	1	1
Media cond. $\widehat{\mu}_{Y\mid X}$	0.045	0.074	0.079	0.119	0.156

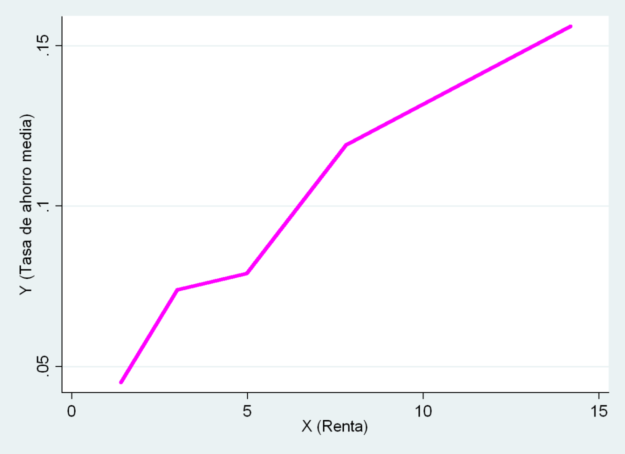
Relaciones empíricas y teóricas

- Vemos que, en términos relativos, las tasas de ahorro negativas son más frecuentes para rentas bajas.
- Parece existir una contradicción entre la relación funcional exacta predicha por la teoría económica y la evidencia empírica:
  - La teoría afirma que las familias de igual renta deberían presentar la misma tasa de ahorro
  - PERO vemos que no es cierto en realidad.
  - Y no podemos argumentar que lo que observamos es una mera desviación del comportamiento óptimo.
    (implicaría que la mayoría de las familias "se equivocan" sistemáticamente).
- Por supuesto, cabe argumentar que hay otras características en las que difieren familias de igual renta.
  - Ello requeriría condicionar en otras características.
  - Ello reduciría la dispersión (tendríamos celdas con valores cercanos a 0).
  - PERO seguiríamos teniendo tasas de ahorro distintas para familias parecidas.

Relaciones empíricas y teóricas

- CONCLUSIÓN: las relaciones empíricas entre variables económicas NO son determinísticas, sino **estocásticas**
- Para reconciliar teoría y datos, debemos reinterpretar la teoría económica:
  - Cuando la teoría postula que Y es función de X, entenderemos que el valor medio de Y es una función de X.
- En el ejemplo, vemos que las distribuciones condicionales del ahorro para cada nivel de renta varían con la renta:
  - Cuanto mayor es la renta, las tasas de ahorro tienden a ser mayores.
  - Ello implica que la tasa de ahorro media, condicional a la renta, aumenta con la renta.

- **Interpretación**: la media de la tasa de ahorro Y es una función creciente de la renta X. Gráficamente:



Conceptos Previos

- Dada la distribución de probabilidad conjunta de (X, Y) (por ejemplo, tasa de ahorro y renta familiar), supongamos que nos preguntan la tasa de ahorro de una familia tomada aleatoriamente de la población de interés.
- Supongamos que nuestro criterio para medir el error en la predicción $c(X)$ es la minimización de $E(U^2)$, siendo:

$$U = Y - c(X)$$

el error de predicción, pudiendo emplear en la predicción de Y el valor de X correspondiente.

- Supongamos que no conocemos la renta de la familia considerada (X).
- Entonces, nuestra elección de predictores queda restringida a la información sobre la distribución marginal de la tasa de ahorro Y.
- En el ejemplo anterior, para calcular la distribución marginal de Y debemos sumar las frecuencias observadas para cada fila.

Y (tasa de ahorro)	$P(Y)$
0.45	0.135
0.18	0.306
0.05	0.331
-0.11	0.165
-0.25	0.063

- En este caso, ignoramos cómo se comporta Y de acuerdo con X.
- La predicción que podemos hacer sobre Y se limita a las constantes.
- El error de predicción será $U = Y - c$. Se elegirá c tal que minimice $E(U^2) = \sum_k (Y_k - c)^2 p_k$. Dicho valor no es otro que:

$$c = E(Y) = \mu_Y$$

- La **media poblacional** μ_Y es el **mejor predictor constante** de Y en una distribución de probabilidad bivariante (véase Capítulo 3 de Goldberger).
- En el ejemplo, suponiendo que la distribución presentada se refiere a una población,

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0.45 \times 0.135 + 0.18 \times 0.306 + 0.05 \times 0.331 \\ &\quad -0.11 \times 0.165 - 0.25 \times 0.063 \\ &= 0.09848 = 9.85\% \end{aligned}$$

- Supongamos que conocemos la renta (X) de la familia para la que queremos predecir su tasa de ahorro (Y).
- Además, sólo podemos elegir predictores que sean funciones lineales de X, es decir,
$$c(X) = c_0 + c_1 X,$$
siendo c_0 y c_1 constantes.
- El error de predicción será $U = Y - c_0 - c_1 X$. Se elegirán aquellas constantes c_0 y c_1 que minimicen $E(U^2) = \sum_k \sum_l (Y_k - c_0 - c_1 X_l)^2 p_{kl}$.
- Sean α_0, α_1, dichas constantes, de manera que $c(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X$, verificando que

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha_0 = E(Y) - \alpha_1 E(X) = \mu_Y - \alpha_1 \mu_X, \\ c_1 &= \alpha_1 = \frac{C(X,Y)}{V(X)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}. \end{aligned}$$

- **La recta** $\alpha_0 + \alpha_1 X$ es la **proyección lineal (**o **mejor predicción lineal)** de Y dado X

$$L(Y \mid X) = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

- En nuestro ejemplo

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

tenemos que calcular los $5 \times 5 = 25$ valores resultantes de multiplicar cada uno de los valores de X e Y, respectivamente, y presentar la celda correspondiente a la probabilidad de ocurrencia de cada valor:

Distribución marginal de XY

XY		XY		XY		XY		XY	
-3.55	.005	-0.75	.016	0.07	.059	0.54	.032	1.40	.135
-1.95	.008	-0.54	.045	0.15	.066	0.63	.015	2.21	.027
-1.56	.015	-0.35	.018	0.25	.071	0.71	.049	2.56	.063
-1.23	.016	-0.33	.035	0.25	.019	0.88	.057	3.51	.034
-0.86	.047	-0.15	.023	0.39	.086	1.35	.026	6.39	.033

donde

$$E\left(XY\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}X_{i}Y_{j}\Pr\left(XY=X_{i}Y_{j}\right)=0.782607$$

y

$$\begin{aligned}E\left(X\right)&=1.4\times 0.134+3.0\times 0.175+4.9\times 0.216\\&+7.8\times 0.310+14.2\times 0.165=6.532\end{aligned}$$

y por tanto,

$$C\left(X,Y\right)=0.782607-6.532\times 0.09848=0.13934.$$

- En consecuencia, teniendo en cuenta que

$$E\left(X^2\right) = 1.4^2 \times 0.134 + 3.0^2 \times 0.175 + 4.9^2 \times 0.216 + 7.8^2 \times 0.310 + 14.2^2 \times 0.165 = 59.155$$

entonces

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = 59.155 - 6.532^2 = 16.488$$

con lo cual

$$c_1 = \alpha_1 = \frac{C(X,Y)}{V(X)} = \frac{0.13934}{16.488} = 0.008451$$
$$c_0 = \alpha_0 = E(Y) - \alpha_1 E(X) = 0.09848 - 0.008451 \times 6.532 = 0.0432$$

y por tanto la función de proyección lineal es

$$L(Y \mid X) = 0.043278 + 0.008451X$$

- Aplicada únicamente a los valores de renta X, podemos escribir la proyección lineal como

$$L(Y|X) = \begin{cases} 0.043278 + 0.008451 \times 1.4 = 0.055 & \text{si } X = 1.4 \\ 0.043278 + 0.008451 \times 3.0 = 0.069 & \text{si } X = 3.0 \\ 0.043278 + 0.008451 \times 4.9 = 0.085 & \text{si } X = 4.9 \\ 0.043278 + 0.008451 \times 7.8 = 0.1092 & \text{si } X = 7.8 \\ 0.043278 + 0.008451 \times 14.2 = 0.1633 & \text{si } X = 14.2 \end{cases}$$

- Supongamos que conocemos la renta (X) de la familia antes de hacer la predicción de su tasa de ahorro (Y).
- Además, podemos elegir como función de predicción cualquier función de X, $c(X)$.
- El error de predicción será $U = Y - c(X)$. Se elegirá $c(X)$ de forma que minimice $E(U^2)$, resultando que $c(X) = E(Y \mid X)$.
- El **mejor predictor** de Y dado X es su **esperanza condicional**, $E(Y|X)$.
  - **Solamente** cuando la función de esperanza condicional es lineal, la función de proyección lineal $L(Y|X)$ y la función de esperanza condicional $E(Y|X)$ coinciden.
  - De lo contrario, cuando la función de esperanza condicional no es lineal, entonces la proyección lineal no es el mejor predictor, pero es la **mejor aproximación lineal** a la función de esperanza condicional.

- La función de esperanza condicional viene dada por las medias de cada una de las distribuciones condicionales de Y para cada uno de los valores de X.
- En el ejemplo,

Distribuciones condicionales de frecuencias de Y para cada valor de X

$P(Y\|X)$	X (renta en miles de dólares)				
Y (tasa de ahorro)	1.4	3.0	4.9	7.8	14.2
0.45	0.112	0.149	0.125	0.110	0.200
0.18	0.142	0.183	0.264	0.435	0.382
0.05	0.440	0.377	0.329	0.277	0.297
-0.11	0.172	0.200	0.208	0.152	0.091
-0.25	0.134	0.091	0.074	0.026	0.030
$\widehat{\mu}_{Y\|X}$	0.045	0.074	0.079	0.119	0.156

- La función de media condicional se obtiene calculando $E(Y|X)$ para cada uno de los valores de X:

$$
\begin{aligned}
E(Y|X=1.4) &= 0.45 \times 0.112 + 0.18 \times 0.142 + 0.05 \times 0.440 \\
&\quad -0.11 \times 0.172 - 0.25 \times 0.134 = 0.045 \\
E(Y|X=3.0) &= 0.45 \times 0.149 + 0.18 \times 0.183 + 0.05 \times 0.377 \\
&\quad -0.11 \times 0.200 - 0.25 \times 0.091 = 0.074 \\
E(Y|X=4.9) &= 0.45 \times 0.125 + 0.18 \times 0.264 + 0.05 \times 0.329 \\
&\quad -0.11 \times 0.208 - 0.25 \times 0.074 = 0.079 \\
E(Y|X=7.8) &= 0.45 \times 0.110 + 0.18 \times 0.435 + 0.05 \times 0.277 \\
&\quad -0.11 \times 0.152 - 0.25 \times 0.026 = 0.119 \\
E(Y|X=14.2) &= 0.45 \times 0.200 + 0.18 \times 0.382 + 0.05 \times 0.297 \\
&\quad -0.11 \times 0.091 - 0.25 \times 0.030 = 0.156
\end{aligned}
$$

- De manera que la función de esperanza condicional se puede escribir como

$$E\left(Y|X\right)=\begin{cases}0.045 & \text{si } X=1.4\\ 0.074 & \text{si } X=3.0\\ 0.079 & \text{si } X=4.9\\ 0.119 & \text{si } X=7.8\\ 0.156 & \text{si } X=14.2\end{cases}$$

- En resumen

	Predictores de tasa de ahorro		
X (renta en miles de dólares)	C	$L\left(Y\|X\right)$	$E\left(Y\|X\right)$
1.4	0.0985	0.055	0.045
3.0	0.0985	0.069	0.074
4.9	0.0985	0.085	0.079
7.8	0.0985	0.1092	0.119
14.2	0.0985	0.1633	0.156

- Las predicciones asociadas a la proyección lineal son distintas de las basadas en la función de esperanza condicional, porque ésta no es lineal.
  - En el gráfico presentado anteriormente, puede verse que la función de esperanza condicional no es lineal.
  - $L(Y|X)$ proporciona una aproximación bastante buena a $E(Y|X)$. Ello implica que $L(Y|X)$ puede ser, en casos como éste, un buen predictor, aunque no coincida con $E(Y|X)$.
  - Pero mientras que $E(Y|X)$ caracteriza momentos (medias condicionales) de las correspondientes distribuciones condicionales de Y dado X, $L(Y|X)$ NO.
  - Ello implica que $E(Y|X)$ puede tener una interpretación causal, pero $L(Y|X)$ NO.

Introducción al modelo de regresión lineal simple

- El Modelo de Regresión Lineal Simple se puede emplear para estudiar la relación entre dos variables, aunque tiene limitaciones como herramienta para el análisis empírico.
- Objeto de estudio: Y y X son dos variables que representan alguna población y estamos interesados en "explicar Y en términos de X" o en "estudiar cómo varía Y ante variaciones en X".
  Por ejemplo, $Y =$ ventas, $X =$ gastos en publicidad; $Y =$ tasa ahorro, $X =$ renta.
- Al tratar de formular un modelo que "explique Y en términos de X" debemos afrontar varias cuestiones:
  - ¿Cómo tenemos en cuenta otros factores que afecten a Y además de X?
  - ¿Cuál es la forma funcional de la relación entre Y y X?
  - ¿Estamos captando con nuestro modelo una relación ceteris-paribus entre Y y X?

Introducción al modelo de regresión lineal simple

- El Modelo de Regresión Lineal Simple nos permite "explicar Y en términos de X" resolviendo las cuestiones anteriores.
- Sea

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

donde:

  - Y : Variable dependiente, endógena, explicada, de respuesta...
  - X : Variable independiente, exógena, explicativa, de control, regresor..
  - β_0 y β_1 : Parámetros poblacionales
  - ε : Término de error o perturbación inobservable. Representa los factores que influyen en Y además de X, el componente aleatorio de Y que no viene explicado por $\beta_0 + \beta_1 X$.

- *Ejemplo 1*:

Si Y = salario y X = años de estudio, entonces el término de error puede recoger factores inobservables como:
- experiencia laboral
- capacidad o habilidad
- antigüedad en la empresa

- *Ejemplo 2*:

Si Y = cosecha y X = cantidad de abono, entonces el término de error puede recoger factores como:
- calidad de la tierra
- lluvia.

Supuestos del modelo de regresión simple

1. **Linealidad en los parámetros** $(Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon)$.
   - Este supuesto implica que un cambio unitario en X tiene el mismo efecto sobre Y con independencia del valor inicial de X.
   - Puede no ser realista para algunas aplicaciones económicas. (por ejemplo, en el caso de salario y educación podemos pensar en la existencia de rendimientos crecientes)
   - Esta limitación puede superarse formulando modelos lineales en parámetros que recogen relaciones no lineales entre variables.
2. $E(\varepsilon|X) = 0 \ \forall X$, es decir:
   Para cualquier valor de X, la media de los inobservables es siempre la misma e igual a cero
   (que es la media de los inobservables para el total de la población)
   - **Implicaciones:**
   - $E(\varepsilon) = 0$
     Por la ley de esperanzas iteradas,
     $$E(\varepsilon) = E[E(\varepsilon|X)] = 0$$

- Que $E(\varepsilon|X) = 0 \ \forall X$ implica que $C(h(X), \varepsilon) = 0$, donde $h(\cdot)$ es cualquier función de X.
  Por tanto, ε no está correlacionado con ninguna función de X.
- En particular, $C(X, \varepsilon) = 0$

$$\begin{aligned} C(X, \varepsilon) &= E(X\varepsilon) - E(X)E(\varepsilon) \text{ donde} \\ E(X\varepsilon) &= E[E(X\varepsilon|X)] = E[X \ E(\varepsilon|X)] = 0 \\ E(X)E(\varepsilon) &= 0 \text{ dado que } E(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

- Nótese que $E(\varepsilon|X) = 0 \Rightarrow C(X, \varepsilon) = 0$, pero $C(X, \varepsilon) = 0 \nRightarrow E(\varepsilon|X) = 0$ (que $C(X, \varepsilon) = 0$ es cond. necesaria, pero no suficiente, para $E(\varepsilon|X) = 0$).

Supuestos del modelo de regresión simple

- $E(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$
  - La **función de esperanza condicional** o **función de regresión poblacional** es **lineal**.
    Entonces:

$$\begin{aligned} C(Y,X) &= C\left[E(Y|X), X\right] = \beta_1 V(X) \quad \Rightarrow \beta_1 = \frac{C(Y,X)}{V(X)} \\ E(Y) &= E\left[E(Y|X)\right] = \beta_0 + \beta_1 E(X) \quad \Rightarrow \beta_0 = E(Y) - \beta_1 E(X) \end{aligned}$$

- Nótese que:
- Hemos de utilizar esperanzas condicionales en X dado el carácter estocástico de dicha variable.
  - Si X fuera determinística (como ocurriría en el caso de datos experimentales), bastaría con aplicar esperanzas marginales.

Supuestos del modelo de regresión simple

- Al ser la función de esperanza condicional lineal en X,

$$E(Y|X) = L(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

donde $L(\cdot)$ denota la proyección lineal de Y dado X.

- β_0 y β_1 son los parámetros que minimizan la varianza del error $\varepsilon = Y - \beta_0 - \beta_1 X$, es decir, resuelven el problema

$$\min \left[E(Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2 \right]$$

cuyas condiciones de primer orden son

$$\begin{array}{rcccl} E(Y - \beta_0 - \beta_1 X) & \equiv & E(\varepsilon) = 0 & \Rightarrow & \beta_0 = E(Y) - \beta_1 E(X) \\ E\left[(Y - \beta_0 - \beta_1 X)X\right] & = & E(X\varepsilon) = 0 & \Rightarrow & \beta_1 = \dfrac{C(Y,X)}{V(X)} \end{array}$$

Supuestos del modelo de regresión simple

3. [3.] $V(\varepsilon|X) = \sigma^2$ para todo X
(Homocedasticidad condicional)
Implicaciones:
   - $V(\varepsilon) = \sigma^2$.
     Para verlo,

$$\begin{aligned} V(\varepsilon|X) &= E(\varepsilon^2|X) - E\left[E(\varepsilon|X)^2\right] = E(\varepsilon^2|X) = \sigma^2 \\ E(\varepsilon^2) &= E\left[E(\varepsilon^2|X)\right] = \sigma^2 \\ V(\varepsilon) &= E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

   $V(Y|X) = \sigma^2$
   La varianza de Y dado X es constante.

Interpretación de coeficientes

- Supongamos, que el supuesto **1.** de **linealidad en parámetros** se cumple, de manera que nuestra especificación es

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

- Queremos ver cómo podemos interpretar los parámetros de este modelo.
- La interpretación depende de que se cumpla o no el supuesto **2.** $E(\varepsilon|X) = 0$
- Si $E(\varepsilon|X) = 0$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= \beta_0 + \beta_1 E(X|X) + E(\varepsilon|X) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X \end{aligned}$$

Interpretación de coeficientes

- En este caso, $E(Y|X) = L(Y|X)$: la función de esperanza condicional es lineal, y por tanto coincide con la proyeción lineal de Y dado X.
- Por tanto, la **pendiente** β_1 tiene una interpretación causal:

$$\beta_1 = \frac{\Delta E(Y|X)}{\Delta X}$$

  Cuando X aumenta en una unidad, Y varía, en media, β_1 unidades de$Y$.

  - La pendiente β_1 mide el cambio promedio en Y ante un cambio unitario en X.
  - En otras palabras, β_1 mide la diferencia de medias entre la distribución condicional $f(Y|X = x)$ y la distribución condicional $f(Y|X = x + \Delta x)$.

Interpretación de coeficientes

- En cuanto a la **constante** (también llamada **término constante**) β_0, puede verse que
$$E(Y|X=0)=\beta_0,$$
es decir: β_0 es el valor medio de Y cuando $X=0$.
    - Geométricamente, es el valor de la recta de regresión en el eje de ordenadas.
    - En la práctica, β_0 no tiene a menudo interpretación, en aquellos casos en que no tiene sentido que $X=0$.
    - Sin embargo, el término constante β_0 debe incluirse siempre en el modelo, para controlar por el hecho de que X e Y no tienen porqué tener media 0.

Interpretación de coeficientes

- Si $E(\varepsilon|X) \neq 0$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(Y|X) &= \beta_0 + \beta_1 E(X|X) + E(\varepsilon|X) \\
&= \beta_0 + \beta_1 X + E(\varepsilon|X) \\
&\neq \beta_0 + \beta_1 X
\end{aligned}
$$

  - En este caso, si $E(\varepsilon|X) \neq 0$,

$$E(Y|X) \neq L(Y|X).$$

    - Los parámetros β_0 y β_1 son en este caso solamente los parámetros de la proyección lineal, $L(Y|X)$.
    - Pero β_0 y β_1 no tienen una interpretación causal.
    - En resumen:
      Si $E(\varepsilon|X) \neq 0$, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ caracteriza una proyección lineal, pero no una esperanza condicional, y NO tiene interpretación causal.

Estimación

- Nuestro objetivo consiste en estimar los parámetros poblacionales, los "betas", a partir de un conjunto de datos.
- Supondremos que nuestros datos (y_i^*, x_i^*), con $i = 1, \ldots, n$, son una realización de una **muestra aleatoria** de tamaño n de una población desconocida, (Y_i, X_i).
  - Tan sólo disponemos de la información que proporciona dicha muestra.
  - Recordemos que una muestra es un subconjunto (finito) de la población de interés.
- Sea el modelo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

donde:

  - $E(\varepsilon|X) = 0$
  - $V(\varepsilon|X) = \sigma^2$

Estimación

- ¿Cómo podemos estimar los parámetros β_0, β_1 y σ^2?
- Si disponemos de una muestra aleatoria de tamaño n de la población, podemos escribir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

  donde para todo $i = 1, \ldots, n$:

  - $E(\varepsilon_i | X_i) = 0$
  - $V(\varepsilon_i | X_i) = \sigma^2$

- Vamos a ver cómo podemos obtener estimadores de los parámetros β_0, β_1 y σ^2, denotados como $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\sigma}^2$.

Estimación

- Recordemos que un **estimador** es una función que, aplicada a una muestra, proporciona una **estimación** (valor puntual) del/de los parámetro/s (desconocidos) de interés.
- Teóricamente, podríamos disponer de varias muestras de tamaño n y, dado nuestro estimador, obtener las estimaciones respectivas.
  - La estimación puntual obtenida para el mismo parámetro con cada muestra será, generalmente, distinta, porque dependerá de las realizaciones de cada muestra aleatoria.
  - El estimador es, por tanto, una variable aleatoria, cuyo valor concreto (realización) variará de muestra a muestra.
  - Por tanto, el estimador, para un tamaño muestral dado, tendrá una distribución (*distribución muestral* o *dstribución en el muestreo*).

- Los parámetros de interés son características de la población, que son funciones de momentos poblacionales. El principio de analogía consiste en utilizar como estimador la característica análoga en la muestra.
- *Ejemplo*: **media marginal**

Sea una muestra aleatoria de observaciones de Y, $\{y_i\}_{i=1}^{n}$. Para estimar la media marginal de Y, $E(Y)$, utilizamos la media muestral $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

- En el caso del modelo de regresión simple, dados los supuestos:

$$E(Y|X) = L(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

por lo que β_0 y β_0 se obtienen de minimizar:

$$E(\varepsilon^2) = E(Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2$$

siendo:

$$\beta_0 = E(Y) - \beta_1 E(X)$$
$$\beta_1 = \frac{C(Y, X)}{V(X)}$$

- Aplicando el **principio de analogía,** sustituyendo momentos poblacionales por muestrales, obtenemos estimadores de β_0, β_1:

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X}) Y_i}{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$$

- Podemos ver también este mismo estimador de la siguiente forma: bajo los supuestos que hacíamos en el modelo simple en la población, β_0 y β_1 son los parámetros que minimizan la varianza del error $\varepsilon = Y - \beta_0 - \beta_1 X$, es decir, resuelven el problema

$$\min E(\varepsilon^2),$$

o de forma equivalente,

$$\min \left[E(Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2 \right].$$

- Para una observación de la muestra, el análogo muestral del **término de error o perturbación** –desviación entre valor observado y valor esperado–, $\varepsilon_i = Y_i - E(Y_i|X_i)$, se conoce como **residuo** o desviación entre valor observado Y_i y **valor ajustado o predicho** $\widehat{Y}_i = \left(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i\right) = \widehat{L}(Y_i|X_i)$

$$\widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i = Y_i - \left(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i\right)$$

- Por tanto, el análogo muestral del problema de minimizar $E(\varepsilon^2)$ es

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2,$$

- El estimador que obtenido antes a partir del principio de analogía puede por tanto interpretarse también como un estimador que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, conocido como estimador de **mínimos cuadrados ordinarios (MCO)**
- Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i\widehat{\varepsilon}i}\widehat{\varepsilon}_i &= 0 \text{ (media muestral de los residuos 0)}\\ \frac{1}{n}\sum_{i}x_i\widehat{\varepsilon}_i &= 0 \text{ (covarianza muestral entre residuos y regresores 0)}\end{aligned}$$

donde $x_i = X_i - \overline{X}$ (desviación respecto a la media muestral).

- Dichas condiciones son el **análogo muestral** de las condiciones de primer orden poblacionales (referidas a los β's en la población):

$$\begin{aligned}E(\varepsilon) &= 0,\\ C(X,\varepsilon) &= 0.\end{aligned}$$

- Las condiciones de primer orden determinan el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$n\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \sum_i X_i = \sum_i Y_i$$
$$\widehat{\beta}_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i y_i x_i$$

- En el modelo de regresión simple
  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n,$
  los estimadores MCO de β_0 y β_1, es decir, $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$, serían los argumentos que minimizan:

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i)^2$$

- Las condiciones de primer orden serían:

$$\sum_i \widehat{\varepsilon}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\sum_i X_i \widehat{\varepsilon}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X}) Y_i}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$$

- Los **valores predichos** o **valores ajustados** en base a los estimadores MCO resultantes, $\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i$, verifican que

$$\sum_i \widehat{Y}_i \widehat{\varepsilon}_i = 0 \text{ (covarianza 0 entre valores ajustados MCO y residuos MCO).}$$

(se obtiene a partir de las condiciones de primer orden obtenidas, al ser $\widehat{Y}_i$ una función lineal de X_i).

- Tanto $\widehat{\beta}_0$ como $\widehat{\beta}_1$ son lineales en las observaciones de Y:
  - $\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X} = \frac{1}{n}{}_i Y_i - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$
  - $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_i x_i Y_i}{\sum_i x_i^2} =_i c_i Y_i$, donde $x_i = X_i - \overline{X}$, $c_i = \dfrac{x_i}{\sum_i x_i^2}$

- Esta propiedad se verifica si se cumplen los supuestos **1.** (linealidad) y **2.** ($E\left(\varepsilon|\, X\right) = 0$).
- $E\left(\widehat{\beta}_0\right) = \beta_0$ (Véase ejercicio)
- $E\left(\widehat{\beta}_1\right) = \beta_1$
  - Demostración: debemos probar que $E\left(\widehat{\beta}_1 \middle| X\right) = \beta_1$; después, es inmediato que $E\left(\widehat{\beta}_1\right) = E_X\left[E\left(\widehat{\beta}_1 \middle| X\right)\right] = \beta_1$.
    (el carácter estocástico de X nos obliga a utilizar esperanzas condicionales).
    En primer lugar, podemos escribir $\widehat{\beta}_1$ como

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 &= {}_i c_i Y_i ={}_i c_i\left(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i\right)\\ &= \beta_{0\,i} c_i + \beta_{1\,i} c_i X_i +_i c_i \varepsilon_i\end{aligned}$$

Propiedades de los estimadores MCO
Insesgadez

- Pero

$$
\begin{aligned}
{}_i c_i &= \frac{1}{\sum_i x_i^2}\left(\sum_i x_i\right) = 0 \text{ porque } \sum_i x_i = \sum_i X_i - n\overline{X} = 0 \\
{}_i c_i X_i &= {}_i \frac{x_i X_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{1}{\sum_i x_i^2}\sum_i x_i^2 = 1
\end{aligned}
$$

- Por tanto,

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1 +_i c_i \varepsilon_i$$

y

$$
\begin{aligned}
E\left(\widehat{\beta}_1 \middle| X\right) &= \beta_1 + E\left({}_i c_i \varepsilon_i \middle| X\right) = \beta_1 +_i c_i \underbrace{E\left(\varepsilon_i \middle| X\right)}_{=0} \\
&= \beta_1
\end{aligned}
$$

- Recordemos que la propiedad de insesgadez indica que si disponemos de un número infinito de muestras de tamaño n de la misma población y estimamos el mismo modelo con cada una de las muestras:
    - tendremos una distribución de valores estimados de β_j, con una realización numérica distinta para cada muestra,
    - la media de la distribución de dichos valores estimados de β_j, coincidirá con el parámetro poblacional β_j.

Propiedades de los estimadores MCO
Varianzas

- Además de los supuestos **1.** y **2.**, utilizaremos el supuesto **3.** ($V(\varepsilon|X) = \sigma^2$ para todo X).
  - $V\left(\widehat{\beta}_0\right) = \left(\sum_i X_i^2 / n\right) V\left(\widehat{\beta}_1\right)$
  - $V\left(\widehat{\beta}_1\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} E\left(\dfrac{1}{S_x^2}\right)$

(Véase Wooldridge, pp. 58-60)

- Demostración:

$$
\begin{aligned}
V\left(\widehat{\beta}_1\right) &= E\left[\left(\widehat{\beta}_1 - \beta_1\right)\right]^2 = E\left({}_i c_i \varepsilon_i\right)^2 =_i E\left(c_i^2 \varepsilon_i^2\right) \\
&= E\left[{}_i E\left(c_i^2 \varepsilon_i^2 \middle| X\right)\right] = E\left[{}_i c_i^2 E\left(\varepsilon_i^2 \middle| X\right)\right] \\
&= \sigma^2 E\left[{}_i c_i^2\right] \text{ (por el supuesto } \mathbf{3.)} \\
&= \sigma^2 E\left[{}_i \left(\frac{x_i}{\sum_i x_i^2}\right)^2\right] = \sigma^2 E\left[\frac{1}{\left(\sum_i x_i^2\right)^2}{}_i x_i^2\right] \\
&= \sigma^2 E\left[\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i^2\right)}\right] = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{1}{S_X^2}\right)
\end{aligned}
$$

- En el contexto del modelo de regresión lineal, bajo los supuestos **1.** a **3.**, $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$ son los estimadores de menor varianza entre los estimadores lineales e insesgados.
(Demostración: Goldberger p. 65-68, para el modelo simple)
- Por tanto, cuando se cumplen los supuestos del modelo clásico, el estimador de MCO es el más **eficiente** dentro de la familia de estimadores lineales e insesgados.

- $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$ son estimadores consistentes de β_0 y β_1:

$$\operatorname{p}\lim_{n\rightarrow\infty} \widehat{\beta}_j = \beta_j, \qquad j = 0, 1.$$

  es decir:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \Pr\left(\left|\widehat{\beta}_j - \beta_j\right| < \delta\right) = 1, \qquad \forall\delta > 0$$

- **Intuición:**
  - Los estimadores MCO se obtienen a partir de los análogos muestrales de momentos poblacionales. En concreto, explotan los análogos muestrales de las condiciones de momentos:

$$E(\varepsilon) = 0, \quad C(X, \varepsilon) = 0, \qquad (*)$$

    es decir:

$$\tfrac{1}{n}\sum_i \widehat{\varepsilon}_i = 0, \quad \tfrac{1}{n}\sum_i \widehat{\varepsilon}_i x_i = 0,$$

- Pero dichos análogos muestrales son funciones de medias muestrales de variables aleatorias, que bajo condiciones bastante generales son estimadores consistentes de sus análogos poblaciones.
- La condición esencial para consistencia es que las condiciones sobre los momentos poblacionales (*) se cumplan.
  (Lo que ocurre si se cumplen los supuestos **1.** y **2.** del modelo de regresión)

- Las varianzas de los estimadores MCO, $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$, dependen de $\sigma^2 = V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2)$
- Pero los errores ε_i $(i = 1, \ldots, n)$ son inobservables.
- Al estimar el modelo, observamos los residuos MCO $\widehat{\varepsilon}_i$:

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_i &= Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i = (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i \\ &= \varepsilon_i - \left(\widehat{\beta}_0 - \beta_0\right) - \left(\widehat{\beta}_1 - \beta_1\right) X_i \end{aligned}$$

- $E\left(\widehat{\beta}_0\right) = \beta_0$, $E\left(\widehat{\beta}_1\right) = \beta_1$, PERO $\widehat{\varepsilon}_i \neq \varepsilon_i$, Y $E\left(\widehat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i\right) = 0$.
- Si observáramos, para nuestra muestra de tamaño n, los errores ε_i, el estimador natural de $\sigma^2 = E(\varepsilon^2)$ sería su análogo muestral, es decir, $\frac{1}{n}\sum_i \varepsilon_i^2$.
- PERO este estimador no es factible.

- Reemplazando los errores por los residuos (sus análogos muestrales), un estimador factible de σ^2 sería:

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_i \widehat{\varepsilon}_i^2}{n}.$$

- Este estimador sí es factible, pero es sesgado. La razón es que, los residuos verifican 2 restricciones lineales,
$\frac{1}{n}\sum_i \widehat{\varepsilon}_i = 0$ y $\frac{1}{n}\sum_i \widehat{\varepsilon}_i x_i = 0$,
así que sólo hay $(n-2)$ residuos independientes (**grados de libertad**).

- Un estimador insesgado factible de σ^2 (similar cuando n es grande) es

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i \widehat{\varepsilon}_i^2}{n-2}.$$

(Demostración: véase Wooldridge, Teorema 2.3)

- Tanto $\widetilde{\sigma}^2$ como $\widehat{\sigma}^2$ son estimadores consistentes de σ^2
- Para tamaños muestrales moderados, es irrelevante cuál de los dos estimadores utilizar, porque siempre que n no sea muy pequeño, proporcionan estimaciones numéricas muy parecidas.

- Hemos visto que
  - $V\left(\widehat{\beta}_0\right) = \left(\sum_i X_i^2 / n\right) V\left(\widehat{\beta}_1\right)$
  - $V\left(\widehat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{1}{S_x^2}\right)$.
- Como estimador de $V\left(\widehat{\beta}_1\right)$, podemos aproximar $E\left(\frac{1}{S_x^2}\right)$ mediante $\frac{1}{S_x^2}$ así como un estimador consistente de σ^2:

$$\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_1\right) = \frac{\widehat{\sigma}^2}{n S_x^2}$$

- Y por tanto, para estimar $V\left(\widehat{\beta}_0\right)$,

$$\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_0\right) = \frac{\widehat{\sigma}^2 \sum_i X_i^2}{n^2 S_x^2}$$

Medidas de bondad del ajuste

Error estándar de la regresión

- En el caso poblacional, vimos que la función de esperanza condicional $E\left(Y|\,X\right)$ es la proyección lineal de Y dado X. en el sentido de que minimiza $E\left(\varepsilon^2\right)$
- Por analogía, en el caso de la estimación MCO a partir de una muestra de los coeficientes del modelo de regresión clásico

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n,$$

  donde:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon|X) &= 0 \\ V(\varepsilon|X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

- En general, suele utilizarse el **error estándar de la regresión**, $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2}$.
  - Es más conveniente al expresarse en las mismas unidades que Y.

Medidas de bondad del ajuste

El coeficiente de determinación

- Una medida más popular de capacidad predictiva del modelo es el R^2 o **coeficiente de determinación**:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_i \widehat{y}_i^2}{\sum_i y_i^2} = 1 - \frac{\sum_i \widehat{\varepsilon}_i^2}{\sum_i y_i^2}, \\ \text{donde } y_i &= Y_i - \overline{Y}_i, \widehat{y}_i = \widehat{Y}_i - \overline{Y}_i, \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i \end{aligned}$$

  (la segunda igualdad es cierta siempre que el modelo tenga término constante)

- El R^2 se interpreta como la proporción de la variación muestral de Y explicada por el modelo. (Véase Goldberger, pp. 82 y 83).
- El R^2 verifica que $0 \leq R^2 \leq 1$.
  - Cuando $R^2 = 0$, el modelo explica el 0% de la variación de Y.
  - Cuando $R^2 = 1$, el modelo explica el 100% de la variación de Y.

Medidas de bondad del ajuste

El coeficiente de determinación

- Puede verse que

$$R^2 = \left(\widehat{\rho}_{Y\widehat{Y}}\right)^2 = \left(\frac{S_{Y\widehat{Y}}}{S_Y S_{\widehat{Y}}}\right)^2,$$

  el R^2 es coeficiente de correlación muestral entre Y_i e $\widehat{Y}_i$, al cuadrado.

- Con datos de sección cruzada, el R^2 de una regresión presenta frecuentemente valores bajos.
  - Ello implica que se deja sin explicar un % elevado de la variación de Y.
  - PERO no implica necesariamente que las estimaciones son poco útiles.
- El R^2 puede ser útil para comparar distintos modelos para la misma variable dependiente Y.