Soluciones de los ejercicios B2

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jesús Cid Sueiro, Vanessa Gómez Verdejo

Universidad Carlos III de Madrid

6.2 Problemas del Capítulo 3

3.1

a)

$$\hat{d}_{\text{ML}} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_1 < 0.5 \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 < 1 \\ 1, & \text{si } x_1 > 0.5 \quad \text{y} \quad x_1 > x_2 \\ 2, & \text{resto} \end{cases}$$

b) Las regiones de decisión se muestran en la figura:

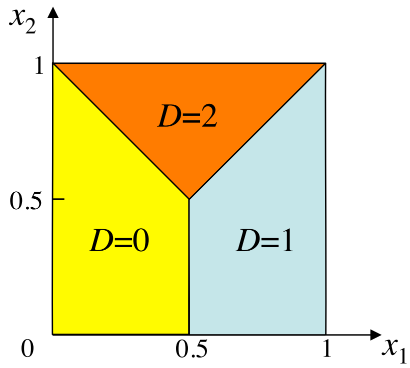

Fig. 6.2. Regiones de decisión.

3.2

a)

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{1}{2}$$

b)

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{5}{6}$$

c)

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{2}{3}$$

d) $P_{\text{FA}} = (1-\eta)^2$, $P_{\text{M}} = \eta$, $P_e = \dfrac{3}{4}(1-\eta)^2 + \dfrac{1}{4}\eta$

e)

	η	P_{M}	P_{FA}	P_e
ML	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$
MAP	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{48}$
Bayesiano	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$

f)

	r_ϕ
ML	$\frac{1}{2}$
MAP	$\frac{1}{4}$
Bayesiano	$\frac{1}{12}$

3.3

a)

$$D = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{1}{3} < |x| < 1 \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

b) $P_{\mathrm{FA}} = \dfrac{2}{9}$, $P_{\mathrm{M}} = \dfrac{1}{27}$, $P_e = \dfrac{7}{54}$

3.4

a) El decisor ML es

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \ln \frac{2}{\eta}$$

b) $P_D = P_{\mathrm{FA}}(2 - P_{\mathrm{FA}})$

3.5

a) El decisor LRT es

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{\eta}{2}$$

b) $P_D = P_{\mathrm{FA}}(2 - P_{\mathrm{FA}})$. El decisor ML opera en el punto $(P_{\mathrm{FA}}, P_{\mathrm{D}}) = (0.5, 0.75)$. El decisor NP opera en $(P_{\mathrm{FA}}, P_{\mathrm{D}}) = (0.1, 0.19)$

3.6 Se trata de un problema de decisión con costes: $c_{11} = 1$, $c_{10} = 1$, $c_{01} = 81$ y $c_{00} = -3$ y probabilidades a priori $P_H(0) = 100/101$, $P_H(1) = 1/101$,

a) El decisor óptimo es

$$x_1 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta = 2\ln 10 \approx 4.61$$

b) El coste medio por unidad de producto será

$$\overline{C} = -\frac{223}{101} \approx -2.21$$

luego el beneficio diario esperado es

$$B = \frac{2230000}{101} \approx 22100$$

c) El coste medio por unidad de producto es

$$C' = -\frac{1}{101}\left(218.5 + 90 \cdot 40^{-\frac{1}{3}}\right) \approx -2.42$$

y el tiempo medio que tardaría E en amortizar la máquina será

$$T = \frac{6000}{\overline{C} - \overline{C}'} \approx 28600 \text{ días}$$

3.7 Se obtiene un ejemplo sencillo buscando un problema de decisión bidimensional ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$) que conduzca a una frontera de decisión de la forma $x_2 = ax_1^2 + b$ (siendo a y b constantes arbitrarias). Por ejemplo, para $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_1 = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, y matrices de varianzas

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8

a) El criterio ML indica que se transmitió el símbolo s_1 ($0.6 > \frac{1}{2}$). $P_{\text{FA}} = 0.3085$ y $P_{\text{M}} = 0.3085$.
b) Como $0.6 < 1.193$, el decisor MAP decide s_0 con $P_{\text{FA}} = 0.1164$ y $P_{\text{M}} = 0.5763$.
c) Como $0.6 < 0.674$, el test de Neyman-Parson decide que se transmitió s_0 con una probabilidad de pérdida de 0.3722.
d)

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x^{(k)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{1}{2}$$

e) $K = 5$: $P_{\text{FA}} = P_{\text{M}} = 0.1318$. $K = 10$: $P_{\text{FA}} = P_{\text{M}} = 0.057$.