Soluciones de los ejercicios B3

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Miguel Lázaro Gredilla

Universidad
Carlos III de Madrid

6.3 Problemas del Capítulo 5

5.1 Primero, escribimos los datos en la forma matricial vista en la teoría:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & 0.7 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.7 \\ 1.5 & -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.42 \\ 1.25 \\ -2.58 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_* = [-1.1,\ 1.5,\ -0.1],$$

donde $\mathbf{u}_*$ es el vector de entrada que daría lugar, al ser multiplicado por el vector de pesos del filtro y corrompido con ruido Gaussiano de varianza 0.25, a $x[7]$.

a)

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = (\mathbf{U}^\top\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^\top\mathbf{x} = \{\mathbf{U}\backslash\mathbf{x} \text{ en MatLAB/Octave}\} = [-1.35,\ 0.57,\ 2.02]^\top$$

b)

$$\hat{x}_{\text{ML}} = \mathbf{u}_*\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = [-1.1,\ 1.5,\ -0.1] \cdot [-1.35,\ 0.57,\ 2.02]^\top = 2.14$$

c)

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}} = \hat{\mathbf{s}}_{\text{MAP}} = \hat{\mathbf{s}}_{\text{MAD}} = (\mathbf{U}^\top\mathbf{U} + 0.25\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^\top\mathbf{x} = [-1.25,\ 0.28,\ 1.56]^\top$$

d)

$$\hat{x}_{\text{MMSE}} = \mathbf{u}_*\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}} = [-1.1,\ 1.5,\ -0.1] \cdot [-1.25,\ 0.28,\ 1.56]^\top = 1.64$$

e)

$$\begin{aligned} &\text{e}[(\hat{x}_{\text{ML}} - x[7])^2|\mathbf{U}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_*] = \\ &= \int (\hat{x}_{\text{ML}} - x[7])^2 \mathcal{N}(x[7]|\ \mathbf{u}_*\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}},\ \ 0.25 + 0.25\mathbf{u}_*(\mathbf{U}^\top\mathbf{U} + 0.25\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_*^\top) dx[7] \\ &= \int (\hat{x}_{\text{ML}} - x[7])^2 \mathcal{N}(x[7] \mid 1.64,\ 1.004) dx[7] = (2.14 - 1.64)^2 + 1.004 = 1.254 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &\text{e}[(\hat{x}_{\text{MMSE}} - x[7])^2|\mathbf{U}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_*] = \\ &= \int (\hat{x}_{\text{MMSE}} - x[7])^2 \mathcal{N}(x[7]|\ \mathbf{u}_*\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}},\ \ 0.25 + 0.25\mathbf{u}_*(\mathbf{U}^\top\mathbf{U} + 0.25\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_*^\top) dx[7] \\ &= \int (\hat{x}_{\text{MMSE}} - x[7])^2 \mathcal{N}(x[7] \mid 1.64,\ 1.004) dx[7] = (1.64 - 1.64)^2 + 1.004 = 1.004 \end{aligned}$$