Boletín de problemas bloque B1

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jerónimo Arenas García, Jesús Cid Sueiro, Vanessa Gómez Verdejo, Miguel Lázaro Gredilla, Emilio Parrado Hernández

Universidad Carlos III de Madrid

Colección de Problemas y Ejercicios - Bloque I: Estimación

Los problemas y ejercicios que se incluyen pertenecen en su mayoría a exámenes de convocatorias anteriores. Junto a cada ejercicio se muestra los puntos del temario de la asignatura cubiertos:

1.1. Visión general de los problemas de estimación.

1.2. Teoría Bayesiana de la Estimación.

1.3. Estimadores Bayesianos de uso frequente: MMSE, MAP, MAD.

1.4. Estimación de Máxima Verosimilitud.

1.5. Estimación con distribuciones gaussianas.

1.6. Estimación lineal de mínimo error cuadrático medio.

1.7. Caracterización de Estimadores (Sesgo y Varianza).

1.8. Diseño de Estimadores bajo enfoque máquina

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

Ejercicio 1 (1.6)

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático medio que permita estimar la variable aleatoria S a partir de las vv.aa. X_1 y X_2. Sabiendo que

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{E}\{S\} = \frac{1}{2} & \mathbb{E}\{X_1\} = 1 & \mathbb{E}\{X_2\} = 0 \\
\mathbb{E}\{SX_1\} = 1 & \mathbb{E}\{SX_2\} = 2 & \mathbb{E}\{X_1X_2\} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}\{S^2\} = 4 & \mathbb{E}\{X_1^2\} = \frac{3}{2} & \mathbb{E}\{X_2^2\} = 2
\end{array}$$

obténganse los pesos del estimador $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1X_1 + w_2X_2$ y calcúlese su error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\}$.

Solution: $w_0 = \frac{1}{2} \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 1$
$\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\} = \frac{7}{4}$

Ejercicio 2 (1.2; 1.3; 1.7)

Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{6}{7}(x+s)^2, \quad 0 \le x, s \le 1$$

(a) Determínese $p_X(x)$.
(b) Determínese $p_{S|X}(s|x)$.
(c) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.
(d) Calcúlese el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.
(e) Determínense el sesgo y la varianza del estimador MAP.

Solution:

(a) $p_X(x) = \frac{2}{7}\left(3x^2 + 3x + 1\right) \quad 0 < x < 1.$

(b) $p_{S|X}(s|x) = \dfrac{(x+s)^2}{x^2 + x + \frac{1}{3}} \quad 0 < s < 1.$

(c) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{\frac{X^2}{2} + \frac{2X}{3} + \frac{1}{4}}{X^2 + X + \frac{1}{3}}.$

(d) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1$.

(e) $p_S(s) = \frac{2}{7}\left(3s^2 + 3s + 1\right), \quad 0 < s < 1$, por tanto, $\mathbb{E}\{S\} = \frac{9}{14}$.
El sesgo es $-\frac{5}{14}$ y la varianza es nula.

Ejercicio 3 (1.7)

Se desea estimar la media m de una v.a. X con varianza v, para lo que se dispone de un conjunto de $K+1$ observaciones independientes $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K+1}$ de dicha v.a. Considérense los estimadores siguientes:

$$\hat{M}_1 = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)} \qquad \hat{M}_2 = X^{(K+1)} \qquad \hat{M}_3 = \lambda \hat{M}_1 + (1-\lambda)\hat{M}_2$$

siendo a una constante positiva y estrictamente menor que uno, y λ otra constante a determinar.

(a) Compárense los estimadores $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_2$ en base a sus sesgos y varianzas.
(b) Obténgase el sesgo, la varianza, y el error cuadrático medio (MSE) del estimador $\hat{M}_3$, simplificando el resultado obtenido para $K \longrightarrow \infty$.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_1\right\} = (1-a)m$, $\quad \mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_2\right\} = 0$,

Var $\left\{\hat{M}_1\right\} = \frac{a^2 v}{K}$ $\quad$ Var $\left\{\hat{M}_2\right\} = v$.

(b) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_3\right\} = \lambda\,(1-a)\,m$ $\quad$ Var $\left\{\hat{M}_3\right\} = \frac{\lambda^2 a^2 v}{K} + v\,(1-\lambda)^2$

$\mathbb{E}\left\{\left(\hat{M}_3 - m\right)^2\right\} = \frac{\lambda^2 a^2 v}{K} + v\,(1-\lambda)^2 + \lambda^2\,(a-1)^2\,m^2$

Si $K \longrightarrow \infty$, Var $\left\{\hat{M}_3\right\} = v\,(1-\lambda)^2$ y $\mathbb{E}\left\{\left(\hat{M}_3 - m\right)^2\right\} = v\,(1-\lambda)^2 + \lambda^2\,(a-1)^2\,m^2$.

Ejercicio 4 (1.7)

Considérense dos variables aleatorias unidimensionales S y X. La variable X está caracterizada por la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se sabe que el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es

$$\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = -\frac{1}{2}\text{signo}\,(X) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & X \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & X < 0 \end{cases}$$

También se sabe que el error cuadrático medio que comete este estimador es $\frac{1}{12}$. Sin embargo, se prefiere usar el siguiente estimador

$$\hat{S}_1 = -X$$

(a) Determínese el sesgo del estimador $\hat{S}_1$.
(b) Calcúlense las siguientes esperanzas matemáticas: $\mathbb{E}\{SX\}$ y $\mathbb{E}\{S^2\}$.
(c) Determínese el error cuadrático medio que comete el estimador $\hat{S}_1$.

Solution:

(a) Es insesgado.

(b) $\mathbb{E}\{SX\} = -\frac{1}{4}$ y $\mathbb{E}\{S^2\} = \frac{1}{3}$

(c) El MSE de $\hat{S}_1$ es $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 5 (1.6; 1.8)

Se desea construir un modelo de regresión lineal de bajo coste computacional para una variable aleatoria S. Se sabe que esta variable depende de otras tres variables aleatorias X_1, X_2 y X_3, que constituyen las observaciones. La siguiente tabla muestra cuatro realizaciones independientes del proceso aleatorio.

X_1	X_2	X_3	S
3	-1	0	-1
-2	0	1	-2
0	-1	2	0
-1	2	-3	3

El objetivo del problema consiste en evaluar dos estrategias para construir el citado regresor de bajo coste computacional:

- Construir un regresor lineal exacto de mínimo error cuadrático medio usando únicamente dos de las variables disponibles.
- Construir una aproximación al estimador lineal de mínimo error cuadrático medio usando las tres variables. La aproximación consiste en suponer que la matriz de covarianzas de las observaciones es diagonal.

Para ello:

(a) Determínese cuáles de las tres variables observables se van a incluir en el regresor del primer diseño. La selección se realiza en dos pasos: en primer lugar se elige la variable cuya covarianza muestral (i.e., estimada a partir de los datos) con S presenta un mayor valor absoluto. La segunda variable será aquella cuya covarianza muestral con la seleccionada en el primer paso tenga menor valor absoluto.

(b) Constrúyase el regresor lineal de S de mínimo error cuadrático medio empleando las dos variables elegidas en el apartado anterior.

(c) Constrúyase el estimador lineal aproximado especificado en el segundo diseño. Para ello, estímense en primer lugar los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas de las observaciones y el vector de covarianzas de las observaciones con S a partir de las muestras disponibles.

(d) ¿Cuál de los dos diseños propuestos obtiene un menor error cuadrático promedio sobre los datos disponibles?

Solution:

(a) $\bar{v}_{X_1,S} = -0.5$, $\bar{v}_{X_2,S} = 1.75$, $\bar{v}_{X_3,S} = -2.75$. La primera variable elegida es X_3.

$\bar{v}_{X_1,X_3} = 0.25$, $\bar{v}_{X_2,X_3} = -2$. La segunda variable elegida es X_1.

(b) $\hat{S}_1 = -0.087X_1 - 0.7795X_3$

(c) $\hat{S}_2 = -0.1429X_1 + 1.1667X_2 - 0.7857X_3$

(d) El error promedio de $\hat{S}_1$ es 1.3128. El error promedio de $\hat{S}_2$ es 3.3656. Es menor el error del primer diseño.

Ejercicio 6 (1.4; 1.7)

Una variable aleatoria X sigue una distribución exponencial unilateral con parámetro $a > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad x > 0$$

Como se sabe, la media y varianza de X están dadas por a y a^2, respectivamente.

(a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud de a, $\hat{A}_{\text{ML}}$, basado en un conjunto de K observaciones independientes de la variable aleatoria X, $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

(b) Se propone un nuevo estimador basado en el anterior y que obedece a la expresión:

$$\hat{A} = c \cdot \hat{A}_{\text{ML}},$$

donde $0 \leq c \leq 1$ es una constante que permite un reescalado del estimador ML. Obténganse el sesgo al cuadrado, la varianza y el error cuadrático medio (MSE) del nuevo estimador, y represéntense todos ellos en una misma figura en función del valor de c.

(c) Determínese el valor de c que minimiza el MSE, c^*, y discútase su evolución conforme el número de observaciones disponibles aumenta. Calcúlese el MSE del estimador asociado a c^*.

(d) Obténgase el intervalo de valores de c para los que el MSE de $\hat{A}$ es menor que el MSE del estimador ML, y explíquese cómo varía dicho intervalo cuando $K \longrightarrow \infty$. Discútase el resultado obtenido.

Solution:

(a) $\hat{A}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

(b) $\hat{A} = \dfrac{c}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

$\mathbb{E}\left\{\hat{A} - a\right\}^2 = (c-1)^2 a^2, \qquad \text{Var}\left\{\hat{A}\right\} = \dfrac{c^2a^2}{K}, \qquad \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = (c-1)^2 a^2 + \dfrac{c^2a^2}{K}$

(c) $c^* = \dfrac{K}{K+1}, \qquad c^* \longrightarrow 1 \ (K \longrightarrow \infty), \qquad \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = \dfrac{a^2}{K+1} \ (c = c^*)$

(d) El intervalo de valores es: $c \in \left[\dfrac{K-1}{K+1}, 1\right]$, que se estrecha según aumenta K.

Ejercicio 7 (1.8)

La intensidad que atraviesa la rama de un circuito viene caracterizada por la ecuación

$$i(t) = A\cos(\omega_o t)e^{-\alpha t} + B\sin(\omega_o t)e^{-\alpha t} + C$$

donde ω_o y α son dos constantes conocidas. Para la determinación de los parámetros del modelo, A, B y C, se dispone un conjunto de medidas de $i(t)$ para K instantes de tiempo, es decir, un conjunto de pares $\{t^{(k)}, i(t^{(k)})\}_{k=1}^{K}$. Proporciónense las expresiones que permiten obtener los parámetros A, B y C que minimizan el error cuadrático del modelo promediado sobre el conjunto de muestras disponibles.

Solution: Si definimos $x_1^{(k)} = \cos(\omega_o t^{(k)})e^{-\alpha t^{(k)}}$ y $x_2^{(k)} = \sin(\omega_o t^{(k)})e^{-\alpha t^{(k)}}$. Siendo $\mathbf{X}_e$ la matriz extendida de observaciones $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ e $\mathbf{i}$ un vector con los datos $\{i(t^{(k)})\}_{k=1}^{K}$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e\right)^{-1} \mathbf{X}_e^T \mathbf{i}$$

Ejercicio 8 (1.7)

Se desea estimar la media de una v.a. X a partir de un conjunto de K observaciones independientes $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{K}$, para lo que se construye el siguiente estimador:

$$\hat{M} = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)},$$

siendo a una constante a determinar.

(a) Calcúlense el sesgo y la varianza del estimador en función del valor de a.

(b) ¿Para qué valor de a se minimiza la varianza? ¿Existe algún valor de a para el que el estimador sea insesgado?

(c) Obténgase el error cuadrático medio del estimador y el valor de a que lo minimiza.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}\right\} = (1-a)m$; Var $\left\{\hat{M}\right\} = \dfrac{a^2 v}{K}$.

(b) La varianza se minimiza para $a = 0$ y el sesgo es nulo para $a = 1$.

(c) $\mathbb{E}\left\{(\hat{M} - m)^2\right\} = (a-1)^2 m^2 + \dfrac{a^2 v}{K}$. El valor de a que lo minimiza es $a^* = \dfrac{m^2}{m^2 + v/K}$.

Ejercicio 9 (1.5)

Para la estimación de una variable aleatoria S se dispone de las dos siguientes observaciones:

$$X_1 = S + N_1$$
$$X_2 = \alpha S + N_2$$

donde α es una constante conocida y S, N_1 y N_2 son variables aleatorias gaussianas independientes, de media nula y varianzas v_s, v_n y v_n, respectivamente.

(a) Calcúlense los estimadores de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X_1 y X_2, $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$, respectivamente.

(b) Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno de los estimadores del apartado anterior. ¿Cuál de ellos propociona menor error cuadrático medio? Discuta su respuesta para los distintos valores que pueda tomar el parámetro α.

(c) Determínese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista del vector de observaciones $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

Solution:

(a) $\hat{S}_1 = \dfrac{v_s}{v_s + v_n} X_1$ y $\hat{S}_2 = \dfrac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n} X_2$.

(b) $\mathbb{E}\{E_1^2\} = \dfrac{v_s v_n}{v_s + v_n}$ y $\mathbb{E}\{E_2^2\} = \dfrac{v_s v_n}{\alpha^2 v_s + v_n}$. Para $|\alpha| > 1$ el error cuadrático medio de $\hat{S}_2$ es menor que el de $\hat{S}_1$.

(c) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \left[\dfrac{1}{1 + \alpha^2 + v_n/v_s}, \dfrac{\alpha}{1 + \alpha^2 + v_n/v_s} \right] \mathbf{X}$

Ejercicio 10 (1.6)

Sabiendo que la f.d.p. conjunta de las vv.aa. X y S viene dada por

$$p_{X,S}(x, s) = \begin{cases} x + s & 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le s \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Obténgase el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.

Solution: $\hat{S}_{\text{LMSE}} = \dfrac{7}{11} - \dfrac{X}{11}$

Ejercicio 11 (1.2; 1.3; 1.4; 1.7)

Se desea estimar el valor de la v.a. positiva S a partir de una observación aleatoria X, relacionada con S mediante

$$X = R/S$$

siendo R una v.a. independiente de S con distribución

$$p_R(r) = \exp(-r), \quad r > 0$$

(a) Calcúlese la verosimilitud, $p_{X|S}(x|s)$.

(b) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

Sabiendo que la f.d.p. de S es $p_S(s) = \exp(-s), \quad s > 0$, calcúlense:

(c) La distribución conjunta de S y X, $p_{S,X}(s, x)$, y la distribución a posteriori de S, $p_{S|X}(s|x)$.

(d) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(e) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(f) El sesgo de los estimadores $\hat{S}_{\text{MAP}}$ y $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

Solution:

(a) $p_{X|S}(x|s) = s\,\exp(-xs), \quad x > 0.$

(b) $\hat{S}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{X}.$

(c) $p_{X,S}(x,s) = s\,\exp\left(-s(x+1)\right), \quad x, s > 0;$

$p_{S|X} = (x+1)^2 s\,\exp\left(-s(x+1)\right), \quad s > 0.$

(d) $\hat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{1}{X+1}.$

(e) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{2}{X+1}.$

(f) $\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MAP}}\} = \dfrac{1}{2}; \quad \mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MMSE}}\} = 0.$

Ejercicio 12 (1.6; 1.8)

Se desea construir un estimador de una variable aleatoria S con la siguiente forma analítica:

$$\hat{S} = w_0 + wX^3$$

(a) Si se define la v.a. $Y = X^3$, indíquese qué estadísticos son suficientes para determinar los pesos del modelo de estimación de mínimo error cuadrático medio.

(b) Un analista desea ajustar el modelo anterior, pero desconoce la estadística del problema, por lo que recurrre a estimaciones muestrales de los estadísticos suficientes, basadas en el conjunto disponible de pares etiquetados de las variables aleatorias:

$$\{x^{(k)}, s^{(k)}\}_{k=1}^{4} = \{(-1, -0.55), (0, 0.5), (1, 1.57), (2, 8.7)\}$$

Determínense los pesos w_0 y w obtenidos por el analista.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\{X\}$, $\mathbb{E}\{Y\}$, v_y y v_{sy} (o algún otro conjunto que permita determinar los anteriores).

(b) $w = 1.0256$ y $w_0 = 0.5038$.

Ejercicio 13 (1.2; 1.3; 1.4)

Las variables aleatorias S y X se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha s x^2, \qquad 0 < s < 1 - x, \quad 0 < x < 1$$

siendo α un parámetro a determinar.

(a) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales $p_X(x)$ y $p_S(s)$.

(b) Calcúlese el estimador MAP de S dado X, $\hat{S}_{\text{MAP}}(X)$.

(c) Calcúlese el estimador ML de S dado X, $\hat{S}_{\text{ML}}(X)$.

(d) Calcúlese el estimador de S dado X de error cuadrático medio mínimo, $\hat{S}_{\text{MMSE}}(X)$.

(e) Compárense los estimadores calculados según el error cuadrático medio dado X en que incurren cada uno de los estimadores.

Solution:

(a) $p_X(x) = 30x^2(1-x)^2, \qquad 0 < x < 1,$

$p_S(s) = 20s(1-s)^3, \qquad 0 < s < 1,$

(b) $\hat{S}_{\text{MAP}}(X) = 1 - X$

(c) $\hat{S}_{\text{ML}}(X) = 1 - X$

(d) $\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = \frac{2}{3}(1 - X)$

(e) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MAP}}(X)\right)^2 \mid x\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{ML}}(X)\right)^2 \mid x\right\} = \frac{1}{6}(1-x)^2$

$\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MMSE}}(X)\right)^2 \mid x\right\} = \frac{1}{18}(1-x)^2$

Ejercicio 14 (1.8)

Se desea aproximar la función $f(x) = 2^x$ en el intervalo $[0, 3]$ mediante polinomios sencillos, utilizando técnicas de regresión. Para ello, se toman los puntos $x^{(k)} = k-1$, con $1 \leq k \leq 4$, y se diseña una curva de regresión $y = g(x)$, donde $g(x)$ es un polinomio, siguiendo el criterio de minimizar el error cuadrático dado por

$$E = \sum_{k=1}^{4} \left[g\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k)}\right)\right]^2$$

(a) Suponiendo $g(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$, determínese la ecuación matricial que debe verificar el vector de coeficientes $w = [w_0, w_1, w_2]^T$ de mínimo error.

(b) Suponiendo $g(x) = vx^2$, determínese el coeficiente v.

Solution:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 15 \\ 34 \\ 90 \end{pmatrix}$

(b) $v = \dfrac{90}{98}$

Ejercicio 15 (1.2; 1.3; 1.4; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la v.a. X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

(a) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud de S dado X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

(c) Establézcanse las ddps de ambos estimadores, $p_{\hat{S}_{\text{MMSE}}}(\hat{s})$ y $p_{\hat{S}_{\text{ML}}}(\hat{s})$, y represéntense gráficamente ambas.

(d) Calcúlense la media y la varianza del error de ambos estimadores.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = \frac{1}{2}(1+X)$

(b) $\hat{S}_{\text{ML}}(X) = X$

(c) $p_{\hat{S}_{\text{MMSE}}}(\hat{s}) = 24(2\hat{s}-1)(1-\hat{s}), \qquad \frac{1}{2} \leq \hat{s} \leq 1$

$p_{\hat{S}_{\text{ML}}}(\hat{s}) = 6\hat{s}(1-\hat{s}), \qquad 0 \leq \hat{s} \leq 1$

(d) $\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{ML}}\} = \dfrac{1}{4}, \qquad \mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MMSE}}\} = 0$

$Var\{S - \hat{S}_{\text{ML}}\} = \dfrac{13}{80}, \qquad Var\{S - \hat{S}_{\text{MMSE}}\} = \dfrac{1}{40}$

Ejercicio 16 (1.6)

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático (MSE) que permita estimar la variable aleatoria S a partir de la v.a. X_1. Se conoce la siguiente información estadística:

$$\mathbb{E}\{X_1\} = 0 \quad \mathbb{E}\{S\} = 1$$
$$\mathbb{E}\{X_1^2\} = 1 \quad \mathbb{E}\{X_1 S\} = 2$$

(a) Indíquese cuál de los siguientes diseños MSE proporcionará un error cuadrático medio menor:

$$\hat{S}_a = w_{0a} + w_{1a}X_1$$
$$\hat{S}_b = w_{1b}X_1$$

(b) Si se dispone ahora de una segunda v.a. X_2 de la que se sabe:

$$\mathbb{E}\{X_2\} = 1 \qquad \mathbb{E}\{X_2^2\} = 2$$
$$\mathbb{E}\{X_1 X_2\} = \tfrac{1}{2} \quad \mathbb{E}\{S X_2\} = 2$$

justifíquese si el estimador $\hat{S}_c = w_{0c} + w_{1c}X_1 + w_{2c}X_2$ presenta un error cuadrático medio menor que los estimadores propuestos en a).

Solution:

(a) $w_{0,a}$ no es nulo, por lo que el MSE de $\hat{S}_a$ es menor que el de $\hat{S}_b$

(b) Al calcular los pesos de $\hat{S}_c$, se tiene:

$$w_{1,c} = 2 \qquad w_{2,c} = 0$$

Por lo que $\hat{S}_a = \hat{S}_c$, y ambos presentan el mismo MSE, que es menor que el de $\hat{S}_b$

Ejercicio 17 (1.7)

Se estima la varianza v de una v.a. X con media nula a partir de K observaciones $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ de dicha variable tomadas independientemente, utilizando el estimador

$$\hat{V} = \frac{1}{K}\left[\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}\right]^2$$

(a) Determínese el sesgo del estimador.
(b) Para $K = 2$ y suponiendo $\mathbb{E}\left\{X^4\right\} = \alpha$, determínese la varianza del estimador.

Solution:
(a) Es insesgado
(b) $\text{Var}\left\{\hat{V}\right\} = \frac{1}{2}\left[\alpha + v^2\right]$

Ejercicio 18 (1.2; 1.3; 1.7)

La d.d.p. conjunta de dos variables aleatorias S y X es:

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} 6s, & 0 < s < x \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

obténganse:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.
(b) El sesgo de dicho estimador.

Solution:
(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{2}{3}X$
(b) Es insesgado

Ejercicio 19 (1.2; 1.3)

La d.d.p. conjunta de las vv.aa. S y X sigue la forma:

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < s < |x|$$

(a) Determínese la d.d.p. de la v.a. X, $p_X(x)$, especificando el valor de α.

(b) Establézcanse las expresiones de los estimadores de S en función de X que minimizan los costes cuadrático medio ($\overline{C}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\left\{(S-\hat{S})^2\right\}$) y absoluto medio ($\overline{C}_{\text{MAD}} = \mathbb{E}\left\{|S-\hat{S}|\right\}$), $\hat{S}_{\text{MMSE}}$ y $\hat{S}_{\text{MAD}}$, respectivamente.

(c) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en X, establézcanse las expresiones de los estimadores $\hat{S}_{q,\text{MMSE}} = w_1 X^2$ y $\hat{S}_{q,\text{MAD}} = w_2 X^2$ que minimizan los costes antes mencionados (cuadrático y absoluto medios, respectivamente).

Solution:

(a) $p_X(x) = |x|, -1 < x < 1$

(b) $\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = \hat{S}_{\text{MAD}}(X) = |X|/2$

(c) $\hat{S}_{q,\text{MMSE}}(X) = 3X^2/5$; $\hat{S}_{q,\text{MAD}}(X) = 5X^2/8$

Ejercicio 20 (1.2; 1.7)

Las variables aleatorias S y X tienen una función de densidad de probabilidad conjunta

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} 10s, & 0 < s < x^2 \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se desea estimar S a la vista de X minimizando la siguiente función de coste:

$$c(S,\hat{S}) = S^2\left(S-\hat{S}\right)^2$$

Obténganse:

(a) el estimador óptimo de S, $\hat{S}_C$, que minimiza el coste medio a la vista de X, $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})|x\right\}$.

(b) el estimador de la forma $\hat{S}_L = wX$ que minimiza el coste medio $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\}$.

(c) el coste medio global de ambos estimadores, $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\}$ y $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\}$.

(d) el sesgo de ambos estimadores, $\mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_C\right\}$ y $\mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_L\right\}$.

(e) la varianza del error de ambos estimadores, $\text{Var}\left\{S-\hat{S}_C\right\}$ y $\text{Var}\left\{S-\hat{S}_L\right\}$.

Solution:

(a) $\hat{S}_C = \frac{4}{5}X^2$

(b) $\hat{S}_L = \frac{11}{15}X$

(c) $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\} = \frac{1}{195}$ y $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\} = \frac{7}{1170}$

(d) $\mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_C\right\} = -\frac{2}{21}$ y $\mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_L\right\} = -0.1349$

(e) Var $\left\{S - \hat{S}_C\right\} = 0.03163$ y Var $\left\{S - \hat{S}_L\right\} = 0.0326$

Ejercicio 21 (1.5; 1.7)

Se desea estimar un vector aleatorio **S** a partir de un vector de observaciones **X** relacionado con él:

$$\mathbf{X} = H\mathbf{S} + \mathbf{R}$$

donde H es una matriz conocida, **R** es un vector de ruido con distribución $G(\mathbf{0}, v_r I)$, y **S** es el vector aleatorio a estimar, cuya distribución es $G(\mathbb{E}\{\mathbf{S}\}, Vs)$. Sabiendo que **S** y **R** son vectores aleatorios independientes:

(a) Calcúlese el estimador ML de **S**, $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Determínese si dicho estimador es sesgado o no. Justifique su respuesta.

(c) Según se sabe, el estimador MSE de **S** viene dado por la expresión:

$$\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{MMSE}} = \left(H^T H + v_r V_s^{-1}\right)^{-1} H^T \mathbf{X}$$

Calcúlese el sesgo de $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{MMSE}}$ e indíquese en qué condiciones dicho sesgo tiende a 0.

Solution:

(a) $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{ML}} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \mathbf{X}$

(b) Es insesgado

(c) $\mathbb{E}\left\{\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{MMSE}} - \mathbf{S}\right\} = \left(H^T H + v_r V_s^{-1}\right)^{-1} H^T H \mathbb{E}\{\mathbf{S}\} - \mathbb{E}\{\mathbf{S}\}$. El sesgo tiende a anularse cuando la potencia de ruido tiende a 0.

Ejercicio 22 (1.2)

Considérese la familia de funciones de coste dadas por

$$c(S, \hat{S}) = \frac{1}{N+1}\hat{S}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}S^{N+1} - \frac{1}{N}S\hat{S}^N$$

siendo N un número entero no negativo e impar.

(a) Suponiendo que

$$p_{S,X}(s, x) = \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right) u(s)u(x) \quad \lambda > 0$$

determínese el estimador de mínimo coste medio de S a la vista de X.

(b) Determínese el mínimo coste medio.

(c) Determínese el coeficiente w que minimiza el coste medio del estimador de la forma

$$\hat{S}_L = wX^m$$

siendo m un entero positivo.

Indicación: $\int_0^\infty x^N \exp(-x)\, dx = N!$

Solution:

(a) $\hat{S} = X$

(b) $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\} = ((N+1)! - 1)\,(N-1)!\lambda^{N+1}$

(c) $w = \dfrac{(Nm+1)!}{(Nm+m)!\lambda^{m-1}}$

Ejercicio 23 (1.4; 1.7)

La densidad de probabilidad tipo Erlang de orden N viene dada por la expresión

$$p_X(x) = \frac{a^N x^{N-1} \exp(-ax)}{(N-1)!} \quad x > 0, \quad a > 0$$

Supóngase que N es conocida. Considerando que la media viene dada por $m = N/a$, determínense:

(a) El estimador ML de la media, $\hat{M}_{\text{ML}}$, a partir de K observaciones independientes de la variable.

(b) El sesgo de $\hat{M}_{\text{ML}}$.

(c) ¿Es $\hat{M}_{\text{ML}}$ un estimador consistente en varianza?

Solution:

(a) $\hat{M}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

(b) Es insesgado

(c) $\text{Var}\left\{\hat{M}_{\text{ML}}\right\} = \dfrac{v_x}{K}$, luego es consistente en varianza

Ejercicio 24 (1.6)

La variable $X = [X_1, X_2, X_3]^T$ se distribuye según una ddp de media $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y matriz de covarianza

$$V_{XX} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcúlense los coeficientes (w_0, w_1 y w_2) del estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de X_3 a la vista de X_1 y X_2,

$$\hat{X}_{3,\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

(b) Calcúlese el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\text{LMSE}}\right)^2\right\}$.

Solution:

(a) $\hat{X}_{3,\text{LMSE}} = -\frac{1}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2$

(b) $\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\text{LMSE}}\right)^2\right\} = \frac{8}{5}$

Ejercicio 25 (1.3; 1.6)

Sean X y S dos variables aleatorias con d.d.p. conjunta

$$p_{X,S}(x,s)\begin{cases} \alpha & ; \quad 0 < x < 1,\ 0 < s < 2(1-x) \\ 0 & ; \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

siendo α una constante.

(a) Utilizando la representación del soporte de la d.d.p., determine el valor de α.

(b) Encuentre la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$

(d) Calcule el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$.

Solution:

(a) $\alpha = 1$

(b) $p_{S|X}(s|x) = \dfrac{1}{2\,(1-x)}$

(c) $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 1 - X$

(d) $\widehat{S}_{\text{LMSE}} = 1 - X$

Ejercicio 26 (1.3; 1.4; 1.7)

Para la estimación de una variable aleatoria S se dispone de una observación de la v.a. X caracterizada por:

$$X = S + N$$

siendo la función de densidad de probabilidad de S

$$p_S(s) = s\exp(-s) \quad s > 0$$

y N un ruido aditivo, independiente de S, con distribución

$$p_N(n) = \exp(-n) \quad n > 0$$

.

(a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S, $\widehat{S}_{\text{ML}}$.

(b) Determine la función de densidad de probabilidad conjunta de X y S, $p_{X,S}(x,s)$, y la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Obtenga el estimador máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

(d) Obtenga el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MSE}}$.

(e) Calcule el sesgo de los estimadores obtenidos anteriormente, $\widehat{S}_{\text{ML}}$, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$ y $\widehat{S}_{\text{MSE}}$.

(f) Indique qué estimador tiene una menor varianza. Razone la respuesta sin calcular las varianzas de los estimadores.

Nota: Para la resolución del ejercicio puede emplear la siguiente igualdad:

$$\int_0^{\infty} x^N \exp(-x)\, dx = N!$$

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{ML}} = X$

(b) $p_{X,S}(x,s) = s\exp(-x) \quad x > s,\ s > 0$

$p_{S|X}(s|x) = \dfrac{2s}{x^2} \quad 0 < s < x,\ x > 0$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = X$

(d) $\widehat{S}_{\text{MSE}} = \dfrac{2}{3}X$

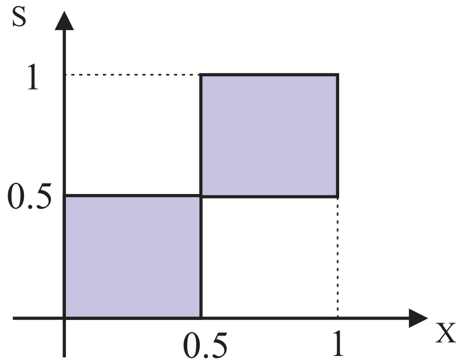
(e) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{ML}}\right\} = \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = -1$

$\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MSE}}\right\} = 0$

$\text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MSE}}\right\} < \text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = \text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{ML}}\right\}$

Ejercicio 27 (1.3)

La región sombreada de la figura ilustra el dominio de la función de distribución conjunta de S y X, i.e., el conjunto de puntos para los que $p_{X,S}(x,s) \neq 0$.



Responda a las siguientes cuestiones justificando sus respuestas:

(a) Si se sabe que $p_{X,S}(x,s)$ es constante en el dominio de definición, ¿cuál es el estimador MSE de S a la vista de X? Represente gráficamente dicho estimador.

(b) ¿Existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior para la cual el estimador MSE de S a la vista de X sea $\widehat{S}_{\text{MSE}} = X/2$?

(c) Justifique si existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior tal que $\widehat{S} = 0.5$ sea:
- El estimador de mínimo error cuadrático de S a la vista de X.
- El estimador de mínimo error absoluto de S a la vista de X.
- El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.25$ si $0 < x < 0.5$ y $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.75$ si $0.5 < x < 1$

(b) Para $0.5 < x < 1$, $p_{S|X}(s|x)$ está definida entre $0.5 < s < 1$, por lo que $X/2$ no puede ser el valor medio de $p_{S|X}(s|x)$

(c) $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni la media ni la mediana de $p_{S|X}(s|x)$, pero puede ser su máximo. Luego, $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni $\widehat{S}_{\text{MSE}}$, ni $\widehat{S}_{\text{MAD}}$, pero puede ser $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

Ejercicio 28 (1.3; 1.4)

La variable aleatoria S sigue una distribución exponencial

$$p_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}, \qquad s > 0$$

siendo $\lambda > 0$. La variable aleatoria discreta X está relacionada con S mediante una distribución de Poisson, es decir

$$P_{X|S}(x|s) = \frac{s^x e^{-s}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Determine el estimador ML de S a la vista de x

(b) Suponga que se observan K realizaciones independientes $\{(x^{(k)}, s^{(k)}), k = 1, \ldots, K\}$ de (X, S). Determine el estimador ML de λ basado en ellas.

(c) Determine el estimador MAP de S a la vista de $x = 1$.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{ML}} = X$

(b) $\widehat{\lambda}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} s^{(k)}}$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{X}{1+\lambda}$

Ejercicio 29 (1.5; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la observación X dada por:

$$X = S + N_1 + N_2$$

donde S es una v.a. gaussiana de media m_s y varianza v_s, y donde N_1 y N_2 son dos variables de ruido, independientes de S, cuya d.d.p. conjunta viene dada por:

$$p_{N_1,N_2}(n_1, n_2) \sim G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_{12} \\ v_{12} & v_2 \end{bmatrix}\right)$$

Obtenga:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) Calcule el sesgo y varianza de ambos estimadores.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{v_s}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}} X + m_s \left(1 - \dfrac{v_s}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}}\right)$

(b) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = \widehat{S}_{\text{MMSE}}$

(c) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = 0$

$\text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = \text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = \dfrac{v_s^2}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}}$

Ejercicio 30 (1.4; 1.7)

Se dispone de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$ independientes con distribución de Pareto de parámetros deterministas α y β, es decir,

$$p_{X|\alpha,\beta}(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geq \beta$$

siendo $\alpha > 1$ y $\beta > 0$.

(a) Supuesto conocido el valor de β, determine el estimador ML de α, $\widehat{\alpha}_{\text{ML}}$.

(b) Suponiendo $K = 1$ (es decir, una sola observación), determine el estimador ML de β, $\widehat{\beta}_{\text{ML}}$.

(c) Suponiendo $K = 1$, determine el sesgo de $\widehat{\beta}_{\text{ML}}$.

Solution:

(a) $\widehat{\alpha}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \ln \frac{x^{(k)}}{\beta}}$

(b) $\widehat{\beta}_{\text{ML}} = x^{(1)}$

(c) $\text{Sesgo}\left\{\widehat{\beta}_{\text{ML}}\right\} = -\dfrac{1}{\alpha - 1}\beta$

Ejercicio 31 (1.3)

Construya el estimador de mínimo error cuadrático medio de la variable aleatoria S a partir de la observación de una variable aleatoria X en los siguientes casos:

(a)

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(b)

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 2, & 0 \leq s \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1}{2}$

(b) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1-X}{2}$

Ejercicio 32 (1.3; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la observación X y para ello se conoce la distribución conjunta de ambas:

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} 6s, & 0 < s < x-1, \quad 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtenga:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) El estimador de mínimo error absoluto de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

(d) Calcule el sesgo de los estimadores anteriores.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{2}{3}(X-1)$

(b) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = X - 1$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$

(d) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = 0 \quad \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = -0.25 \quad \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAD}}\right\} = -0.03$

Ejercicio 33 (1.4; 1.7)

Se dispone de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$ independientes con distribución de Rayleigh de parámetro b, es decir,

$$p_{X|b}(x|b) = \frac{2}{b} x \exp\left(-\frac{x^2}{b}\right), \qquad x \geq 0$$

siendo $b > 0$.

(a) Determine el estimador ML de b, $\widehat{b}_{\text{ML}}$.

(b) Si el conjunto de valores observados es $\{2, 0, 1, 1\}$, ¿cuál sería el valor más verosímil del parámetro b?

(c) Determine el sesgo del estimador.

Solution:

(a) $\widehat{b}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \left(x^{(k)}\right)^2$

(b) $\widehat{b}_{\text{ML}} = 1.5$

(c) Insesgado

Ejercicio 34 (1.3; 1.7)

Se dispone de tres variables aleatorias independientes S_1, S_2 y S_3, con idéntica fdp a priori. A partir de una observación de $X = S_1 + S_2 + S_3$ se desea estimar S_1.

(a) Justifique brevemente por qué el estimador de mínimo error cuadrático de S_1 dado x es $\hat{s}_1 = \frac{x}{3}$.

(b) Calcule el sesgo de dicho estimador. ¿Es sesgado o insesgado?

Asumiendo en los apartados siguientes que S_1, S_2 y S_3 tienen una fdp uniforme entre -1 y 1:

(c) Calcule la fdp de X dado s_1.

(d) Calcule la varianza del estimador $\hat{S}_1$.

Solution:

(a) Por la simetría del problema, todas las $\mathbb{E}\{S_i|x\}$ deben ser iguales y sumar x.

(b) 0, insesgado.

(c) $p_{X|S_1}(x|s_1) = 1/2 - |x - s_1|/4$ para $-2 < x < 2$, 0 en otro caso.

(d) $1/9$

Ejercicio 35 (1.5)

Dos variables aleatorias Gaussianas independientes Z_1 y Z_2 tienen medias 2 y 1, respectivamente. Ambas tienen varianza unidad. Estamos interesados en su diferencia $S = Z_1 - Z_2$.

(a) Calcule $p_S(s)$, el estimador MMSE de S y el error cuadrático medio de dicho estimador, si no se dispone de ningún dato adicional.

(b) A continuación se observa $X = Z_1 + Z_2 = 3$. Calcule $p_{S|X}(s|x)$, el estimador MMSE de S a la vista de X y el error cuadrático medio de dicho estimador. Interprete el resultado obtenido en relación con el apartado anterior.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = 1$, con varianza 2.

(b) X es independiente de S, por lo que la respuesta es la misma que en a).

Ejercicio 36 (1.2;1.3)

Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s, x) = 24xs, \quad 0 \leq s \leq 1 - x,\ 0 < x < 1$$

(a) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Calcule el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) Calcule el estimador MAD de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAD}}$.

(d) El estimador de la forma $\hat{S}_{\text{CUAD}} = wX^2$ de mínimo error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{2}{3}(1 - X)$.

(b) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1 - X$.

(c) $\hat{S}_{\text{MAD}} = \dfrac{1 - X}{\sqrt{2}}$.

(d) $w = 0.8$

Ejercicio 37 (Estimación Lineal)

Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{1}{3}(x + s) \quad 0 < x < 2, \;\; 0 < s < 1.$$

(a) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.

(b) Calcule el error cuadrático medio del estimador.

Solution:

(a) $\hat{s}_{\text{LMSE}} = \dfrac{14}{23} - \dfrac{1}{23}x$.

(b) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{LMSE}}\right)^2\right\} = \dfrac{11}{138}$

Ejercicio 38 (Estimación ML y MMSE)

El encargado de una empresa informática desea analizar la productividad de sus empleados mediante la estimación del tiempo, S, que les lleva desarrollar cierto programa informático. Para ello, a las 12:00 a.m. el encargado solicita a sus empleados la realización de este programa. Los empleados no atienden la petición hasta que finalicen la tarea que estén llevando a cabo en ese momento, lo que les lleva un tiempo adicional N. En consecuencia, el tiempo total transcurrido desde la petición del encargado hasta que el empleado termina el programa es $X = S + N$.

Se sabe que el tiempo N puede modelarse mediante la siguiente distribución exponencial:

$$p_N(n) = a \exp(-an) \quad n > 0,$$

mientras que S puede modelarse mediante una exponencial retardada, es decir:

$$p_S(s) = b \exp(-b(s - c)) \quad s > c.$$

(a) Antes de iniciar el análisis de productividad sobre los empleados, se ha simulado sobre un grupo de control, midiendo directamente sobre este grupo los tiempos que han tardado en acabar las tareas que están realizando y los tiempos que han tardado en desarrollar el programa informático. Como consecuencia se tienen los siguientes conjuntos de observaciones independientes: 6, 10, 12 y 20 minutos para el tiempo N y 6, 12, 18 y 36 minutos para el tiempo S. Estime por máxima verosimilitud los valores de las constantes a, b y c.

Considere de ahora en adelante que $a = 10$ minutos, $b = 10$ minutos y $c = 5$ minutos.

(b) Si cuando comienza el análisis de productividad, el encargado recibe la notificación de finalización del programa de tres empleados diferentes a las 12:25, a las 12:30 y a las 12:40 a.m., estime por máxima verosimilitud el tiempo que ha tardado cada uno de estos empleados en realizar el programa.

(c) ¿Qué tiempo estimaríamos que ha tardado cada uno de estos empleados si utilizásemos un estimador de mínimo error cuadrático medio?

Solution:

(a) $\hat{a}_{\text{ML}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} n^{(k)} = 12$ minutos;
$\hat{c}_{\text{ML}} = \text{mín}_k \left\{s^{(k)}\right\} = 6$ minutos;
$\hat{b}_{\text{ML}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(s^{(k)} - \hat{c}_{\text{ML}}\right) = 12$ minutos.

(b) $\hat{s}_{\text{ML}} = x$. $\hat{s}_{\text{ML}}(x = 25) = 25$, $\hat{s}_{\text{ML}}(x = 30) = 30$,$\hat{s}_{\text{ML}}(x = 40) = 40$.

(c) $\hat{s}_{\text{MMSE}} = \frac{x+5}{2}$. $\hat{s}_{\text{MMSE}}(x = 25) = 15$, $\hat{s}_{\text{MMSE}}(x = 30) = 17.5$,$\hat{s}_{\text{MMSE}}(x = 40) = 22.5$.

Ejercicio 39 (Estimación MMSE y MAD)

Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \left[\begin{array}{lll} \frac{4s}{x(1-x)}, & x(1-x) < s < 2x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{resto} & \end{array}\right.$$

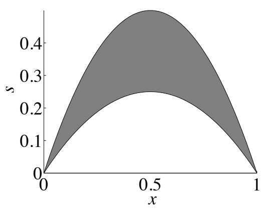
(a) Represente, de forma aproximada, la región de soporte de la distribución conjunta.

(b) Determine el estimador $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(c) Determine el estimador $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

Solution:

(a) La región de soporte es la zona sombreada de la figura



(b) $\hat{s}_{\text{MMSE}} = \dfrac{14}{9}x(1-x)$.

(c) $\hat{s}_{\text{MAD}} = \sqrt{\frac{5}{2}}x(1-x)$

Ejercicio 40 (Estimación ML)

Se toma una medida de la tensión intantánea x existente en un momento dado en un nodo de un circuito. En dicho nodo existe una componente de señal con valor s, contaminada por ruido gaussiano aditivo de media nula y varianza v, e independiente de la señal. A priori, el valor de s sigue una densidad de probabilidad gaussiana de media y varianza unitarias.

(a) Suponiendo conocida v, calcule el estimador de máxima verosimilitud de s, $\hat{s}_{\text{ML}}(x)$.

(b) Calcule el error cuadrático medio en el que incurre el estimador $\hat{s}_{\text{ML}}(x)$.

(c) Calcule la verosimilitud de v a la vista de x, $p_{X|v}(x|v)$.

(d) Calcule el estimador de máxima verosimilitud de v, $\hat{v}_{\text{ML}}(x)$.

Solution:

(a) $\hat{s}_{\text{ML}}(x) = x$

(b) $\mathbb{E}[(x-s)^2] = v$

(c) $p(x|v) = G(x|1, v+1)$

(d) $\hat{v}_{\text{ML}}(x) = \text{máx}[(x-2)x, 0]$