Práctica 2

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jerónimo Arenas García

Practica 2: Detección Radar

Teoría Moderna de la Detección y la Estimación

September 23, 2013

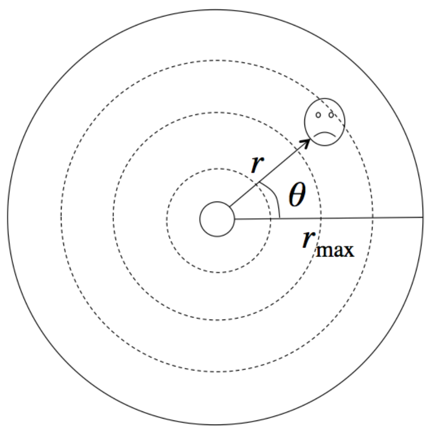
1 Introducción

En esta práctica el alumno trabajará sobre un escenario simplificado de detección radar. Constituye esta aplicación un escenario en el que se dispone de un modelo estadístico, lo que permite abordar el problema de diseño de los detectores bajo un enfoque de tipo analítico. A lo largo de la práctica el alumno analizará las curvas características de operación de detectores LRT, y las usará para implementar detectores de Neyman-Pearson. Se estudiará cómo las prestaciones de dichos clasificadores varían en función de la distancia al blanco, número de observaciones disponibles, retardo de exploración admisible, etc.

La siguiente definición de radar está tomada de la edición española de la wikipedia: *"El radar (término derivado del acrónimo inglés radio detection and ranging) es un sistema que usa ondas electromagnéticas para medir distancias, altitudes, direcciones y velocidades de objetos estáticos o móviles como aeronaves, barcos, vehículos motorizados, formaciones meteorológicas y el propio terreno. Su funcionamiento se basa en emitir un impulso de radio, que se refleja en el objetivo y se recibe típicamente en la misma posición del emisor. A partir de este eco se puede extraer gran cantidad de información. El uso de ondas electromagnéticas permite detectar objetos más allá del rango de otro tipo de emisiones (luz visible, sonido, etc.)".*

En esta práctica analizaremos la fase de detección de un sistema radar; es decir, la decisión a partir de la señal recibida acerca de la presencia o ausencia de blancos, así como su distancia. Consideraremos para ello un modelo simplificado, pero que incorpora los elementos más relevantes para la fase de detección.

Para la búsqueda de potenciales blancos, el radar emite pulsos barriendo una circunferencia completa. Para cada ángulo θ, se transmite un pulso y se queda a la escucha de la señal de eco sobre la que posteriormente se trabajará. Teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas se propagan con la velocidad de la luz, resulta posible alinear el tiempo transcurrido entre la emisión de la señal y su recepción con la distancia a la que se situaría un hipotético blanco:



$$r = \frac{c\,t}{2}, \tag{1}$$

donde r es la distancia al blanco, $c = 300.000$ km/s, y t es el tiempo de escucha. El tiempo de escucha para un ángulo dado depende de la distancia máxima que se quiere explorar, que en esta práctica consideraremos es de $r_{\text{max}} = 15$ km. Por lo tanto, para cada ángulo de exploración la antena debería permanecer a la escucha un total de 0.1 ms.

Por otro lado, hay que tener presente que la amplitud del eco se hace menor conforme mayor es la distancia al blanco. Concretamente, se puede comprobar que la potencia recibida decae con la cuarta potencia de la distancia; equivalentemente, la amplitud del pulso transmitido decaerá con r^2,

$$A_r = \alpha/r^2, \tag{2}$$

donde A_r es la amplitud de la señal recibida, r la distancia en metros y α una constante que depende de la amplitud del pulso transmitido, pero también de otros factores como la directividad y apertura de las antenas. A lo largo de la práctica usaremos $\alpha = 5 \cdot 10^5$.

Finalmente, las medidas de la señal recibida están sujetas a ruido que modelaremos como gaussiano, de media nula y varianza $v = 10^{-4}$. Por lo tanto, y denotando como hipótesis nula la ausencia de blanco, las verosimilitudes de las dos hipótesis (ausencia y presencia de blanco) basadas en la observación correspondiente a una distancia r, x_r, serán:

$$\begin{aligned} p_{X_r|H}(x_r|0) &\sim G(0, v) \\ p_{X_r|H}(x_r|1) &\sim G(\alpha/r^2, v) \end{aligned}$$

2 Caracterización del LRT mediante curvas ROC

Compruebe que el LRT del decisor de presencia de blanco a distancia r puede expresarse como un test de umbral sobre la observación

$$x_r \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta \tag{3}$$

1. Determine, en función de r, el valor de η correspondiente a un test de máxima verosimilitud. Para dicho criterio, represente la probabilidad de falsa alarma, P_{FA}, y la probabilidad de detección, P_{D}, nuevamente en función de la distancia de exploración r. Si lo desea, puede hacer uso de la función de Matlab `normcdf`.
2. En sistemas radar, es habitual emplear el criterio de Neyman-Pearson para el diseño del detector. Considere que la máxima probabilidad de falsa alarma admisible es $P_{\text{FA}} = 10^{-3}$. Haciendo uso de la función de Matlab `norminv`, determine el valor del umbral correspondiente a dicho test, y represente la evolución de la P_{D} en función de r. Si se desea garantizar una probabilidad de detección superior a 0.9, ¿hasta qué distancia de exploración cumplirá el radar dicha especificación?
3. Dibuje las curvas ROC que caracterizan a los LRT para las siguientes distancias de exploración: $r = 2000, 5000$ y 10000 m. Haga uso de la función `norminv` para obtener una curva suave que tome valores equiespaciados, y suficientemente pequeños, de la probabilidad de falsa alarma.

3 Mejora de prestaciones tomando múltiples medidas

Para conseguir incrementar el rango de distancias en que el sistema radar cumple especificaciones sobre P_{FA} y P_{D}, se considera el envío de múltiples pulsos para cada ángulo de exploración. De esta manera, si el proceso de emisión de pulso y escucha se repite un total de l veces, se dispone de un conjunto de observaciones $\{x_r^{(k)}\}, k = 1, \ldots, l$, para la toma de decisión. Considerando que las medidas son independientes e idénticamente distribuidas, se pude comprobar que la decisión depende del valor de un estadístico suficiente $t_r = \frac{1}{l}\sum_k x_r^{(k)}$ con distribución gaussiana bajo ambas hipótesis.

1. Obtenga la pdf de t_r bajo cada una de las hipótesis. Verifique que el test de máxima verosimilitud puede expresarse como un test de umbral sobre t_r.

2. Para $r = r_{\text{max}} = 15000$ m, represente las curvas ROC que caracterizan al test LRT sobre t_r para los siguientes valores $l = 1, 3, 10, 30, 100, 300$. Compare dichas curvas con las que se obtendrían para una distancia menor.

3. Para $r = 10000$, analice cómo evoluciona con l la P_{D} del decisor de Neyman-Pearson con $P_{\text{FA}} \leq 10^{-3}$. Determine cuál es el valor mínimo de medidas l_0 para el que se obtiene una probabilidad de detección superior a 0.9.

4. Para el valor de l_0 calculado en el apartado anterior, represente cómo varía con la distancia la P_{D} del detector de Neyman Pearson con $P_{\text{FA}} \leq 10^{-3}$. Compare con el resultado que obtuvo para $l = 1$.

5. Sabiendo que la constante α es proporcional a la amplitud transmitida, A_t, ¿por cuánto habría que multiplicar la potencia transmitida para conseguir las mismas prestaciones en $r = 10000$ m utilizando una única observación?

   Puede comprobar que resulta igualmente eficiente, desde un punto de vista energético, el envío repetido de pulsos que emitir un único pulso de mayor amplitud. No obstante, existen otros elementos de tipo práctico que pueden limitar la potencia máxima de funcionamiento del sistema. Además, como el sistema radar debe funcionar en tiempo real, actualizando sus estimaciones sobre presencia o ausencia de blanco en cada punto, las l observaciones se pueden tomar en otros tantos barridos del espacio de exploración, de forma que en cada barrido las observaciones sean utilizadas de forma conjunta con aquéllas que se obtuvieron en barridos anteriores. De esta forma, puede conseguirse unas mejores prestaciones del sistema, sin comprometer el tiempo necesario para la exploración completa del espacio de observación.

4 Trabajando con datos

En esta sección, los alumnos podrán trabajar con datos sintéticos para determinar la presencia de blancos en un caso concreto. El fichero de datos `data_P2.mat` proporcionado junto con este enunciado contiene las siguientes variables:

- Variable `X`: Es una matriz de tamaño 100×1000, que contiene las observaciones obtenidas, asociadas a la emisión de 100 pulsos diferentes para un mismo ángulo θ. Por tanto, cada fila de `X` contiene las medidas asociadas a cada uno de los pulsos emitidos en 1000 instantes temporales diferentes tras la emisión.

- Variable `t`: Es un vector de longitud 1000 que contiene las referencias de tiempos. El elemento i-ésimo de `t` indica el retardo de escucha asociado a la columna i-ésima de `X`.

1. Visualice las observaciones proporcionadas en la matriz `X`. Para ello, puede recurrir a las siguientes funciones de Matlab: `imagesc` y `mesh`. Trate de localizar valores altos que puedan sugerir la presencia de blancos.

2. Construya una matriz `T` del mismo tamaño que `X`, de forma que la fila i-ésima de `T` contenga el promedio de las primeras i filas de `X`. De esta manera, la matriz `T` contiene el valor de los estadísticos suficientes para la detección considerando un número variable de observaciones entre 1 y 100. Visualice la matriz `T`. Si se asume que únicamente existe un blanco, ¿a qué distancia del radar cree que se encuentra?

3. Finalmente, obtenga y visualice la salida de un detector de Neyman-Pearson con $P_{\text{FA}} \leq 10^{-3}$. Recuerde que el umbral a aplicar sobre los valores de `T` depende del número de observaciones disponibles, pero no del tiempo de escucha (o, equivalentemente, de la distancia al potencial blanco). ¿Cree que es razonable pensar que hay un único blanco? ¿A qué cree que puede deberse la presencia de otros puntos en los que el detector opta por la hipótesis no nula?

5 Ejercicio de ampliación

En esta sección el alumno deberá localizar la posición de un blanco asociado a su NIA. Para ello se proporciona al alumno una función de Matlab `explora`, la cual hay que llamar con dos parámetros: los seis últimos dígitos del NIA del alumno, y el ángulo de exploración que se desea utilizar. La función devuelve dos variables: `t`, que es un vector que indica los tiempos transcurridos entre la emisión del pulso y la observación de los valores almacenados en la segunda variable de salida, `x`.

Para localizar el blanco, el alumno deberá explorar todos los ángulos en el intervalo $[0, 2\pi]$, utilizando al menos 500 valores angulares diferentes. Simule un escenario en el que, para cada valor del ángulo de exploración, se emiten l_0 pulsos; calcule de esta manera el valor del estadístico suficiente observado para cada par [ángulo, distancia].

Aplique para cada punto de la imagen radar obtenida el correspondiente test de Neyman-Pearson. Visualice la salida de dicho test haciendo uso de la función proporcionada `polarimagesc`.