Exámenes curso 2011/2012

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jerónimo Arenas García, Jesús Cid Sueiro, Vanessa Gómez Verdejo, Miguel Lázaro Gredilla

Universidad Carlos III de Madrid

Nombre y apellidos: ______________________

Titulación y grupo: ______________________

NIA y firma: ______________________

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	10	10	10	10	30	30	100
Score:							

Indicaciones:

- El examen consta de una primera parte que consiste en 5 cuestiones de tipo test, y de una segunda parte con dos ejercicios cortos. Ambas partes reciben la misma valoración. Algunas preguntas se dividen en varias subpreguntas, en cuyo caso la puntuación se distribuye uniformemente entre ellas. Se incluyen además dos preguntas de tipo test asociadas a las sesiones prácticas.
- Cada pregunta o subpregunta de tipo test únicamente tiene una respuesta correcta; sin embargo, los alumnos pueden marcar tantas respuestas como consideren oportuno. Si se marca la respuesta correcta se obtiene la puntuación asociada a la pregunta (o subpregunta); por cada respuesta incorrecta marcada se obtendrá una penalización que se calcula como $\frac{\text{Puntuación pregunta}}{\text{Número de opciones} - 1}$.
- Consteste a las preguntas en la hoja de examen. Si necesita más espacio utilice una hoja adicional.

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MMSE}}$ Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$ Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$ Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$ Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$ Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. Preguntas tipo test

(10 %) 1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Para diseñar el estimador de máxima verosimilitud de una variable aleatoria S es imprescindible conocer su d.d.p. a priori $p_S(s)$.

○ Verdadero.

$\surd$ **Falso.**

(b) El estimador de máxima verosimilitud de un parámetro determinista coincide con el estimador que maximiza el logaritmo de su verosimilitud.

$\surd$ **Verdadero.**

○ Falso.

(c) Conociendo todos los estadísticos de primero y segundo orden de la variable a estimar y las observaciones, puede determinarse el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(d) El estimador lineal de mínimo error cuadrático de una variable aleatoria S de media $m \neq 0$ a partir de otra variable aleatoria X de media nula tiene un término w_0 distinto de cero.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(10 %) 2. Se trata de estimar la variable aleatoria S a la vista de la observación X. Se tiene que $p_{S|X}(s|x) = \frac{1}{x}e^{-s/x}$, $x > 0$, $s \geq 0$. Señale la afirmación CORRECTA:

√ **El estimador MAP es $\hat{s}_{\text{MAP}} = 0$.**

◯ El estimador MMSE coincide con el MAP.

◯ El estimador MAP es $\hat{s}_{\text{MAP}} = x$.

◯ El estimador MMSE es $\hat{s}_{\text{MMSE}} = s/2$.

(10 %) 3. Se desea estimar la v.a. S a partir de la observación $X = 2S + N$. Para ello, se plantea usar los estimadores: $\hat{S}_1 = X$ y $\hat{S}_2 = X/2$. Se puede afirmar que:

(a) $\hat{S}_2$ tiene sesgo nulo si $\mathbb{E}\{N\} = 0$.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(b) El sesgo de $\hat{S}_1$ sólo depende de $\mathbb{E}\{N\}$.

◯ Verdadero.

√ **Falso.**

(c) El sesgo de $\hat{S}_1$ siempre es mayor que el de $\hat{S}_2$, independiente de la distribución de N.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(d) La varianza de $\hat{S}_1$ siempre es mayor que la de $\hat{S}_2$, independiente de la distribución de N.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(10 %) 4. En un problema de estimación analítica, se sabe que $p_{S|X}(s|x) = p_S(s)$, para todo s y todo x. Se observa $X = 4$. Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es $\mathbb{E}\{S|X = 4\}$.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(b) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es $\mathbb{E}\{S\}$

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(c) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es s

◯ Verdadero.

√ **Falso.**

(d) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es 4

◯ Verdadero.

√ **Falso.**

2. Miniejercicios

(30 %) 5. Suponiendo que

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{5}{4} - sx, \qquad s \in [0,1], x \in [0,1] \tag{1}$$

determine el estimador MSE de s a la vista de x.

Solution: $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{15-8x}{30-12x}$

(30 %) 6. Considérese la estimación de una variable aleatoria S a partir de otra X, estando ambas caracterizadas por la siguiente densidad de probabilidad conjunta:

$$p_{S,X}(s,x) = 2, \qquad 0 \le s \le x; \qquad 0 \le x \le 1.$$

(a) Calcule el valor de w que minimiza el error cuadrático medio (MSE) de un estimador con forma analítica $\hat{S} = wX^2$.

(b) Calcule el sesgo del estimador.

Solution:

(a) $w^* = \frac{3}{5}$.

(b) Es sesgado.

Nombre y apellidos: ______________________________

Titulación y grupo: ______________________________

NIA y firma: ______________________________

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	10	10	10	10	30	25	95
Score:							

Indicaciones:

- El examen consta de una primera parte que consiste en 4 cuestiones de tipo test, y de una segunda parte con dos ejercicios cortos. Ambas partes reciben la misma valoración. Algunas preguntas se dividen en varias subpreguntas, en cuyo caso la puntuación se distribuye uniformemente entre ellas.
- Cada pregunta o subpregunta de tipo test únicamente tiene una respuesta correcta; sin embargo, los alumnos pueden marcar tantas respuestas como consideren oportuno. Si se marca la respuesta correcta se obtiene la puntuación asociada a la pregunta (o subpregunta); por cada respuesta incorrecta marcada se obtendrá una penalización que se calcula como $\frac{\text{Puntuación pregunta}}{\text{Número de opciones} - 1}$.
- Consteste a las preguntas en la hoja de examen. Si necesita más espacio utilice una hoja adicional.

Notación:

- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud $[\phi_{ML}(\mathbf{x})]$.
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori $[\phi_{MAP}(\mathbf{x})]$.
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_e: probabilidad de error.
- P_{FA}: probabilidad de falsa alarma.
- P_M: probabilidad de pérdidas.
- P_D: probabilidad de detección.
- curva ROC: curva característica de operación.
- c_{ij}: coste de decidir $D = i$ cuando $H = j$ es la hipótesis correcta.

1. Preguntas tipo test

(10 %) 1. Considere el problema de decisión binaria ($D \in \{0, 1\}$) con observación $X \in \mathbb{R}$ y el decisor dado por

$$x^2 - 4 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0$$

La región de decisión $\mathcal{X}_1$ (correspondiente a $D = 1$) está dada por

A. $(-1/2, 1/2)$.
B. $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$.
C. $(-2, 2)$.
D. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

(10 %) 2. Considere un problema de decisión binario, y sea P_{MAP} la probabilidad de error del decisor MAP. Sea un decisor arbitrario, que llamaremos DEC, de probabilidades de error, falsa alarma y pérdida P_e, P_{FA} y P_{M}, respectivamente. Se puede afirmar que:

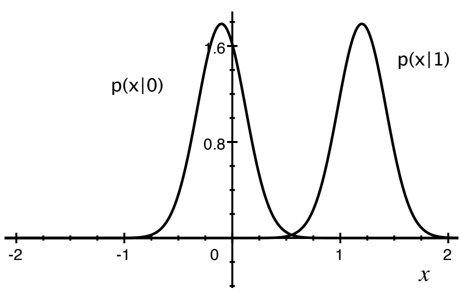
(a) $P_e \geq P_{\text{MAP}}$
◯ Verdadero.
◯ Falso.

(b) Si DEC es ML, $P_{\text{FA}} \leq 0.5$
◯ Verdadero.
◯ Falso.

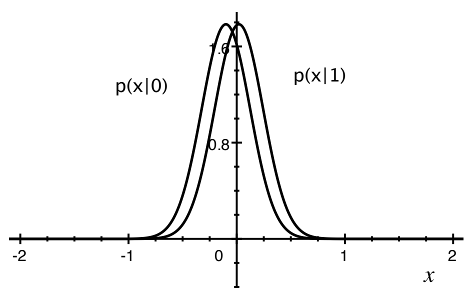
(c) Si DEC es ML, $P_{\text{M}} = P_{\text{FA}}$.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

(d) $P_{\text{MAP}} \leq 0.5$.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

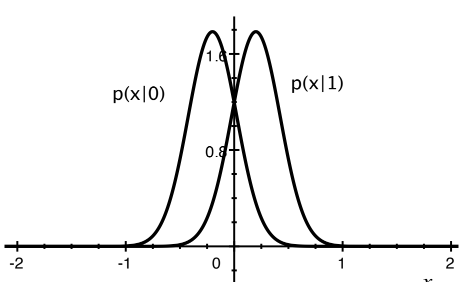
(10 %) 3. Considere los problemas de detección y las curvas ROC representadas en la Figura. Suponga que diseña un test LRT con cada uno de los problemas de detección. Cada uno de estos test LRT se corresponderá con una curva ROC.



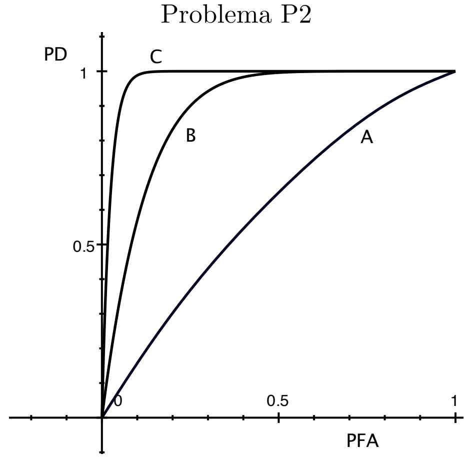
Problema P1



Problema P2



Problema P3



Curvas ROC

Relacione cada curva ROC con el problema de decisión que le corresponde

(a) Problema P1: ◯ A ◯ B ◯ C
(b) Problema P2: ◯ A ◯ B ◯ C
(c) Problema P3: ◯ A ◯ B ◯ C

(10 %) 4. Se desea diseñar un decisor para un problema definido por las siguientes verosimilitudes unidimensionales:

$$p_{X|H}(x|0) \sim G\left(m_0, v_0\right), \qquad p_{X|H}(x|1) \sim G\left(m_1, v_1\right)$$

Se puede afirmar que:

(a) Si $m_0 = m_1$ y $v_0 \neq v_1$, el decisor ML aplica un único umbral sobre x.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

(b) Si $v_0 = v_1$ y $m_0 \neq m_1$, el decisor ML coincide con el decisor LRT Minimax.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

(c) Si $m_0 = m_1 = 0$, el decisor ML puede expresarse en función del valor absoluto de la observación, $|x|$.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

(d) Si $v_0 = v_1$ y $m_0 \neq m_1$, el decisor MAP verifica que $P_e = 2P_{\mathrm{FA}}$.
◯ Verdadero.
◯ Falso.

2. Miniejercicios

(30 %) 5. Considere el problema de decisión binaria dado por las verosimilitudes

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x \qquad\qquad 0 < x < 10$$
$$p_{X|H}(x|0) = \frac{1}{5} \qquad\qquad 0 < x < 5$$

Se sabe que $P_H(1) = \frac{4}{7}$.

(a) Diseñe el decisor de mínima probabilidad de error.
(b) ¿Cuál es la probabilidad de pérdida del decisor?

(30 %) 6. Considere el problema de decisión definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{2}{3}, \quad -1 < x < \frac{1}{2}$$
$$p_{X|H}(x|2) = 1, \quad 0 < x < 1$$
$$p_{X|H}(x|3) = 1 - |x|, \quad |x| < 1$$

(a) Determine el decisor ML.
(b) Obtenga la probabilidad de acierto bajo cada hipótesis, $P\{D = h|H = h\}$, $h = 1, 2, 3$.

Nombre y apellidos: ____________________

Titulación y grupo: ____________________

NIA y Firma: ____________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	20	20	25	25	100
Score:						

Indicaciones:

- El examen consta de 5 ejercicios cuya valoración se indica junto a cada enunciado y en la tabla superior. El primer ejercicio consta de cuatro cuestiones de tipo test con igual puntuación (2.5/100 puntos); cada respuesta errónea acarreará una penalización equivalente a la propia puntuación de la cuestión. La mínima puntuación del ejercicio tipo test es 0.
- Conteste a las preguntas de tipo test en la hoja de examen. Conteste al resto de ejercicios en hojas independientes, ya que cada ejercicio se entregará por separado. Debe escribir su nombre, apellidos y grupo en todas las hojas que entregue.
- Para la resolución del examen no se permite el uso de apuntes, ejercicios resueltos o calculadoras de cualquier tipo. Únicamente se acepta el uso de una hoja manuscrita que ha de entregarse junto con la hoja de examen.
- La duración del examen es de **3 horas**.

Notación:

- $\widehat{S}_{\mathrm{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\mathrm{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.
- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud [$\phi_{\mathrm{ML}}(\mathbf{x})$].
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori [$\phi_{\mathrm{MAP}}(\mathbf{x})$].
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_{e}: probabilidad de error.
- P_{FA}: probabilidad de falsa alarma.
- P_{M}: probabilidad de pérdidas.
- P_{D}: probabilidad de detección.
- Curva ROC: curva característica de operación.

(10 %) 1. Sean $D[n]$ y $X[n]$ dos procesos estocásticos conjuntamente estacionarios, ambos de media nula. Sea $\hat{D}[n]$ el proceso estocástico que resulta de pasar $X[n]$ por un filtro FIR de Wiener de coeficientes $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_{P-1})^T$. Sea $E[n] = D[n] - \mathbf{w}^T X[n]$ el error de estimación. Se puede afirmar que

(a) $\hat{D}[n]$ tiene media nula.

√ **Verdadero.**

○ Falso.

(b) $E[n]$ es (estadísticamente) ortogonal a $D[n]$.

○ Verdadero.

√ **Falso.**

(c) El valor cuadrático medio del error es nulo

○ Verdadero.

√ **Falso.**

(d) Si se aplica el algoritmo LMS para estimar $\mathbf{w}$ a partir de una realización del proceso conjunto $(D[n], X[n])$, cada paso del algoritmo requiere la inversión de una matriz.

○ Verdadero.

√ **Falso.**

(20 %) 2. Se dispone de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$ independientes con distribución de Rayleigh de parámetro b, es decir,

$$p_{X|b}(x|b) = \frac{2}{b} x \exp\left(-\frac{x^2}{b}\right), \qquad x \geq 0$$

siendo $b > 0$.

(a) Determine el estimador ML de b, $\widehat{b}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Si el conjunto de valores observados es $\{-2, 0, 1, -1\}$, ¿cuál sería el valor más verosímil del parámetro b?

(c) Determine el sesgo del estimador.

Solution:

(a) $\widehat{b}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \left(x^{(k)}\right)^2$

(b) $\widehat{b}_{\mathrm{ML}} = 1.5$

(c) Insesgado

(20 %) 3. Considere el problema de decisión binaria dado por la observación $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y verosimilitudes

$$p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|1) = \exp(-x_1 - x_2), \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|0) = 2, \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$$

siendo $P_H(1) = 4/5$.

(a) Determine el decisor ML.

(b) Determine el decisor MAP.

(c) Determine la probabilidad de error del decisor ML.

(d) Represente la probabilidad de falsa alarma del decisor MAP.

Solution:

(a) $x_1 + x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 1$

(b) Decide $D = 0$ si $\ln(2) < x_1 + x_2 < 1$, decide $D = 1$ en caso contrario.

(c) $P_e = (1 - 2e^{-1})/5$

(d) $P_{\text{FA}} = \ln(2)^2$

(25 %) 4. Se dispone de tres variables aleatorias independientes S_1, S_2 y S_3, con idéntica fdp a priori. A partir de una observación de $X = S_1 + S_2 + S_3$ se desea estimar S_1.

(a) Justifique brevemente por qué el estimador de mínimo error cuadrático de S_1 dado x es $\hat{s}_1 = \frac{x}{3}$.

(b) Calcule el sesgo de dicho estimador. ¿Es sesgado o insesgado?

Asumiendo en los apartados siguientes que S_1, S_2 y S_3 tienen una fdp uniforme entre -1 y 1:

(c) Calcule la fdp de X dado s_1.

(d) Calcule la varianza del estimador $\hat{S}_1$.

Solution:

(a) Por la simetría del problema, todas las $\mathbb{E}\{S_i|x\}$ deben ser iguales y sumar x.

(b) 0, insesgado.

(c) $p_{X|S_1}(x|s_1) = 1/2 - |x - s_1|/4$ para $-2 < x < 2$, 0 en otro caso.

(d) 1/9

(25 %) 5. Considere un problema de decisión binaria con hipótesis equiprobables definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X_1|H}(x_1|0) = \begin{cases} 2x_1, & 0 \le x_1 \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X_1|H}(x_1|1) = \begin{cases} 2(1 - x_1), & 0 \le x_1 \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se sabe que los costes de acertar son nulos mientras que los de equivocarse unitarios ($c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = c_{01} = 1$).

(a) Obtenga la familia de decisores LRT de la forma

$$\frac{p_{X_1|H}(x_1|0)}{p_{X_1|H}(x_1|1)} \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$$

y calcule su probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} en función de η.

(b) A partir del resultado anterior obtenga la probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} del decisor bayesiano, así como la probabilidad de pérdida del decisor de Neyman Pearson para una probabilidad de falsa alarma de 0.01.

(c) Se desea mejorar las prestaciones del decisor bayesiano proporcionado por la observación X_1 y para ello se recurre a medir una nueva variable X_2 que tiene, bajo cada hipótesis, la siguiente distribución:

$$p_{X_2|H}(x_2|0) = \begin{cases} 3x_2^2, & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X_2|H}(x_2|1) = \begin{cases} 3(1-x_2)^2, & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtenga la probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} del decisor bayesiano basado en X_2.

(d) Se desea analizar el coste total de llevar a cabo la decisión por cada uno de los esquemas de decisión propuestos. Para ello, se va a medir el coste total de tomar una decisión como el riesgo del decisor (r_{ϕ_i}) más el coste de medir la observación C_{x_i}, es decir,

$$C_{\text{TOTi}} = r_{\phi_i} + C_{\text{x}_\text{i}}.$$

Sabiendo que medir la observación X_1 tiene un coste nulo, mientras que medir X_2 tiene un coste a, indique para que valores de a el esquema de decisión basado sólo en X_1 o el basado sólo en X_2 proporciona un menor coste total.

Solution:

(a) $x_1 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \dfrac{\eta}{1+\eta} = \eta'$

$P_{\text{FA}} = \eta'^2$ y $P_{\text{M}} = (1-\eta')^2$

(b) Dec. Bayesiano: $P_{\text{FA}} = \dfrac{1}{4}$ y $P_{\text{M}} = \dfrac{1}{4}$

Dec. N-P: $P_{\text{FA}} = 0.01$ y $P_{\text{M}} = 0.81$

(c) $x_2 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \dfrac{1}{2}$

$P_{\text{FA}} = \dfrac{1}{8}$ y $P_{\text{M}} = \dfrac{1}{8}$

(d) $C_{\text{TOT1}} = \dfrac{1}{4}$ y $C_{\text{TOT2}} = \dfrac{1}{8} + a$

Si $a < \dfrac{1}{8}$, $C_{\text{TOT2}} < C_{\text{TOT1}}$. Y si $a > \dfrac{1}{8}$, $C_{\text{TOT2}} > C_{\text{TOT1}}$.

PUNTUACIÓN → 20%

a) 8%

b) 4%

c) 8%

$\boxed{\text{CUESTIÓN 2}}$

$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ observ. indep.

$$P_{x|b}(x|b) = \frac{2}{b}\, x \, \exp\left(-\frac{x^2}{b}\right) \qquad x > 0 \qquad b > 0$$

a) $\hat{b}_{ML}$

$$p(\underline{x}|b) = \prod_{k=1}^{K} \frac{2}{b}\, x^{(k)} \exp\left(-\frac{x^{(k)2}}{b}\right)$$

$$\ln p(\underline{x}|b) = K \ln\frac{2}{b} + \sum_{k=1}^{K} \ln x^{(k)} - \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{K} x^{(k)2}$$

$$\hat{b}_{ML} = \arg\max_{b} (\ln) p(\underline{x}|b)$$

$$\left.\frac{\partial \ln p(\underline{x})}{\partial b}\right|_{b=\hat{b}_{ML}} = -K \frac{1}{\hat{b}_{ML}} + \frac{1}{\hat{b}_{ML}^2} \sum_{k=1}^{K} x^{(k)2} = 0$$

$$\boxed{\hat{b}_{ML} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x^{(k)2}}$$

b) $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{4} = \{2, 0, 1, 1\}$

Sustituyendo

$$\hat{b}_{ML} = \frac{1}{4}\left(2^2 + 0 + 1^2 + 1^2\right) = \frac{6}{4} = 1'5$$

c) $$\text{Sesgo}\{\hat{B}_{ML}\} = E\{b - \hat{B}_{ML}\} = b - \cancel{E\{\hat{B}_{ML}\}}^{\,b} = 0$$

INSESGADO

$$E\{\hat{B}_{ML}\} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \cancel{E\{x^{(k)2}\}}^{\,b} = \frac{1}{K}\sum_{K} b = b$$

$$E\{X^{(k)2}\} = \int_0^\infty \frac{2}{b}\, x^3\, e^{-\frac{x^2}{b}}\, dx = \quad (\text{Por partes}) \ldots$$

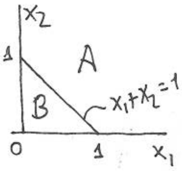
$$u = x^2 \quad du = 2x \quad ; \quad v = e^{-\frac{x^2}{b}} \quad dv = \frac{2x}{b} e^{-\frac{x^2}{b}}$$

$$\ldots = \left[-x^2 e^{-x^2/b}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\, e^{-\frac{x^2}{b}}\, dx = \left[-b\, e^{-\frac{x^2}{b}}\right]_0^\infty$$

$$= 0 + b = b$$

PROBLEMA 3

a



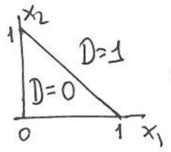
- La región de soporte de $p_{X|H}(x|0)$ es B
- la región de soporte de $p_{X|H}(x|1)$ es $A \cup B$

- Decisor ML en A : $\boxed{D=1}$
- Decisor ML en B : $p_{X|H}(x|1) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} p_{X|H}(x|0) \Leftrightarrow \exp(-x_1-x_2) \underset{0}{\overset{1}{\lessgtr}} 2 \Leftrightarrow$

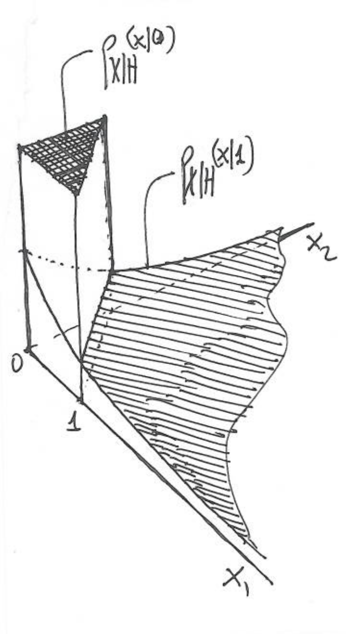
$\Leftrightarrow x_1+x_2 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} -\ln 2$

$\Leftrightarrow \boxed{D=0}$ (puesto que, en B, $x_1+x_2 \geq 0 > -\ln 2$

Decisor ML :



$\Leftrightarrow \boxed{x_1+x_2 \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} 1}$

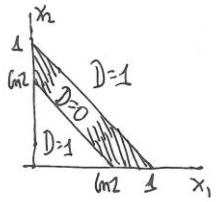


b

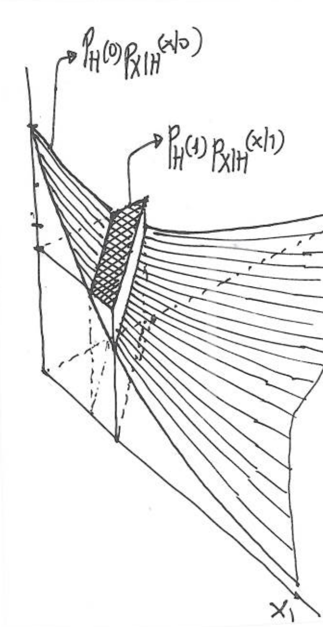
- Decisor MAP en A : $\boxed{D=1}$
- Decisor MAP en B: $p_H(1)\, p_{X|H}(x|1) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} p_H(0)\, p_{X|H}(x|0) \Leftrightarrow \frac{4}{5}\exp(-x_1-x_2) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+x_2 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \ln 2$

Decisor MAP :



$\Leftrightarrow \boxed{D=\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_1+x_2 \leq \ln 2 \\ 0 & \text{si } \ln 2 \leq x_1+x_2 \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x_1+x_2 \end{cases}}$



c La probabilidad de error del decisor ML es

- $P_e = P_H(0) P_M + P_H(1) P_{FA} = \frac{1}{5} P_M + \frac{4}{5} P_{FA}$
- $P_{FA} = \int_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)\,dx = \int_A p_{X|H}(x|0) = 0$
- $P_M = \int_{\mathcal{X}_0} p_{X|H}(x|1)\,dx = \int_B \exp(-x_1-x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_0^1\int_0^{1-x_2} \exp(-x_1-x_2)\,dx_1 dx_2 = 1-2e^{-1}$

$\boxed{P_e = \frac{1}{5}(1-2e^{-1})}$

d

- $\boxed{P_{FA}} = \iint_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)\,dx_1 dx_2 = \iint_{x_1+x_2 \leq \ln 2} 2 \cdot dx_1 dx_2 = 2 \times \frac{1}{2}(\ln 2)\times(\ln 2) = \boxed{(\ln 2)^2}$

4

a) Por simetría, $E[s_1|x] = E[s_2|x] = E[s_3|x]$

Sumando: $E[s_1|x] + E[s_2|x] + E[s_3|x] = E[X|x] = x = 3E[s_1|x]$

$$E[s_1|x] = \boxed{\hat{s}_1 = \frac{x}{3}}$$

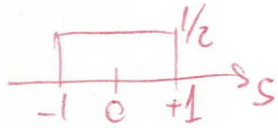
b) Todo estimador MMSE sin restricciones es insesgado.

O también podemos hacer:

$$\boxed{\text{Sesgo}} = E[s_1] - E[\hat{s}_1] = E[s_1] - E\left[\frac{X}{3}\right] = E[s_1] - \frac{E[s_1] + E[s_2] + E[s_3]}{3}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{por simetría}}}{=} E[s_1] - \frac{3E[s_1]}{3} = \boxed{\emptyset} \text{ insesgado.}$$

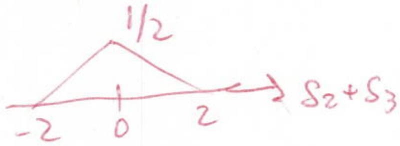
c) $p_{s_1}(s) = p_{s_2}(s) = p_{s_3}(s) = \Pi(s) =$



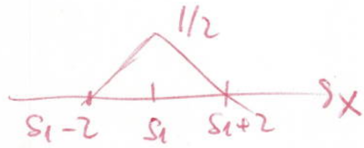
$$p_{s_2+s_3}(s_2+s_3) = p_{s_2}(s_2+s_3) * p_{s_3}(s_2+s_3) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau)\,\Pi(s_2+s_3-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|s_2+s_3| =$$



$$\boxed{p_{X|s_1}(x|s_1) = p_{s_2+s_3}(x-s_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|x-s_1|} =$$

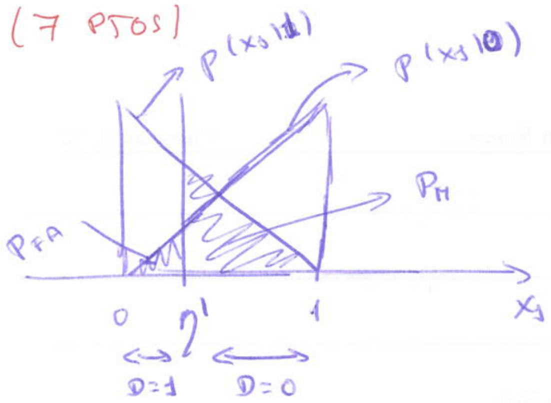


d) $$\boxed{V[\hat{s}_1]} = V\left[\frac{X}{3}\right] = \frac{1}{9}V[s_1+s_2+s_3] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \frac{1}{9}\left(V[s_1] + V[s_2] + V[s_3]\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} \frac{1}{3}V[s_1] = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2\,\Pi(s_1)\,ds_1 = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} s_1^2 \frac{1}{2}\,ds_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Problema 5

a) (7 PTOS)



$p(x_1|0) = 2x_1 \quad 0 < x_1 < 1$

$p(x_1|1) = 2(1-x_1) \quad 0 < x_1 < 1$

$$\frac{2x_1}{2(1-x_1)} \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \eta \qquad 2x_1 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2\eta(1-x_1)$$

$$\cancel{2}x_1 + \cancel{2}\eta x_1 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \cancel{2}\eta$$

$$x_1 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta} = \eta' \quad \text{2 PTOS}$$

$$P_{FA} = P\{D=1 \mid H=0\} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\eta' \cancel{2}\eta' = \eta'^2 \quad \text{2'5 PTOS}$$

$$P_M = P\{D=0 \mid H=1\} = \cancel{\tfrac{1}{2}}(1-\eta')\cancel{2}(1-\eta') = (1-\eta')^2 \quad \text{2'5 PTOS}$$

b) (6 PTOS)

Dec. Bayesiano $\eta = 1 \Rightarrow \eta' = \frac{1}{2}$ 3 PTOS

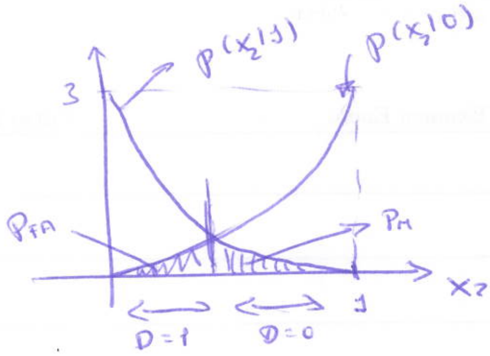
$P_{FA} = \frac{1}{4} \qquad P_M = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Dec. N-P $\quad P_{FA} = 0'01$

$P_{FA} = 0'01 = \eta'^2 \Rightarrow \eta' = 0'1$ 3 PTOS

$P_M = (1-0'1)^2 = 0'9^2 = 0'81$

c) (7 PTOS)



$p(x_2|0) = 3x_2^2 \quad 0 < x_2 < 1$

$p(x_2|1) = 3(1-x_2)^2 \quad 0 < x_2 < 1$

Dec. Bay. (ML)

$$\cancel{3}x_2^2 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \cancel{3}(1-x_2)^2$$

$$\cancel{x_2^2} \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 1 - 2x_2 + \cancel{x_2^2}$$

$$\boxed{x_2 \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \frac{1}{2}}$$ −2 PTOS

$$P_{FA} \underset{\text{(simetría)}}{=} P_M = \int_0^{1/2} 3x_2^2 \, dx_2 = x_2^3 \Big]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$ (2'5 PTOS)

(2'5 PTOS)

(5 PTOS) d) Calculamos los riesgos de cada decisor

CASO GRAL → $r_\phi = c_{00} \Pr\{D=0, H=0\} + c_{11} \Pr\{D=1, H=1\}$

$+ c_{10} \Pr\{D=1, H=0\} + c_{01} \Pr\{D=0, H=1\}$

EN NUESTRO PROBLEMA → $c_{00} = c_{11} = 0 \qquad c_{10} = c_{01} = 1$

$\Pr\{D=1, H=0\} = P_{FA} \; P_H(0)$

$P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$

$\Pr\{D=0, H=1\} = P_M \; P_H(1)$

Luego

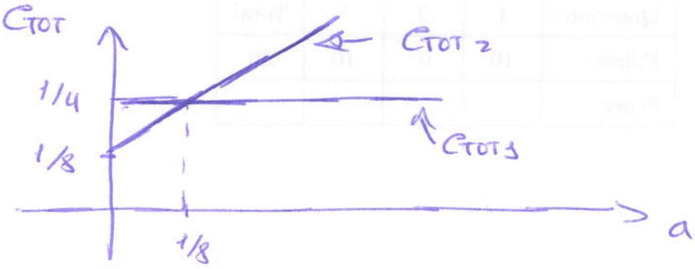
$$r_{\phi_1} = \frac{1}{2} P_{FA1} + \frac{1}{2} P_{M1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$r_{\phi_2} = \frac{1}{2} P_{FA2} + \frac{1}{2} P_{M2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Si añadimos los costes de medir X_1 y X_2 para obtener el coste total

$$C_{TOT1} = r\phi_1 + \cancel{C_{X_1}}^{\,0} = r\phi_1 = \frac{1}{4}$$ 2 PTOS

$$C_{TOT2} = r\phi_2 + \cancel{C_{X_2}}^{\,a} = \frac{1}{8} + a$$ 2 PTOS



Si $a < \frac{1}{8}$ $C_{TOT2} < C_{TOT1}$ 1 PTO.

Si $a > \frac{1}{8}$ $C_{TOT2} > C_{TOT1}$

Nombre y apellidos: ______________________________

Titulación y grupo: ______________________________

NIA y Firma: ______________________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	20	20	25	25	100
Score:						

Indicaciones:

- El examen consta de 5 ejercicios cuya valoración se indica junto a cada enunciado y en la tabla superior. El primer ejercicio consta de cuatro cuestiones de tipo test con igual puntuación (2.5/100 puntos); cada respuesta errónea acarreará una penalización equivalente a la propia puntuación de la cuestión. La mínima puntuación del ejercicio tipo test es 0.
- Conteste a las preguntas de tipo test en la hoja de examen. Conteste al resto de ejercicios en hojas independientes, ya que cada ejercicio se entregará por separado. Debe escribir su nombre, apellidos y grupo en todas las hojas que entregue.
- Para la resolución del examen no se permite el uso de apuntes, ejercicios resueltos o calculadoras de cualquier tipo. Únicamente se acepta el uso de una hoja manuscrita que ha de entregarse junto con la hoja de examen.
- La duración del examen es de **3 horas y 15 minutos**.

Notación:

- $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\widehat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\widehat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\widehat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.
- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud [$\phi_{\text{ML}}(\mathbf{x})$].
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori [$\phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$].
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_{e}: probabilidad de error.
- P_{FA}: probabilidad de falsa alarma.
- P_{M}: probabilidad de pérdidas.
- P_{D}: probabilidad de detección.
- Curva ROC: curva característica de operación.

(10 %) 1. Sean $D[n]$ y $X[n]$ dos procesos estocásticos conjuntamente estacionarios, ambos de media nula. Se desea estimar $D[n]$ a la vista de $X[n]$. Sea $\hat{D}[n]$ el proceso estocástico que resulta de pasar $X[n]$ por un filtro FIR de Wiener de coeficientes $\mathbf{w} = [w_0, \ldots, w_{P-1}]^T$. Sea $E[n] = D[n] - \hat{D}[n]$ el error de estimación. Se puede afirmar que

(a) $E[n]$ es (estadísticamente) ortogonal a $X[n]$.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(b) Si $D[n]$ es independiente de $X[m]$ para todo n y para todo m, entonces $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(c) El error cuadrático medio no puede aumentar al aumentar el orden del filtro, P.

√ **Verdadero.**

◯ Falso.

(d) Para aplicar el algoritmo LMS con objeto de estimar $\mathbf{w}$ a partir de una realización del proceso conjunto $(D[n], X[n])$, es necesario conocer la matriz de autocorrelación de $X[n]$.

◯ Verdadero.

√ **Falso.**

(20 %) 2. Dos variables aleatorias Gaussianas independientes Z_1 y Z_2 tienen medias 2 y 1, respectivamente. Ambas tienen varianza unidad. Estamos interesados en su diferencia $S = Z_1 - Z_2$.

(a) Calcule $p_S(s)$, el estimador MMSE de S y el error cuadrático medio de dicho estimador, si no se dispone de ningún dato adicional.

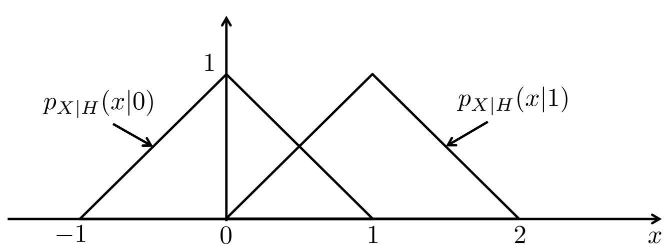
(b) A continuación se observa $X = Z_1 + Z_2 = 3$. Calcule $p_{S|X}(s|x)$, el estimador MMSE de S a la vista de X y el error cuadrático medio de dicho estimador. Interprete el resultado obtenido en relación con el apartado anterior.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = 1$, con varianza 2.

(b) X es independiente de S, por lo que la respuesta es la misma que en a).

(20 %) 3. Se tiene un problema de decisión binaria definido por las verosimilitudes representadas en la siguiente figura:



(a) Obtenga una expresión para las regiones de decisión de un decisor LRT genérico.

(b) Obtenga las probabilidades de falsa alarma y de pérdida y represente la curva ROC.

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta} = u.$

(b) $P_{\text{FA}} = \frac{1}{2}(1-u)^2$, $P_{\text{D}} = \frac{1}{2}u^2$

(25 %) 4. Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = 24xs, \quad 0 \leq s \leq 1-x,\ 0 < x < 1$$

(a) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.
(b) Calcule el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.
(c) Calcule el estimador MAD de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAD}}$.
(d) El estimador de la forma $\hat{S}_{\text{CUAD}} = wX^2$ de mínimo error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{2}{3}(1-X).$

(b) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1 - X$.

(c) $\hat{S}_{\text{MAD}} = \dfrac{1-X}{\sqrt{2}}.$

(d) $w = 0.8$

(25 %) 5. Considere el problema de decisión binaria dado por hipótesis equiprobables y verosimilitudes

$$p_{x|H}(x|1) = x\exp(-x), \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

$$p_{x|H}(x|0) = \exp(-x), \qquad x \geq 0 \tag{2}$$

(a) Determine, en función de η, las regiones de decisión del decisor LRT de parámetro η.
(b) Determine, en función de η, las probabilidades de falsa alarma y de pérdida del decisor LRT.
(c) Determine la probabilidad de detección del detector de Neyman Pearson dado por $P_{\text{FA}} \leq e^{-1}$.
(d) Determine la probabilidad de error condicionada a la observación, $P\{D \neq H|x\}$, del decisor LRT de parámetro η

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$

(b) $P_{\text{FA}} = e^{-\eta}$, $P_{\text{FA}} = 1 - (1+\eta)e^{-\eta}$

(c) $P_{\text{D}} = 2e^{-1}$

(d) $P\{D \neq H|x\} = \left[\begin{array}{ll} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x < \eta \\ \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > \eta \end{array} \right.$

$\boxed{Q2}$

a) Como z_1 y z_2 son v.a. Gauss, S debe ser Gauss

$$E[S] = E[z_1 - z_2] = 2 - 1 = 1$$
$$V[S] = V[z_1] + V[z_2] = 1 + 1 = 2$$

Por tanto $S \sim G(1, 2)$

$$\hat{S}_{MMSE} = E[S] = 1$$
$$MSE = E[(\hat{S}_{MMSE} - S)^2] = E[(1-S)^2] = 2$$

b) Se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \sim G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

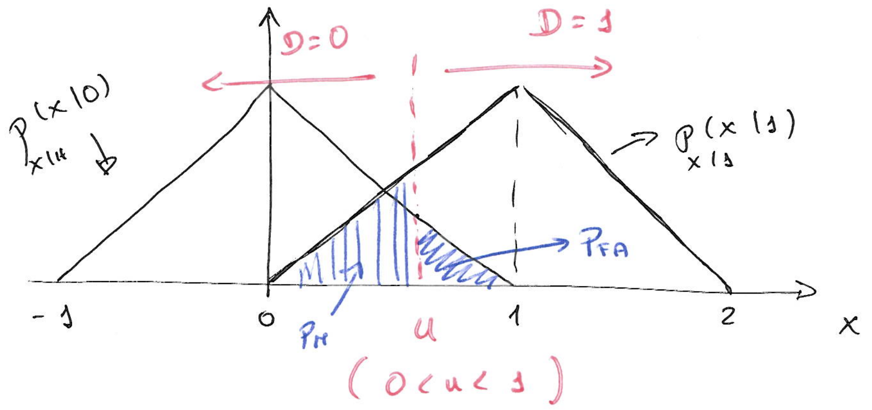
por tanto

$$\begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} \sim G\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \right)$$

Dado que X es independiente de S, no aporta información nueva.

$$\hat{S}_{MMSE}(X) = E[S|X] = E[S] = 1$$
$$MSE_{\text{Dado } x} = MSE = 2$$

PROBLEMA 3



a) El decisor LRT va a ser un dec. de umbral cuando $0 < x < 1$

10/10

5 PTOS
$0 < x < -1 \rightarrow$ siempre $D=0$

$1 < x < 2 \rightarrow$ siempre $D=1$

5 PTOS
$0 < x < 1$

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} u$$

ANALÍTICAMENTE $(0<x<1)$

$$\frac{p(x|1)}{p(x|0)} = \frac{x}{1-x} \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \eta$$

$$x \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \eta - x\eta \qquad \boxed{x \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \frac{\eta}{1+\eta} = u}$$

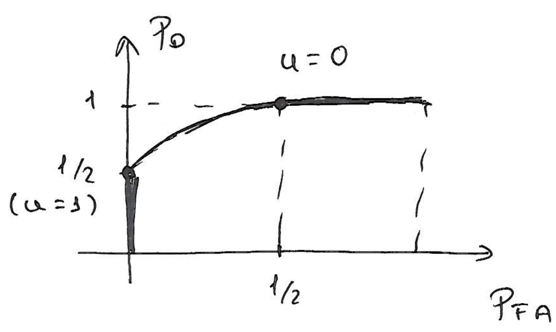
b) Podemos calcular P_{FA} y P_M gráficamente

5 PTOS

$$P_{FA} = \frac{1}{2}(1-u)^2 \qquad 0<u<1$$

$$P_M = \frac{1}{2}u^2 \qquad 0<u<1$$

ROC
5 PTOS



$$P_D = 1 - P_M = 1 - \frac{1}{2}u^2$$

PROBLEMA 4

$$p_{sx}(x,s) = 24xs \qquad 0 < s < 1-x \; ; \; 0 < x < 1$$

a) Calculamos $p_{s|x}(s|x)$

$$p_x(x) = \int_0^{1-x} 24xs \, ds = 24x \left[\frac{1}{2} s^2\right]_0^{1-x} =$$

$$= 24 x \frac{1}{2} (1-x)^2 = 12 x (1-x)^2 \qquad 0 < x < 1$$

$p_{s|x}(s|x)$ 3 PTOS

$$p_{s|x}(s|x) = \frac{p_{s,x}(s,x)}{p_x(x)} = \frac{24 \cancel{x} s}{12 \cancel{x} (1-x)^2} = \frac{2s}{(1-x)^2}$$

$$0 < s < 1-x$$
$$(0 < x < 1)$$

$$\hat{s}_{MSE} = E\{S|x\} = \int s \, p(s|x) \, ds =$$

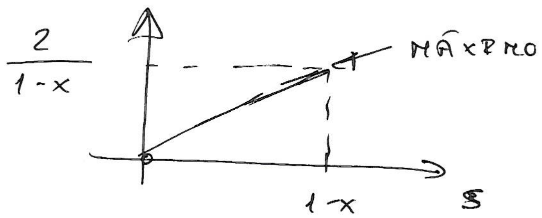
5 PTOS

$$= \frac{2}{(1-x)^2} \int_0^{1-x} s^2 \, ds = \frac{2}{(1-x)^2} \frac{1}{3} s^3 \Big]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(1-x)^{\cancel{3}}}{\cancel{(1-x)^2}} = \boxed{\frac{2}{3}(1-x)}$$

b) $\hat{s}_{MAP} = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \; p_{s|x}(s|x)$

5 PTOS



$$\boxed{\hat{s}_{MAP} = 1-x}$$

c) $\hat{s}_{MAD} = \text{mediana}\{S|x\} \Rightarrow F_{s|x}(\hat{s}_{MAD}) = \frac{1}{2}$

$$F_{s|x}(s) = \int_{-\infty}^{s} p_{s|x}(s|x) \, ds = \int_0^s \frac{2s}{(1-x)^2} \, ds =$$

5 PTOS

$$= \frac{1}{(1-x)^2} s^2 \Big]_0^s = \frac{s^2}{(1-x)^2}$$

$$F_{s|x}(\hat{s}_{MAD}) = \frac{\hat{s}_{MAD}^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{s}_{MAD} = \frac{1-x}{\sqrt{2}}}$$

d) $\hat{s}_c = w\, x^2$ 7 PTOS

$$\hat{s}_c = \underset{w}{\operatorname{argmin}}\; E\{(s-\hat{s})^2\}\Big|_{\hat{s}=wx^2}$$

$$E\{(s-\hat{s})^2\}\Big|_{\hat{s}=wx^2} = \iint (s - wx^2)^2\; p(s,x)\, ds\, dx$$

$$\frac{\partial}{\partial w} E\{(s-\hat{s})^2\} = \iint \frac{\partial (s-wx^2)^2}{\partial w}\; p(s,x)\, ds\, dx =$$

$$= \iint 2(s - wx^2)(-x^2)\; p(s,x)\, ds\, dx = 0$$

$$\iint (s - wx^2)\, x^2\; p(s,x)\, ds\, dx = 0$$

Calculamos la integral

$$\int_0^1\int_0^{1-x} (s^2x^3 - w x^5 s)\, ds\, dx = \int_0^1 \left[\frac{s^3}{3}x^3 - w x^5 \frac{s^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 x^3 - \frac{1}{2} w x^5 (1-x)^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(-x^3+3x^2-3x+1)x^3 - \frac{1}{2} w x^5 (1-2x+x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}\left(-x^6+3x^5-3x^4+x^3\right) - \frac{1}{2} w \left(x^5 - 2x^6 + x^7\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 - \frac{1}{2} w \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{7} + \frac{3}{6} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} w \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 0'0024 - 0'0030\, w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0'8}$$

Problema 5

a) Decisor LRT:

$$p_{X|H}(x|1) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \eta\, p_{X|H}(x|0) \iff x \cancel{\exp(-x)} \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \eta \cancel{\exp(-x)} \iff$$

$$\iff \boxed{x \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \eta}$$

b) $$\boxed{P_{FA}} = \int_{\mathcal{X}_1} p_{X|H}(x|0)\,dx = \int_\eta^\infty \exp(-x)\,dx = \boxed{e^{-\eta}}$$

$$\boxed{P_M} = \int_{\mathcal{X}_0} p_{X|H}(x|1)\,dx = \int_0^\eta x\exp(-x)\,dx = \boxed{1-(1+\eta)e^{-\eta}}$$

c) $$P_{FA} = e^{-1} \iff e^{-\eta} = e^{-1} \iff \eta = 1 \iff \boxed{\begin{array}{c}\text{Decisor NP}\\ x \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} 1\end{array}} \Rightarrow \boxed{P_D} = 1 - P_M = \boxed{2e^{-1}}$$

d) $$P\{D \neq H|x\} = \begin{bmatrix} P\{H=1|x\} & \text{si } x<\eta \\ P\{H=0|x\} & \text{si } x>\eta \end{bmatrix}$$

$$P\{H=1|x\} = \frac{p_{X|H}(x|1)P}{p_{X|H}(x|0)(1-P) + p_{X|H}(x|1)P} = \frac{Px}{(1-P)+Px} \overset{P=1/2}{=} \frac{x}{1+x}$$

$$P\{H=0|x\} = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\{D \neq H|x\} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x<\eta \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x>\eta \end{bmatrix}}$$