

Exámenes curso 2012/2013

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jerónimo Arenas García, Jesús Cid Sueiro, Vanessa Gómez Verdejo, Miguel Lázaro Gredilla



Nombre y apellidos: _____

Titulación y grupo: _____

NIA y firma: _____

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	10	10	10	10	30	30	100
Score:							

Indicaciones:

- El examen consta de una primera parte que consiste en varias cuestiones de tipo test, y de una segunda parte con ejercicios cortos. Ambas partes reciben la misma valoración. Algunas preguntas se dividen en varias subpreguntas, en cuyo caso la puntuación se distribuye uniformemente entre ellas.
- Cada pregunta o subpregunta de tipo test únicamente tiene una respuesta correcta; sin embargo, los alumnos pueden marcar tantas respuestas como consideren oportuno. Si se marca la respuesta correcta se obtiene la puntuación asociada a la pregunta (o subpregunta); por cada respuesta incorrecta marcada se obtendrá una penalización que se calcula como $\frac{\text{Puntuación pregunta}}{\text{Número de opciones} - 1}$.
- Conteste a las preguntas en la hoja de examen. Si necesita más espacio utilice una hoja adicional.

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MMSE}}$ Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$ Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$ Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$ Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$ Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. Preguntas tipo test

(10 %) 1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) El estimador MMSE de una variable aleatoria S a partir de otra variable $X = S + N$, con S y N gaussianas e independientes de media nula, tiende a $\hat{S} = X$ cuando $\text{Var}(S) \gg \text{Var}(N)$.
☒ Verdadero.
☐ Falso.
- (b) El estimador MMSE de una variable aleatoria S a partir de otra variable $X = S + N$, con S y N gaussianas e independientes de media nula, tiende a $\hat{S} = \mathbb{E}\{S\}$ cuando $\text{Var}(S) = \text{Var}(N)$.
☐ Verdadero.
☒ Falso.

- (c) El estimador que minimiza $\mathbb{E}\{(S - \hat{S})^4\}$ es equivalente al que minimiza, para cada x , $\mathbb{E}\{(S - \hat{S})^4|X = x\}$

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (d) Sea $\hat{S}_{\text{BAYES}}$ el estimador bayesiano asociado a la función de coste $c(S, \hat{S})$, se puede asegurar que no existe otro estimador diferente de $\hat{S}_{\text{BAYES}}$ que obtenga un menor coste medio $\mathbb{E}\{c(S, \hat{S})\}$.

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (10 %) 2. En un problema de estimación analítica, se sabe que $p_{S|X}(s|x)$ es simétrica respecto a su media, $m_{S|X}$ (esto es, $p_{S|X}(m_{S|X} + s|x) = p_{S|X}(m_{S|X} - s|x)$, para todo s y para todo x). Pueden obtenerse estimadores MMSE, MAP, MAD y ML como sigue:

- (a) $\hat{s}_{\text{MMSE}} = m_{S|X}$

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (b) $\hat{s}_{\text{MAP}} = m_{S|X}$

☐ Verdadero.

✓ **Falso.**

- (c) $\hat{s}_{\text{MAD}} = m_{S|X}$

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (d) $\hat{s}_{\text{ML}} = m_{S|X}$

☐ Verdadero.

✓ **Falso.**

- (10 %) 3. Indíquese cuáles de las afirmaciones siguientes referentes al estimador muestral de la media de una v.a., $\hat{M} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X^{(k)}$, son ciertas y cuáles falsas:

- (a) $\hat{M}$ es siempre el estimador ML de la media, independientemente de la distribución de X .

☐ Verdadero.

✓ **Falso.**

- (b) $\hat{M}$ es el estimador ML de la media si las observaciones son gaussianas y tomadas de manera independiente.

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (c) El sesgo de $\hat{M}$ depende de la distribución de X .

☐ Verdadero.

✓ **Falso.**

- (d) $\hat{M}$ es un estimador consistente en varianza.

✓ **Verdadero.**

☐ Falso.

- (10 %) 4. Se ha calculado el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de la variable aleatoria S a la vista de X según $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + wX$. Se puede afirmar que el sesgo de dicho estimador es:

✓ **$\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{LMSE}}\} = 0$**

☐ **$\mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{LMSE}}\} = S - \mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{LMSE}}\}$**

☐ **$\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{LMSE}}\} = w_0$**

☐ **$\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{LMSE}}\} = w_0 + w\mathbb{E}\{X\}$**

2. Miniejercicios

(30 %) 5. Suponiendo que

$$p_{S,X}(s, x) = \frac{5}{4} - sx, \quad s \in [0, 1], x \in [0, 1] \quad (1)$$

determine el estimador MMSE de s a la vista de x .

Solution: $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{15-8x}{30-12x}$

(30 %) 6. Considérese la estimación de una variable aleatoria S a partir de otra X , estando ambas caracterizadas por la siguiente densidad de probabilidad conjunta:

$$p_{S,X}(s, x) = 2, \quad 0 \leq s \leq x; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Calcule el valor de w que minimiza el error cuadrático medio (MSE) de un estimador con forma analítica $\hat{S}_c = wX^c$, donde c es una constante real estrictamente positiva.
- (b) Calcule el sesgo del estimador obtenido en función del valor del exponente c . ¿Para qué valor de c se obtiene un estimador $\hat{S}_c$ insesgado?

Solution:

(a) $w^* = \frac{c+1}{c+3}$.

(b) Para $c = 1$.

Nombre y apellidos: _____

Titulación y grupo: _____

NIA y firma: _____

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	10	10	10	10	30	30	100
Score:							

Indicaciones:

- El examen consta de una primera parte que consiste en 4 cuestiones de tipo test, y de una segunda parte con dos ejercicios cortos. Algunas preguntas se dividen en varias subpreguntas, en cuyo caso la puntuación se distribuye uniformemente entre ellas.
- Cada pregunta o subpregunta de tipo test únicamente tiene una respuesta correcta; sin embargo, los alumnos pueden marcar tantas respuestas como consideren oportuno. Si se marca la respuesta correcta se obtiene la puntuación asociada a la pregunta (o subpregunta); por cada respuesta incorrecta marcada se obtendrá una penalización que se calcula como $\frac{\text{Puntuación pregunta}}{\text{Número de opciones} - 1}$.
- Constate a las preguntas en la hoja de examen. Si necesita más espacio utilice una hoja adicional.

Notación:

- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud $[\phi_{ML}(\mathbf{x})]$.
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori $[\phi_{MAP}(\mathbf{x})]$.
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_e : probabilidad de error.
- P_{FA} : probabilidad de falsa alarma.
- P_M : probabilidad de pérdidas.
- P_D : probabilidad de detección.
- curva ROC: curva característica de operación.
- c_{ij} : coste de decidir $D = i$ cuando $H = j$ es la hipótesis correcta.

1. Preguntas tipo test

- (10%) 1. Considere el decisor bayesiano para M alternativas y M hipótesis, en el que todas las verosimilitudes son idénticas, es decir, $p_{X|H}(x|0) = p_{X|H}(x|1) = \dots = p_{X|H}(x|M-1)$, para todo x , mientras que $P_H(0) > P_H(1) > \dots > P_H(M-1)$. Sea el decisor $D = \phi(X) \in \{0, \dots, M-1\}$ de probabilidad de error P_e .

(a) Si ϕ es un decisor MAP, entonces $P_e = 1 - P_H(0)$.

☒ Verdadero.

☐ Falso.

- (b) Si $\phi(x) = 0$, para todo x , el decisor es MAP.
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.
- (c) Si ϕ es un decisor MAP, entonces $P_e = \min_h P_H(h)$.
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.

(10 %) 2. Para un decisor binario MAP, se puede afirmar que:

- (a) Coincide con el decisor bayesiano óptimo para costes $c_{10} = c_{01} = 1, c_{00} = c_{11} = 0$.
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.
- (b) Minimiza la probabilidad de error.
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.
- (c) Minimiza la probabilidad de falsa alarma.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (d) Verifica que $P_M = P_{FA}$.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**

(10 %) 3. Señale la afirmación FALSA:

- A. En un problema de decisión binario unidimensional, el detector Neyman-Pearson siempre es un test de umbral sobre la observación.**
- B. El detector Neyman-Pearson puede coincidir con el detector Minimax.
- C. El detector Minimax puede coincidir con el MAP.
- D. El decisor trivial $\phi(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x}$ tiene una probabilidad de falsa alarma nula.

(10 %) 4. Se diseña un decisor ML para un caso de decisión binario con verosimilitudes gaussianas:

$$p_{\mathbf{x}|H}(\mathbf{x}|0) = G\left(\mathbf{m}_0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad p_{\mathbf{x}|H}(\mathbf{x}|1) = G\left(\mathbf{m}_1, \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}\right)$$

con $v > 0$. Puede afirmarse que:

- (a) El decisor ML coincide con el Bayesiano óptimo para cualesquiera $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1$ y v , con independencia de la política de costes y de las probabilidades a priori de las hipótesis.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (b) Para cualquier valor de v el decisor ML siempre decidirá en favor de la hipótesis $H = 0$ en $\mathbf{x} = \mathbf{m}_0$.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (c) Se puede asegurar que, con independencia del valor de v , el decisor es lineal si $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_1$.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (d) Si $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_1$ y $v \neq 1$, la frontera de decisión será una circunferencia.
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.

2. Miniejercicios

(30 %) 5. Considere el problema de decisión binaria dado por las verosimilitudes

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|1) &= \frac{1}{4} & |x| < 2 \\ p_{X|H}(x|0) &= \frac{3}{4}(1-x^2) & |x| < 1 \end{aligned}$$

Determine:

- (a) El decisor ML.
- (b) La probabilidad de pérdida del decisor anterior.

Solution:

$$(a) \quad \begin{array}{c} D = 1 \\ |x| \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \\ D = 0 \end{array}$$

$$(b) \quad P_M = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(30 %) 6. A partir de cierto test clínico basado en la variable x , que proporciona cierta evidencia acerca del estado de salud ($H = 0$) o enfermedad ($H = 1$) de un paciente, un médico debe decidir si enviar a éste a casa ($D = 0$) o al hospital ($D = 1$). El médico sabe que las verosimilitudes de las dos hipótesis son

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{x^2}{2} \exp(-x), \quad x > 0 \quad (1)$$

$$p_{X|H}(x|0) = \exp(-x), \quad x > 0 \quad (2)$$

El médico también sabe que, a priori, la probabilidad de que un paciente que acude a consultarle esté enfermo es de $P_H(1) = 1/33$.

- (a) Determine la decisión de mínima probabilidad de error basada en x .
- (b) Determine el decisor de Neyman-Pearson con $P_{FA} < e^{-3}$, basado en x .

Solution:

$$(a) \quad \begin{array}{c} D = 1 \\ x \geq 8 \\ D = 0 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{c} D = 1 \\ x \geq 3 \\ D = 0 \end{array}$$

Nombre y apellidos: _____

Titulación y grupo: _____

NIA y Firma: _____

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	20	20	25	25	100
Score:						

Respuestas Ejercicio 1: (a) _____; (b) _____; (c) _____; (d) _____;

Indicaciones:

- El examen consta de 5 ejercicios cuya valoración se indica junto a cada enunciado y en la tabla superior. El primer ejercicio consta de cuatro cuestiones de tipo test con igual puntuación (2.5/100 puntos); cada respuesta errónea acarreará una penalización equivalente a la propia puntuación de la cuestión. La mínima puntuación del ejercicio tipo test es 0.
- Conteste a las preguntas de tipo test en la hoja de examen. Conteste al resto de ejercicios en hojas independientes, ya que cada ejercicio se entregará por separado. Debe escribir su nombre, apellidos y grupo en todas las hojas que entregue.
- Para la resolución del examen no se permite el uso de apuntes, ejercicios resueltos o calculadoras de cualquier tipo. Únicamente se acepta el uso de una hoja manuscrita.
- La duración del examen es de **3 horas**.

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.
- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud $[\phi_{\text{ML}}(\mathbf{x})]$.
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori $[\phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})]$.
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_e : probabilidad de error.
- P_{FA} : probabilidad de falsa alarma.
- P_{M} : probabilidad de pérdidas.
- P_{D} : probabilidad de detección.
- Curva ROC: curva característica de operación.

- (10 %) 1. Se desea utilizar un filtro lineal de longitud P para predecir valores futuros de un proceso estocástico estacionario $X[n]$ de media nula. Para ello se obtiene la estimación de $X[n+1]$ como combinación lineal de los P valores previos de la serie temporal, i.e., $\hat{X}[n+1] = \mathbf{w}^T \mathbf{X}[n]$, con $\mathbf{X}[n] = [X[n], X[n-1], \dots, X[n-P+1]]^T$. El error del filtro se define como $E[n] = X[n] - \hat{X}[n]$.
- (a) Para cualesquiera pesos que utilice el filtro, el error de estimación es siempre estadísticamente ortogonal al vector de entradas, i.e., $\mathbb{E}\{E[n]\mathbf{X}[n]\} = \mathbf{0}$.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (b) El error cuadrático medio del filtro de Wiener no aumenta a medida que crece el valor de P .
☒ **Verdadero.**
☐ Falso.
- (c) Si el vector de pesos se actualiza utilizando el algoritmo LMS, el error cuadrático medio del filtro tiende a 0 conforme $n \rightarrow \infty$.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**
- (d) La actualización de los coeficientes según la regla LMS requiere una inversión matricial en cada paso.
☐ Verdadero.
☒ **Falso.**

- (20 %) 2. Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s, x) = \frac{1}{3}(x + s) \quad 0 < x < 2, \quad 0 < s < 1.$$

- (a) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.
 (b) Calcule el error cuadrático medio del estimador.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{LMMSE}} = \frac{14}{23} - \frac{1}{23}x.$

(b) $\mathbb{E} \left\{ \left(S - \hat{S}_{\text{LMMSE}} \right)^2 \right\} = \frac{11}{138}$

- (20 %) 3. Considere el problema de decisión binaria dado por la observación $X \in [0, 2]$ y verosimilitudes

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{1}{2}x$$

$$p_{X|H}(x|0) = \frac{3}{4}x(2-x)^2,$$

siendo $P_H(1) = \frac{2}{5}$.

- (a) Determine el decisor MAP.
 (b) Determine la probabilidad de pérdida del decisor MAP.
 (c) Suponga ahora que el mismo decisor que se ha obtenido en el apartado (a) se aplica a un escenario en el que la verosimilitud de $H = 1$ es

$$p'_{X|H}(x|1) = \frac{7}{8}p_{X|H}(x|1) + \frac{1}{16},$$

mientras que la verosimilitud de $H = 0$ sigue siendo la misma. Determine el incremento en la probabilidad de error que se produce como consecuencia de este cambio de escenario.

Solution:

$$(a) \begin{matrix} D = 1 \\ x \geq \frac{4}{3} \\ D = 0 \end{matrix}$$

$$(b) P_M = \frac{4}{9}$$

(c) Dado que la P_{FA} no cambia y $P'_M = \frac{17}{36}$, el incremento de la probabilidad de error es

$$P_H(1)(P'_M - P_M) = \frac{1}{90}$$

- (25 %) 4. El encargado de una empresa informática desea analizar la productividad de sus empleados mediante la estimación del tiempo, S , que les lleva desarrollar cierto programa informático. Para ello, a las 12:00 a.m. el encargado solicita a sus empleados la realización de este programa. Los empleados en vez de ponerse directamente a desarrollar el programa solicitado, deciden finalizar la tarea que estén llevando a cabo en ese momento, lo que les lleva un tiempo adicional N . Como consecuencia de este procedimiento, el tiempo total que transcurre desde que el encargado ordena la implementación del programa hasta que recibe la notificación del empleando indicando que ya está implementado es $X = S + N$.

Se sabe que el tiempo N que requieren los empleados para acabar las tareas que están realizando y empezar la implementación del programa solicitado puede modelarse mediante la siguiente distribución exponencial:

$$p_N(n) = a \exp(-an) \quad n > 0,$$

y el tiempo que tardan en desarrollar el programa, S , también puede modelarse exponencialmente, aunque en este caso mediante la expresión:

$$p_S(s) = b \exp(-b(s - c)) \quad s > c.$$

- (a) Antes de aplicar este proceso de análisis de productividad sobre los empleados, se ha simulado sobre un grupo de control, midiendo directamente sobre este grupo los tiempos que han tardado en acabar las tareas que están realizando y los tiempos que han tardado en desarrollar el programa informático. Como consecuencia se tienen los siguientes conjuntos de observaciones independientes: 6, 10, 12 y 20 minutos para el tiempo N y 6, 12, 18 y 36 minutos para el tiempo S . Estime por máxima verosimilitud los valores de las constantes a , b y c .

Considere de ahora en adelante que $a = 10$ minutos, $b = 10$ minutos y $c = 5$ minutos.

- (b) Si cuando se pone en marcha el proceso de análisis de productividad, el encargado recibe la notificación de finalización del programa de tres empleados diferentes a las 12:25, a las 12:30 y a las 12:40 a.m., estime por máxima verosimilitud el tiempo que ha tardado cada uno de estos empleados en realizar el programa.
- (c) ¿Qué tiempo estimaríamos que ha tardado cada uno de estos empleados si utilizásemos un estimador de mínimo error cuadrático medio?

Solution:

(a) $\hat{a}_{ML} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K n^{(k)} = 12$ minutos;

$$\hat{c}_{ML} = \min_k \{s^{(k)}\} = 6 \text{ minutos};$$

$$\hat{b}_{ML} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (s^{(k)} - \hat{c}_{ML}) = 12 \text{ minutos}.$$

(b) $\hat{s}_{ML} = x$. $\hat{s}_{ML}(x = 25) = 25$, $\hat{s}_{ML}(x = 30) = 30$, $\hat{s}_{ML}(x = 40) = 40$.

(c) $\hat{s}_{MMSE} = \frac{x+5}{2}$. $\hat{s}_{MMSE}(x = 25) = 15$, $\hat{s}_{MMSE}(x = 30) = 17.5$, $\hat{s}_{MMSE}(x = 40) = 22.5$.

- (25 %) 5. Se toma una medida de la tensión instantánea x existente en un momento dado en un nodo de un circuito. Bajo la hipótesis nula $H = 0$, en dicho nodo sólo existe ruido gaussiano de media nula y varianza v . Bajo la hipótesis $H = 1$ en dicho nodo existe únicamente una señal sinusoidal de media nula y amplitud $\sqrt{v}$. Dado que se desconoce la frecuencia de la señal sinusoidal y el instante en el que se toma la medida, se tiene que bajo $H = 1$ se mide $x = \sqrt{v} \cos \phi$, con ϕ una v.a. uniforme entre 0 y 2π .

- (a) Calcule las verosimilitudes de ambas hipótesis.
- (b) Calcule el decisor de máxima verosimilitud para discernir entre ellas.
- (c) Use la función $h(a) = a - \log(1 - a)$ para expresar el decisor anterior y calcule las regiones de decisión en función de v y $h^{-1}(\cdot)$.

(d) Calcule la probabilidad de falsa alarma usando dicho decisor en función de $h^{-1}(\cdot)$ y $Q(z)$.

Ayudas:

$$\frac{d \cos u}{du} = -\sin u \quad \frac{d \arccos u}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \frac{d \sin u}{du} = \cos u \quad \frac{d \arcsin u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

Suponga conocida la función $Q(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Suponga conocida la función $a = h^{-1}(\cdot)$ (función recíproca de $h(\cdot)$).

Solution:

(a) $p(x|h=0) = G(x|0, v), p(x|h=1) = \frac{1}{\pi\sqrt{v-x^2}} \quad \forall x \in [-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$

(b)
$$\begin{array}{l} D = 1 \\ h(\frac{x^2}{v}) \geq \log \frac{\pi}{2} \text{ si } x^2 < v, D = 0 \text{ en otro caso.} \\ D = 0 \end{array}$$

(c) $h^{-1}(\log \frac{\pi}{2}) = \frac{x^2}{v} = 0.2126 \approx 0.21 \Rightarrow$
 $D_0 : -\infty < x < -\sqrt{v} \cup -\sqrt{0.21v} < x < +\sqrt{0.21v} \cup +\sqrt{v} < x < +\infty$
 $D_1 : -\sqrt{v} < x < -\sqrt{0.21v} \cup +\sqrt{0.21v} < x < +\sqrt{v}$

(d) $P_{FA} = 2(Q(1) - Q(\sqrt{0.21}))$

Q2

$$p(s, x) = \frac{1}{3} (x+s) \quad 0 < x < 2 \quad 0 < s < 1$$

a) $\hat{S}_{LHS} = \omega_0 + \omega_3 x$

$$\omega_0 = E\{S\} \cdot \omega_3 E\{X\}$$

$$\omega_3 = \frac{\sigma_{SX}}{\sigma_X} = \frac{E\{SX\} - E\{S\}E\{X\}}{E\{X^2\} - E\{X\}^2}$$

$$p(s) = \int_0^2 \frac{1}{3} (x+s) dx = \frac{1}{3} \left[xs + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3} (1+s) \quad 0 < s < 1$$

$$p(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} (x+s) ds = \frac{1}{3} \left[xs + \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x \right) \quad 0 < x < 2$$

$$E\{S\} = \int_0^1 s \cdot \frac{2}{3} (1+s) ds = \frac{2}{3} \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3+2}{6} = \frac{5}{9}$$

$$E\{X\} = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{11}{9}$$

$$E\{X^2\} = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} + 4 \right)$$

$$= \frac{16}{9}$$

$$\sigma_X = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = \frac{16}{9} - \frac{11^2}{9^2} = \frac{9 \cdot 16 - 121}{81} = \frac{144 - 121}{81} = \frac{23}{81}$$

$$E\{SX\} = \int_0^2 \int_0^1 sx \cdot \frac{1}{3} (x+s) ds dx = \frac{1}{3} \int_0^2 x \left[\frac{s^2}{2} x + \frac{s^3}{3} \right]_0^1 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} x dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_3 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \cdot \frac{11}{9}}{\frac{23}{81}} = \frac{54 - 55}{23} = -\frac{1}{23}$$

$$\omega_0 = \frac{5}{9} + \frac{1}{23} \cdot \frac{11}{9} = \frac{23 \cdot 5 + 11}{23 \cdot 9} = \frac{126}{23 \cdot 9} = \frac{14}{23}$$

$$b) \int_E (S - \hat{S}_{LNSE})^2 \} = \int_E \{ E \cdot (S - \hat{S}_{LNSE}) \} =$$

$$= \int_E \{ ES \} - \int_E \{ E \cdot \hat{S}_{LNSE} \} = \int_E \{ S^2 \} - \int_E \{ S \hat{S}_{LNSE} \}$$

$$= \int_E \{ S^2 \} - \omega_0 \int_E \{ S \} - \omega_1 \int_E \{ SX \}$$

$$\int_E \{ S^2 \} = \int_0^1 s^2 \cdot \frac{2}{3} (1+s) ds = \frac{2}{3} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{18}$$

$$\int_E \{ (S - \hat{S}_{LNSE})^2 \} = \frac{7}{18} - \frac{14}{23} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{23} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{7 \cdot 23 - 14 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2}{23 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{161 - 140 + 12}{23 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{33}{23 \cdot 9 \cdot 2} =$$

$$= \frac{11}{23 \cdot 6} = \frac{11}{138}$$

PROBLEMA 3, Enero 2013

a

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} P_{X|H}(x|1) &= \frac{1}{2}x \\ P_{X|H}(x|0) &= \frac{3}{4}x(2-x)^2 \\ P_H(1) &= \frac{2}{5} \\ P_H(0) &= \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Decision MAP: } P_{X|H}(x|1)P_H(1) \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} P_{X|H}(x|0)P_H(0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{5}x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{9}{20}x(2-x)^2, \quad x \in [0,2] \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{9}{4} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} (2-x)^2, \quad x \in [0,2] \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{3}{2} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} |2-x|
 \end{aligned}$$

Dado que, para $x \in [0,2]$, $|2-x| = 2-x$, resulta $\frac{3}{2} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 2-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} & D=1 \\ & x \gtrless \frac{4}{3} \\ & D=0 \end{aligned}}$$

b

$$P_M = \int_{x_0} P_{X|H}(x|1) = \int_0^{4/3} \frac{1}{2}x dx = \frac{4}{9}$$

c

El incremento de la probabilidad de error será

$$P_e' - P_e = (P_H(0)P_{FA}' + P_H(1)P_M') - (P_H(0)P_{FA} + P_H(1)P_M)$$

Dado que la verosimilitud de $H=1$ no cambia y el decisor tampoco, resulta

$$P_{FA}' = P_{FA} \Rightarrow P_e' - P_e = P_H(1)(P_M' - P_M)$$

La nueva probabilidad de pérdida es

$$P_M' = \int_0^{4/3} \left[\frac{7}{8}P_{X|H}(x|1) + \frac{1}{16} \right] dx = \frac{7}{8}P_M + \frac{1}{12} = \frac{17}{36}$$

Por tanto

$$\boxed{P_e' - P_e = \frac{2}{5} \left(\frac{17}{36} - \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{90}}$$

a) Comenzamos calculando $\hat{b}_{MLE}$ y $\hat{c}_{MLE}$ a partir de $\{s^{(k)}\}_{k=1}^K$

$$p(s) = b \exp(-b(s-c)) \quad s > c$$

$$p(\underline{s} | b, c) = \prod_{k=1}^K p(s^{(k)} | b, c) = b^K \exp\left(-b \sum_{k=1}^K (s^{(k)} - c)\right) \quad \forall s^{(k)} > c$$

$$\ln p(\underline{s} | b, c) = K \ln b - b \sum_{k=1}^K (s^{(k)} - c)$$

$$\left. \frac{d \ln p(\underline{s} | b, c)}{d b} \right|_{\substack{b = \hat{b}_{MLE} \\ c = \hat{c}_{MLE}}} = \frac{K}{\hat{b}_{MLE}} - \sum_{k=1}^K (s^{(k)} - \hat{c}_{MLE}) = 0$$

$$\hat{b}_{MLE} = \frac{K}{\sum_{k=1}^K (s^{(k)} - \hat{c}_{MLE})}$$

$$\left. \frac{d \ln p(\underline{s} | b, c)}{d c} \right|_{\substack{b = \hat{b}_{MLE} \\ c = \hat{c}_{MLE}}} = b > 0$$

$\hookrightarrow$ La derivada es creciente con c , como $c < \forall s^{(k)}$,

$$\hat{c}_{MLE} = \min_k \{s^{(k)}\}$$

Sustituyendo tenemos

$$\hat{c}_{MLE} = 6 \text{ minutos} \quad \hat{b}_{MLE} = \frac{1}{12} \text{ min}^{-1}$$

Si estimamos $\hat{a}_{MLE}$, por similitud con el caso anterior, tenemos

$$\hat{a}_{MLE} = \frac{K}{\sum_{k=1}^K x^{(k)}} = \frac{1}{12} \text{ min}^{-1}$$

b)

$$\bar{X} = S + N$$

$$\hat{s}_{ML} = \arg \max_s p(x|s)$$

$$p(x|s) = p_N(n = x-s) = a \exp(-a(x-s))$$

$$x-s > 0$$

$$\ln p(x|s) = \ln a - ax + as$$

$$\frac{d \ln p(x|s)}{ds} \Big|_{s = \hat{s}_{ML}} = a > 0$$

La derivada es creciente con $s \Rightarrow \hat{s}_{ML}$ es el máximo valor que puede tomar s

$$x \Rightarrow s > 0 \Rightarrow s < x \Rightarrow \boxed{\hat{s}_{ML} = x}$$

Hora de entrega	x	$\hat{s}_{ML}$
12:25	25 min	25 min
12:30	30 min	30 min
12:40	40 min	40 min

c)

$$\hat{s}_{HMSE} = E\{S|x\}$$

$$p(s|x) = \frac{p(x|s) p(s)}{p(x)}$$

$$p(x|s) = a \exp(-a(x-s)) \quad x-s > 0$$

$$p(s) = b \exp(-b(s-c)) \quad s > c$$

$$p(x, s) = p(x|s) p(s) = a b \exp(-ax) \exp(as - bs) \cdot \exp(bc) \quad \begin{matrix} x-s > 0 \\ s > c \end{matrix}$$

Substituyendo a, b y c

$$p(x, s) = 10^2 \exp(50) \exp(-10x) \quad \begin{matrix} x-s > 0 \\ s > 5 \end{matrix}$$

$$p(x) = \int p(x, s) ds = \int_5^x 10^2 \exp(50) \exp(-10x) ds$$

$$= 10^2 \exp(50) \exp(-10x) (x-5) \quad x > 5$$

$$p(s|x) = \frac{10^2 \exp(50) \exp(-10x)}{10^2 \exp(50) \exp(-10x) (x-5)} = \frac{1}{x-5} \quad \begin{matrix} s < x \\ s > 5 \end{matrix}$$

$$E\{S|x\} = \int s p(s|x) ds = \frac{1}{x-5} \int_5^x s ds =$$

$$= \frac{1}{x-5} \left[\frac{s^2}{2} \right]_5^x = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 5^2}{x-5} = \frac{x+5}{2}$$

$$\boxed{\hat{s}_{HMSE} = \frac{x+5}{2}}$$

$$x = 25 \text{ min} \rightarrow \hat{s}_{HMSE} = 15 \text{ min}$$

$$x = 30 \text{ min} \rightarrow \hat{s}_{HMSE} = 17.5 \text{ min}$$

$$x = 40 \text{ min} \rightarrow \hat{s}_{HMSE} = 22.5 \text{ min}$$

Ej. 5

a)

$$H=0 : p(x|h=0) = N(x|0, \sigma^2)$$

$$H=1 : x = g(\phi) = \sqrt{\sigma} \cos \phi \quad \text{con } p(\phi) = \frac{1}{2\pi} [0 < \phi < 2\pi]$$

equivalente a

$$x = g(\phi) = \sqrt{\sigma} \cos \phi \quad \text{con } p(\phi) = \frac{1}{\pi} [0 < \phi < \pi]$$

Cambio de variable:

$$P_X(x) = \left| \frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x} \right| P_\Phi(g^{-1}(x)) = \left| \frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x} \right| \frac{1}{\pi} \quad \text{para } x \in [-\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma-x^2}} \cdot \frac{1}{\pi}$$

portanto:

$$p(x|h=1) = \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma-x^2}} \quad \forall x \in [-\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma}]$$

b) ML decider:

$$p(x|h=1) \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} p(x|h=0) ; \quad \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma-x^2}} \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} ;$$

$$\log \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-\frac{x^2}{\sigma}}} \right) \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} -\frac{x^2}{2\sigma} ; \quad \log \frac{2}{\pi} \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} -\frac{x^2}{\sigma} + \log \left(1 - \frac{x^2}{\sigma} \right)$$

$$\frac{x^2}{\sigma} - \log \left(1 - \frac{x^2}{\sigma} \right) \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} \log \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{h\left(\frac{x^2}{\sigma}\right) \stackrel{p=1}{\underset{p=0}{\geq}} \log \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{p=0 \text{ si } x^2 > \sigma}$$

$$c) D_0: -\infty < x < -\sqrt{\sigma} \cup -\sqrt{\sigma h^{-1}(\log \frac{\pi}{2})} < x < +\sqrt{\sigma h^{-1}(\log \frac{\pi}{2})}$$

$$\cup +\sqrt{\sigma} < x < +\infty$$

$$b_1: -\sqrt{\sigma} < x < -\sqrt{\sigma h^{-1}(\log \frac{\pi}{2})} \cup +\sqrt{\sigma h^{-1}(\log \frac{\pi}{2})} < x < \sqrt{\sigma}$$

$$d) P_{FA} = 2 \left(Q(1) - Q(\sqrt{h^{-1}(\log \frac{\pi}{2})}) \right)$$

Nombre y apellidos: _____

Titulación y grupo: _____

NIA y Firma: _____

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	20	20	25	25	100
Score:						

Respuestas Ejercicio 1: (a) _____; (b) _____; (c) _____; (d) _____;

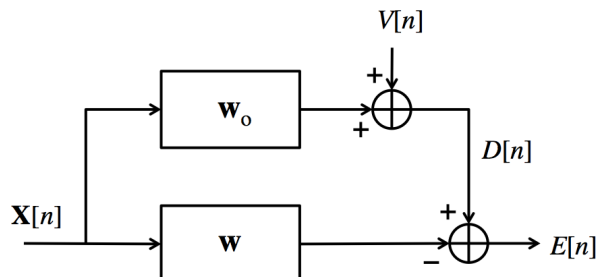
Indicaciones:

- El examen consta de 5 ejercicios cuya valoración se indica junto a cada enunciado y en la tabla superior. El primer ejercicio consta de cuatro cuestiones de tipo test con igual puntuación (2.5/100 puntos); cada respuesta errónea acarreará una penalización equivalente a la propia puntuación de la cuestión. La mínima puntuación del ejercicio tipo test es 0.
- Conteste a las preguntas de tipo test en la hoja de examen. Conteste al resto de ejercicios en hojas independientes, ya que cada ejercicio se entregará por separado. Debe escribir su nombre, apellidos y grupo en todas las hojas que entregue.
- Para la resolución del examen no se permite el uso de apuntes, ejercicios resueltos o calculadoras de cualquier tipo. Únicamente se acepta el uso de una hoja manuscrita.
- La duración del examen es de **3 horas**.

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MMSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.
- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud $[\phi_{\text{ML}}(\mathbf{x})]$.
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori $[\phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})]$.
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_e : probabilidad de error.
- P_{FA} : probabilidad de falsa alarma.
- P_{M} : probabilidad de pérdidas.
- P_{D} : probabilidad de detección.
- Curva ROC: curva característica de operación.

- (10 %) 1. Considere el escenario de identificación representado en el siguiente diagrama de bloques, donde $\mathbf{w}_o$ es el vector de parámetros que se desea estimar. De acuerdo con el diagrama de bloques, la señal deseada se obtiene como $D(n) = \mathbf{w}_o^T \mathbf{X}(n) + V(n)$, donde $\mathbf{X}(n) = [X(n), X(n-1), X(n-P+1)]^T$, siendo $X(n)$ y $V(n)$ procesos estocásticos estacionarios e independientes de media nula, y P la longitud del filtro.



Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

- (a) Sea $\mathbf{w}^*$ el filtro de Wiener y $E^*(n) = D(n) - \mathbf{w}^{*T} \mathbf{X}(n)$ el error asociado al mismo, entonces se verifica $\mathbb{E}\{E^*(n)D(n)\} = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{0}$ un vector con todas sus componentes nulas.
☐ Verdadero.
☒ Falso.
- (b) El filtro de Wiener está dado por $\mathbf{w}^* = (\mathbb{E}\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\})^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{X}(n)V(n)\}$.
☐ Verdadero.
☒ Falso.
- (c) Si el filtro $\mathbf{w}$ se ajusta mediante el algoritmo LMS con paso de adaptación no nulo ($\mu \neq 0$), dicho algoritmo converge a una solución con menor error cuadrático medio que la solución de Wiener.
☐ Verdadero.
☒ Falso.
- (d) Si el filtro $\mathbf{w}$ se ajusta mediante el algoritmo LMS con paso de adaptación no nulo ($\mu \neq 0$), dicho algoritmo converge a una solución con error cuadrático medio nulo.
☐ Verdadero.
☒ Falso.

(20 %) 2. Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s, x) = \begin{cases} \frac{4s}{x(1-x)}, & x(1-x) < s < 2x(1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- (a) Represente, de forma aproximada, la región de soporte de la distribución conjunta.
- (b) Determine el estimador $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.
- (c) Determine el estimador $\hat{S}_{\text{MAD}}$.

Solution:

(a) TBD

(b) $\hat{s}_{\text{MMSE}} = \frac{14}{9}x(1-x).$

(c) $\hat{s}_{\text{MAD}} = \sqrt{\frac{5}{2}}x(1-x)$

(20 %) 3. Considere el problema de decisión binario dado por las verosimilitudes:

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|0) &= \exp(-x), & x > 0 \\ p_{X|H}(x|1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), & x > 0 \end{aligned}$$

Sabiendo que $P_H(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_H(1)$ y $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = \exp\left(\frac{1}{2}\right)c_{01}$:

- (a) Determine las regiones de decisión del decisor MAP.
- (b) Calcule la probabilidad de error del decisor MAP. Exprese su resultado utilizando la función:

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

- (c) Determine las regiones de decisión del decisor bayesiano de mínimo coste medio.
- (d) Calcule la probabilidad de error del decisor obtenido en el apartado anterior.

Solution:

(a) $\begin{aligned} D &= 0 \\ x &\geq 2 \\ D &= 1 \end{aligned}$

$$P_e = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \exp(-2)) + 2 - 2F(2) \right]$$

(b) Siempre se decide $D = 0$, $P_e = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1}$

(25 %) 4. Se toma una medida de la tensión instantánea x existente en un momento dado en un nodo de un circuito. En dicho nodo existe una componente de señal con valor s , contaminada por ruido gaussiano aditivo de media nula y varianza v , e independiente de la señal. A priori, el valor de s sigue una densidad de probabilidad gaussiana de media y varianza unitarias.

- (a) Suponiendo conocida v , calcule el estimador de máxima verosimilitud de s , $\hat{s}_{\text{ML}}(x)$.
- (b) Calcule el error cuadrático medio en el que incurre el estimador $\hat{s}_{\text{ML}}(x)$.
- (c) Calcule la verosimilitud de v a la vista de x , $p_{X|v}(x|v)$.
- (d) Calcule el estimador de máxima verosimilitud de v , $\hat{v}_{\text{ML}}(x)$.

Solution:

- (a) $\hat{s}_{\text{ML}}(x) = x$
- (b) $\mathbb{E}[(x - s)^2] = v$
- (c) $p(x|v) = G(x|1, v + 1)$
- (d) $\hat{v}_{\text{ML}}(x) = \max[(x - 2)x, 0]$

(25 %) 5. Considere el problema de decisión dado por las verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 < x < 1$$

$$p_{X|H}(x|0) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 < x < 1$$

- (a) Determine las regiones de decisión del decisor LRT de parámetro η :

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\geq}} \eta.$$

- (b) Represente gráficamente, de forma aproximada, la ROC del decisor LRT.
- (c) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor ML.
- (d) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor minimax.
- (e) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor de Neyman Pearson con $P_{\text{FA}} \leq 0.6$.

Solution:

$$(a) \quad x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\geq}} \frac{2}{\pi} \arctan(\eta),$$

- (b) La ROC es un arco de circunferencia de radio 1 y centrado en (1,0).

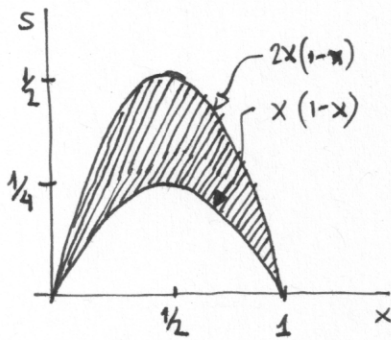
$$(c) \quad (P_{\text{FA}}, P_{\text{M}}) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(d) \quad (P_{\text{FA}}, P_{\text{M}}) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(e) \quad (P_{\text{FA}}, P_{\text{M}}) = (0.6, \sqrt{0.84})$$

P2

a



b

$$\hat{S}_{HMSE} = E[S|X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s p(s|x) ds = \int_{x(1-x)}^{2x(1-x)} s \cdot \frac{2s}{3x^2(1-x)^2} ds = \frac{14}{9} x(1-x)$$

$$p(s|x) = \frac{p(s,x)}{p(x)} = \frac{\frac{4s}{x(1-x)}}{6x(1-x)} = \frac{2s}{3x^2(1-x)^2}$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x) ds = \int_{x(1-x)}^{2x(1-x)} \frac{4s}{x(1-x)} ds = \frac{2s^2}{x(1-x)} \Big|_{x(1-x)}^{2x(1-x)} = 6x(1-x)$$

c

$$\hat{S}_{HAD} = \text{mediana} \{S|x\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\hat{S}_{HAD}} p(s|x) ds = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x(1-x)}^{\hat{S}_{HAD}} \frac{2s}{3x^2(1-x)^2} ds = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x^2(1-x)^2} \left[\hat{S}_{HAD}^2 - x^2(1-x)^2 \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{S}_{HAD} = \sqrt{\frac{5}{2}} x(1-x)$$

P3

$$p(x|0) = \exp(-x) \quad x > 0$$

$$p(x|1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad x > 0$$

$$P_H(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_H(1) \quad C_{00} = C_{11} = 0 \quad C_{10} = C_{01} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

a) Decoder MAP

$$\frac{p(x|0)}{p(x|1)} \stackrel{0}{\underset{1}{>}} \frac{P_H(1)}{P_H(0)}$$

$$\frac{\exp(-x)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \stackrel{0}{\underset{1}{>}} \frac{P_H(1)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_H(1)}$$

$$\ln\left[\exp\left(-x + \frac{x^2}{2}\right)\right] \stackrel{0}{\underset{1}{>}} \ln(1) = 0$$

$$\begin{matrix} x^2 & \stackrel{0}{\underset{1}{>}} & 2x \\ x & \stackrel{0}{\underset{1}{>}} & 2 \end{matrix}$$

DECODER MAP	
$D=0$	$2 < x$
$D=1$	$0 < x < 2$

b) P_e

$$P_e = P_{FA} P_H(0) + P_M P_H(1)$$

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P(D=1 | H=0) = \int_0^2 p(x|0) dx = \\ &= \int_0^2 \exp(-x) dx = -\exp(-x) \Big|_0^2 = 1 - \exp(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_M &= P(D=0 | H=1) = \int_2^\infty p(x|1) dx = \int_2^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 2 \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 2 [1 - F(2)] \end{aligned}$$

$$P_e = [1 - \exp(-2)] \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_H(1) + 2 [1 - F(2)] P_H(1)$$

$$P_H(0) + P_H(1) = 1$$

$$P_H(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_H(1) \quad \left\{ \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1 \right) P_H(1) = 1 \right.$$

$$P_H(1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1}$$

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1} \left\{ \left[1 - \exp(-2) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2 \left[1 - F(2) \right] \right\}$$

c) Dec. mínimo coste medio

$$\frac{p(x|0)}{p(x|1)} \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad \frac{P_H(1)}{P_H(0)} \quad \frac{\cancel{C_{01}} - \cancel{C_{11}}}{\cancel{C_{10}} - \cancel{C_{00}}}$$

$$\frac{\exp(-x)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad \frac{P_H(1)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_H(1)} \quad \frac{\cancel{C_{01}}}{\cancel{C_{10}} \exp\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\exp\left(-x + \frac{x^2}{2}\right) \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-x + \frac{x^2}{2} \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad 0$$

$$(x-1)^2 \begin{matrix} 0 \\ > \\ < \\ 1 \end{matrix} \quad 0$$

$(x-1)^2$ siempre va a ser mayor que 0 $\Rightarrow$ siempre

voy a decidir $D=0$

DECISION DE MINIMO

$$D=0$$

$\forall x$

RESGO

$$d) \quad P_e = P_{FA} \cdot P_H(0) + P_M \cdot P_H(1)$$

$$P_{FA} = 0 \quad (\text{Nunca se decide } D=1)$$

$$P_M = \int_0^{\infty} p(x|1) dx = 1$$

$$\boxed{P_e = P_H(1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1}}$$

P4

$$x = s + u ; \quad p_s(s) = G(s|1,1) ; \quad p_w(u) = G(u|0,\sigma)$$

a) $\hat{S}_{ML}(x)$?

$$p_{x|s}(x|s) = \left\{ u = x - s \right\} = p_w(x-s) = G(x-s|0,\sigma) = G(x|s,\sigma)$$

$$\hat{S}_{ML}(x) = \arg \max_s p(x|s) = \arg \max_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s)^2} = \arg \min_s (x-s)^2 = x$$

$$b) \quad \mathbb{E}[(\hat{S}_{ML}(x) - s)^2] = \mathbb{E}[(x-s)^2] = \mathbb{E}[u^2] = \sigma^2 + \sigma^2 = \sigma^2$$

c) $p(x|\sigma)$? $p(x|\sigma) = G(x|u_x, \sigma_x)$, ya que x es comb. lineal de v.a. Gauss.

$$u_x = \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[s] + \mathbb{E}[u] = 1, \quad \sigma_x = \mathbb{E}[x^2] - 1 = \underbrace{\mathbb{E}[s^2]}_{\text{sig indep}} + \mathbb{E}[u^2] - 1 = 2 + \sigma^2 - 1 = \sigma^2 + 1$$

$$p(x|\sigma) = G(1, \sigma^2 + 1)$$

d) $\hat{\sigma}_{ML}(x)$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \arg \max_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \ln p(x|\sigma) = \arg \max_{\sigma \in \mathbb{R}^+} -\frac{1}{2} \ln 2\pi(\sigma^2 + 1) - \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2}{\sigma^2 + 1}$$

$$\frac{2 \ln p(x|\sigma)}{2\sigma} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2 + 1} - \frac{(x-1)^2}{(\sigma^2 + 1)^2} \right] = 0 ; \quad \sigma^2 + 1 = (x-1)^2$$

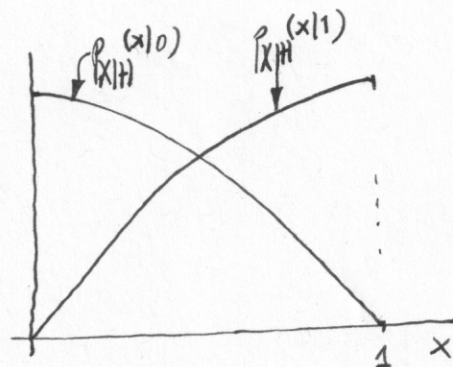
$$\sigma^2 = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) ; \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{ML} = \max(0, x(x-2))$$

↳ Esto podría situar el máximo en σ negativa, lo cual no está en su dominio ($\sigma \in \mathbb{R}^+$)

↳ por tanto, nos quedamos con el máximo dentro del dominio.

a

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta \Leftrightarrow \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta \Leftrightarrow \tan(\frac{\pi}{2}x) \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$$



Dado que $\tan(\frac{\pi}{2}x)$ es creciente e invertible en $(0,1)$, el decisor es equivalente a

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{2}{\pi} \arctan(\eta)$$

$$\begin{aligned} D=1 & \text{ en } [\frac{2}{\pi} \arctan(\eta), 1] \\ D=0 & \text{ en } [0, \frac{2}{\pi} \arctan(\eta)] \end{aligned}$$

b

Sea $\eta' = \arctan(\eta)$

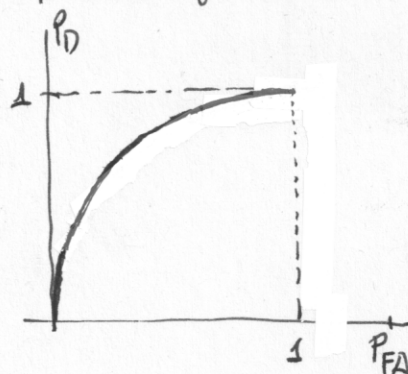
$$P_{FA}(\eta') = \int_{\eta'}^1 p_{X|H}(x|0) dx = \int_{\eta'}^1 \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}x) dx = \left[\sin(\frac{\pi}{2}x) \right]_{\eta'}^1 = 1 - \sin(\frac{\pi}{2}\eta')$$

$$P_D(\eta') = \int_{\eta'}^1 p_{X|H}(x|1) dx = \int_{\eta'}^1 \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}x) dx = \left[-\cos(\frac{\pi}{2}x) \right]_{\eta'}^1 = \cos(\frac{\pi}{2}\eta')$$

La ROC puede representarse de forma aproximada a partir de algunas puntos obtenidos dando valores a η' . Sin embargo, observando que

$$(P_{FA}(\eta') - 1)^2 + P_D^2(\eta') = 1$$

se comprueba que los puntos de la ROC se encuentran en un círculo de radio 1 centrado en $(1,0)$



c

Decisor ML: $\eta=1 \Rightarrow \eta' = \frac{2}{\pi} \arctan(1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (P_{FA}(1), P_D(1)) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

d

Decisor Minimax: $P_{FA}(\eta') = P_D(\eta') \Leftrightarrow 1 - \sin(\frac{\pi}{2}\eta') = \cos(\frac{\pi}{2}\eta') \Leftrightarrow \eta' = 1 \Leftrightarrow$

$$(P_{FA}, P_D) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

e

Decisor N-P: $P_{FA} = 0.6 \Rightarrow$

$$P_D = \sqrt{1 - 0.4^2} = \sqrt{0.84}$$

$$\Rightarrow (P_{FA}, P_D) = (0.6, \sqrt{0.84})$$

