Aprendizaje por Refuerzo

Máster en Ciencia y Tecnología Informática

Fernando Fernández Rebollo

Grupo de Planificación y Aprendizaje (PLG)
Departamento de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

30 de septiembre de 2013

En Esta Sección:

- Introducción al Aprendizaje por Refuerzo
- Aprendizaje por Refuerzo
- Reutilización de Políticas

Resumen de las Sesiones de Aprendizaje por Refuerzo

Aprendizaje por Refuerzo

Máster en Ciencia y Tecnología Informática

Fernando Fernández Rebollo

Grupo de Planificación y Aprendizaje (PLG)
Departamento de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

Introducción al Aprendizaje por Refuerzo

1. Procesos de Decisión de Markov
2. Programación Dinámica

Introducción al Aprendizaje por Refuerzo

Aprendizaje por Refuerzo

Aprendizaje por Refuerzo

3. Aprendizaje por Refuerzo
4. Generalización en Aprendizaje por Refuerzo
5. Aplicaciones del Aprendizaje por Refuerzo

Aprendizaje por Refuerzo

Reutilización de Políticas

Parte I

Introducción al Aprendizaje por Refuerzo

Procesos de Decisión de Markov

Aprendizaje por Refuerzo

Máster en Ciencia y Tecnología Informática

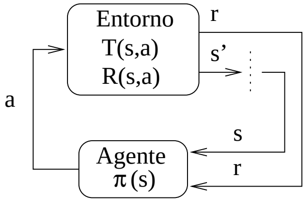
Fernando Fernández Rebollo

Grupo de Planificación y Aprendizaje (PLG)
Departamento de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

En Esta Sección:

Aprendizaje por Refuerzo

- El aprendizaje por refuerzo consiste en aprender a decidir, ante una situación determinada, qué acción es la más adecuada para lograr un objetivo.
- Elementos principales:
  - Proceso iterativo de prueba y error
  - Aprendizaje a través de señales de refuerzo



Métodos de Resolución

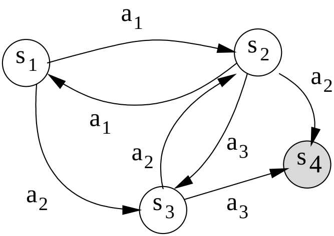
- Si se conoce el modelo (funciones de transición de estado y refuerzo): Programación Dinámica
- Si no se conoce el modelo:
    - Aprender el modelo: métodos basados en el modelo o *Programación Dinámica*
    - Aprender las funciones de valor directamente: métodos libres de modelo o Aprendizaje por Refuerzo

Definición de un MDP

- Un MDP se define como una tupla $< \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{R} >$, tal que:
  - $\mathcal{S}$ es un conjunto de estados
  - $\mathcal{A}$ un conjunto de acciones
  - $\mathcal{T} : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$, donde un miembro de $P(\mathcal{S})$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto $\mathcal{S}$; es decir, transforma estados en probabilidades. Se dice que $T(s, a, s')$ es la probabilidad de que se realice una transición desde s hasta s' ejecutando la acción a
  - $\mathcal{R} : \mathcal{S}\mathrm{x}\mathcal{A} \to \Re$, que para cada par estado-acción proporciona su refuerzo. Se dice que $\mathcal{R}(s, a)$ es el refuerzo recibido tras ejecutar la acción a desde el estado s.

Ejemplo de MDP Determinista

La ejecución de una acción desde un estado siempre produce la misma transición de estado y el mismo refuerzo/coste



	s_1	s_2	s_3	s_4
$\mathcal{T}(s_1, a1, s_i)$	0	1	0	0
$\mathcal{T}(s_1, a2, s_i)$	0	0	1	0
$\mathcal{T}(s_1, a3, s_i)$	1	0	0	0
$\mathcal{T}(s_2, a1, s_i)$	1	0	0	0
$\mathcal{T}(s_2, a2, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_2, a3, s_i)$	0	1	0	0
$\mathcal{T}(s_3, a1, s_i)$	0	0	1	0
$\mathcal{T}(s_3, a2, s_i)$	0	1	0	0
$\mathcal{T}(s_3, a3, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_4, a1, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_4, a2, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_4, a3, s_i)$	0	0	0	1

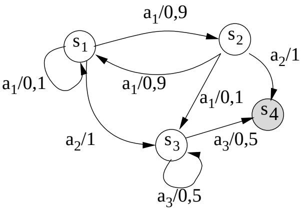
(Columns grouped under s_i.)

$R(s_i, a, s_4) = 1$ si $s_i = \{1, 2, 3\}$.

$R(s_i, a, s_j) = 0$ e.c.o.c.

Ejemplo de MDP Estocástico

Las transiciones de estado y la función de refuerzo son funciones estocásticas, por lo que la misma situación puede producir distintos resultados



	s_1	s_2	s_3	s_4
$\mathcal{T}(s_1, a1, s_i)$	0,1	0,9	0	0
$\mathcal{T}(s_1, a2, s_i)$	0	0	1	0
$\mathcal{T}(s_1, a3, s_i)$	1	0	0	0
$\mathcal{T}(s_2, a1, s_i)$	0,9	0	0,1	0
$\mathcal{T}(s_2, a2, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_2, a3, s_i)$	0	1	0	0
$\mathcal{T}(s_3, a1, s_i)$	0	0	1	0
$\mathcal{T}(s_3, a2, s_i)$	0	0	1	0
$\mathcal{T}(s_3, a3, s_i)$	0	0	0,5	0,5
$\mathcal{T}(s_4, a1, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_4, a2, s_i)$	0	0	0	1
$\mathcal{T}(s_4, a3, s_i)$	0	0	0	1

(Column group header: s_i)

$$R(s_i, a, s_4) = 1 \text{ si } s_i = \{1, 2, 3\}.$$

Propiedad de Markov

- Propiedad de Markov:
  El estado anterior y la última acción realizada son suficientes para describir el estado actual y el refuerzo recibido

$$Pr\{s_{t+1} = s', r_{t+1} = r | s_t, a_t\} =$$
$$Pr\{s_{t+1} = s', r_{t+1} = r | s_t, a_t, r_t, s_{t-1}, a_{t-1}, \ldots, r_1, s_0, a_0, \}$$

- Consecuencia: la acción a ejecutar sólo depende del estado actual

Políticas y Optimalidad

- Objetivo de planificación:
  - Encontrar una política, π, que para cada estado $s \in S$, decida cuál es la acción, $a \in A$, que debe ser ejecutada, de forma que se maximice alguna medida de refuerzo a largo plazo.
- Criterio de optimalidad de horizonte infinito descontado:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_k \tag{1}$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$

Funciones de Valor y Políticas

- El cálculo de las políticas óptimas, $\pi^*(s)$, se basa en las funciones de valor:
  - Función de valor-estado (dada una política π):

$$V^\pi(s) = E_\pi\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} | s_t = s\}$$

  - Función de valor-acción (dada una política π):

$$Q^\pi(s,a) = E_\pi\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} | s_t = s, a_t = a\}$$

Funciones de Valor Óptimas

- Función de valor-estado óptima:

$$V^*(s) = \max_\pi V^\pi(s) \forall s \in \mathcal{S}$$

- Función de valor-acción óptima:

$$Q^*(s, a) = \max_\pi Q^\pi(s, a) \forall s \in \mathcal{S}, \forall a \in \mathcal{A}$$

- Relación entre las funciones de valor óptimas:

$$V^*(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} Q^*(s, a), \forall s \in \mathcal{A}$$

Funciones de Valor Óptimas

- Definición de una política óptima, $\pi^*(s)$, en función de $Q^*(s, a)$:

$$\pi^*(s) = \arg_{a \in \mathcal{A}} \max Q^*(s, a)$$

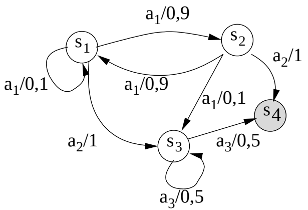
- Ecuaciones de optimalidad de Bellman:

$$Q^*(s, a) = \sum_{s'} \mathcal{T}(s, a, s')[R(s, a) + \gamma V^*(s'))]$$

$$Q^*(s, a) = \sum_{s'} \mathcal{T}(s, a, s')[R(s, a) + \gamma \max_{a'} Q^*(s', a'))]$$

$$V^*(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s'} \mathcal{T}(s, a, s')[\mathcal{R}(s, a) + \gamma V^*(s')]$$

Ejemplo



$$
\begin{aligned}
Q^*(s_4, a_i) = \quad & 0 \\
Q^*(s_2, a_2) = \quad & \mathcal{T}(s_2, a_2, s_1)[\mathcal{R}(s_2, a_2, s_1) + \gamma \max_{a'} Q^*(s_1, a')] + \\
& \mathcal{T}(s_2, a_2, s_2)[\mathcal{R}(s_2, a_2, s_2) + \gamma \max_{a'} Q^*(s_2, a')] + \\
& \mathcal{T}(s_2, a_2, s_3)[\mathcal{R}(s_2, a_2, s_3) + \gamma \max_{a'} Q^*(s_3, a')] + \\
& \mathcal{T}(s_2, a_2, s_4)[\mathcal{R}(s_2, a_2, s_4) + \gamma \max_{a'} Q^*(s_4, a')] \\
& 1 + \gamma \times 0 = 1 \\
Q^*(s_2, a_1) = \quad & ¿?
\end{aligned}
$$

En Esta Sección:

Programación Dinámica

- Algoritmos utilizados para calcular políticas óptimas, asumiendo un modelo perfecto del entorno descrito como un MDP.
- Algoritmos clásicos:
  - Iteración sobre la política (*Policy Iteration*)
  - Iteración sobre el valor (*Value Iteration*)
- Sistema de Markov: Puede verse como una simplificación del MDP, en el que se ha fijado una política (ya no hay decisiones)

Sistema de Markov

- El problema de la hormiga amenazada
- http://sociedad.elpais.com/sociedad/2011/03/25/videos/1301007601_870215.html

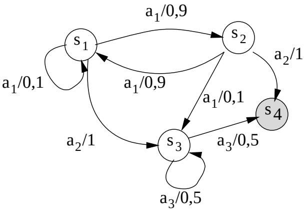
Evaluación de la Política

(equivale a resolver el sistema de Markov resultante)

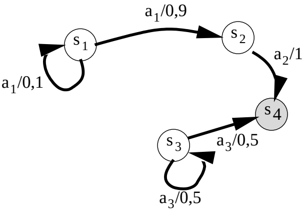
- Recibir la política π a evaluar
- Inicializar $V(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$
- Repetir
  - $\Delta \leftarrow 0$
  - Para cada $s \in S$
    1. $v \leftarrow V(s)$
    2. $V(s) \leftarrow \sum_{s'} \mathcal{T}(s, \pi(s), s')[\mathcal{R}(s, \pi(s)) + \gamma V(s')]$
    3. $\Delta \leftarrow max(\Delta, |v - V(s)|)$
- Hasta que $\Delta < \theta$ (un número positivo entero)

Ejemplo: Evaluación de la Política

- Suponemos que la política inicial es: $\pi(s_1) = a_1$, $\pi(s_2) = a_2$, $\pi(s_3) = a_3$ y $\pi(s_4) = a_1$



MDP $\longrightarrow$ Sistema de Markov



Ejemplo: Evaluación de la Política

$$\begin{aligned}V(s_1) = \mathcal{T}(s_1,a_1,s_1)[\mathcal{R}(s_1,a_1,s_1)+\gamma V(s_1)] + \mathcal{T}(s_1,a_1,s_2)[\mathcal{R}(s_1,a_1,s_2)+\gamma V(s_2)]+ \\ \mathcal{T}(s_1,a_1,s_3)[\mathcal{R}(s_1,a_1,s_3)+\gamma V(s_3)] + \mathcal{T}(s_1,a_1,s_4)[\mathcal{R}(s_1,a_1,s_4)+\gamma V(s_4)] = \\ 0,1[0+0]+0,9[0+0]+0,0[0+0]+0,0[0+0]=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(s_2) = \mathcal{T}(s_2,a_2,s_1)[\mathcal{R}(s_2,a_2,s_1)+\gamma V(s_1)] + \mathcal{T}(s_2,a_2,s_2)[\mathcal{R}(s_2,a_2,s_2)+\gamma V(s_2)]+ \\ \mathcal{T}(s_2,a_2,s_3)[\mathcal{R}(s_2,a_2,s_3)+\gamma V(s_3)] + \mathcal{T}(s_2,a_2,s_4)[\mathcal{R}(s_2,a_2,s_4)+\gamma V(s_4)] = \\ 0[0+0]+0[0+0]+0[0+0]+1[1+0]=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(s_3) = \mathcal{T}(s_3,a_3,s_1)[\mathcal{R}(s_3,a_3,s_1))+\gamma V(s_1)] + \mathcal{T}(s_3,a_3,s_2)[\mathcal{R}(s_3,a_3,s_2)+\gamma V(s_2)]+ \\ \mathcal{T}(s_3,a_3,s_3)[\mathcal{R}(s_3,a_3,s_3)+\gamma V(s_3)] + \mathcal{T}(s_3,a_3,s_4)[\mathcal{R}(s_3,a_3,s_4)+\gamma V(s_4)] = \\ 0[0+0]+0[0+0]+0,5[0+0]+0,5[1+0]=0,5\end{aligned}$$

$$V(s_4) = 0$$

Ejemplo: Evaluación de la Política

	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4
$V(s_1)$	0	0,9	0,99	0,999
$V(s_2)$	1	1	1	1
$V(s_3)$	0,5	0,75	0,875	0,937
$V(s_4)$	0	0	0	0

Mejora de la Política

- Recibir la política a mejorar π
- Recibir la función de valor $V(s)$ de la política π
- $política\_estable \leftarrow cierto$
- Para cada $s \in S$
  - $b \leftarrow \pi(s)$
  - $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{T}(s,a,s')[\mathcal{R}(s,a) + \gamma V(s')]$
  - Si $b \neq \pi(s)$, entonces $política\_estable \leftarrow falso$

Ejemplo: Mejora de la Política

$$\begin{aligned}
\pi(s_3) = \arg_{a_i} \text{máx}(\textstyle\sum_{s'} \mathcal{T}(s_3, a_i, s')[\mathcal{R}(s_3, a_i, s') + \gamma V(s')] = \\
\arg_{a_i} \text{máx}(\textstyle\sum_{s'} \mathcal{T}(s_3, a_1, s')[\mathcal{R}(s_3, a_1, s') + \gamma V(s')], \\
\textstyle\sum_{s'} \mathcal{T}(s_3, a_2, s')[\mathcal{R}(s_3, a_2, s') + \gamma V(s')], \\
\mathcal{T}(s_3, a_3, s_1)[\mathcal{R}(s_3, a_3, s_1)) + \gamma V(s_1)] + \\
\mathcal{T}(s_3, a_3, s_2)[\mathcal{R}(s_3, a_3, s_2) + \gamma V(s_2)] + \\
\mathcal{T}(s_3, a_3, s_3)[\mathcal{R}(s_3, a_3, s_3) + \gamma V(s_3)] + \\
\mathcal{T}(s_3, a_3, s_4)[\mathcal{R}(s_3, a_3, s_4) + \gamma V(s_4)]) = \\
\arg_{a_i} \text{máx}(0 + 0 + 1[0 + \gamma 0'937] + 0, \\
0 + 0 + 1[0 + \gamma 0'937] + 0, \\
0[0 + 0'999] + 0[0 + 1] + 0'5[0 + 0'937] + 0'5[1 + 0]) = \\
\arg_{a_i} \text{máx}(0'843, 0, 843, 0'968) = a_3
\end{aligned}$$

Algoritmo de Iteración de la Política

Permite calcular la función de valor óptima de un MDP:

- Inicialización: $V(s) \in \Re$ y $\pi(s) \in \mathcal{A}$ arbitrarios para todo $s \in \mathcal{S}$
- Repetir
  1. Evaluación de la Política
  2. Mejora de la Política
- Hasta que $política\_estable = cierto$

Algoritmo de Iteración de Valor

Iteración de Valor

- Inicializar $V(s)$ arbitrariamente. Por ejemplo, $V(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$
- Repetir
  - $\Delta \leftarrow 0$
  - Para todo $s \in S$
    - $v \leftarrow V(s)$
    - $V(s) \leftarrow \max_a \sum_{s'} \mathcal{T}(s,a,s')[\mathcal{R}(s,a) + \gamma V(s')]$
    - $\Delta \leftarrow max(\Delta, |v - V(s)|)$
- Hasta que $\Delta < \theta$ (un número positivo entero)
- Dar como salida una política π tal que $\pi(s) = \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{T}(s,a,s')[\mathcal{R}(s,a) + \gamma V(s')]$