



Motores Térmicos. Turboalimentación

Capítulo 4: Modelos de referencia de la turboalimentación. (2 horas)

Contenido

- 4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal.
- 4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite.
- 4.3.- Resumen y preguntas de autoevaluación.
- 4.4.- Asuntos adicionales.
- 4.5.- Apéndice I.

NOTAS:

gicp: gas ideal caloríficamente perfecto $PV = R_g T$, $c_v = \text{cte.}$

Los paréntesis quebrados $\langle \rangle$ indican dependencia funcional.

En este capítulo se añade, cuando es necesario, el subíndice $_{cil}$ para distinguir la presión y temperatura en el cilindro de otras.

Los MEC y los MEP con inyección directa al cilindro se indican con $E = 1$. Los MEP se indican con $E = 0$ para aclarar que el combustible se agrega tras cerrarse la admisión. Un motor fumigado tiene $0 < E < 1$.

La información contenida en este documento sirve de propósito exclusivo como apuntes para alumnos en la enseñanza de la asignatura indicada y ha sido obtenida de las mejores fuentes que se han podido encontrar, generalmente de reconocido prestigio. No obstante el/los autor/es no garantizan la exactitud, exhaustividad, actualización o perfección de su contenido. Por ello no será/n responsable/s de cualquier error, omisión o daño causado por el uso de la información contenida, no tratando con este documento prestar ninguna clase de servicio profesional o técnico; antes bien, se ofrece como simple guía general de apoyo a la docencia. En caso de detectar algún error, rogamos nos lo comuniquemos e intentaremos corregirlo. Puede contener material con copyright © por lo que su reproducción puede no estar permitida.

4.1.- Energía disponible en el escape. Modelo ideal.

- La energía disponible en el escape de un MACI para la turboalimentación es consecuencia de la energía térmica liberada por el combustible tras detraerle el trabajo indicado y las pérdidas de calor a las paredes.
- Mientras que la combustión es casi perfecta, especialmente con mezcla pobre, por lo que la liberación de energía térmica correspondiente es sencilla de calcular, las pérdidas de calor son complejas de calcular.
- Como se verá, el trabajo disponible para una turbina ideal depende de la presión de alimentación y ésta puede disminuir a consecuencia de irreversibilidades viscosas que degradan la energía cinética en energía térmica. Estas son también complejas de evaluar, a causa de la no estacionariedad del flujo y de la compleja geometría.
- Si se aceptan hipótesis simplificativas es posible obtener el máximo trabajo disponible en una turbina de escape, lo que denominamos modelo ideal.
- Este modelo ideal considera posible convertir en trabajo útil para la turboalimentación todo elemento diferencial de trabajo ideal que instantáneamente sale del flujo pulsante del motor.
- Posteriormente se puede obtener un modelo más realista, que asume degradación de la energía cinética en térmica.
- Para todo ello se considera útil un modelo de ciclo termodinámico del funcionamiento del MACI de dos composiciones y de presión limitada. Se describe a continuación en primer lugar. Proporciona expresiones analíticas de parámetros de interés.

4.1.- Energía disponible en el escape. Modelo ideal.

- El [ciclo de presión limitada](#) es usado como una referencia para evaluar la eficacia y eficiencia termodinámicas de los MACI, [Fig. 4.1](#). Como en los [ciclos Otto](#) y [Diésel](#), forma un bucle P - V cerrado de alta comprendido entre una compresión (1'-2) y una expansión isentrópicas (4-5). La combustión se realiza en dos tramos, uno a volumen constante (2-3) para modelar la parte de combustión rápida y un tramo posterior a presión constante (3-4) para la parte de combustión lenta. Una masa m compuesta de gases frescos admitidos $m_f = m_a[1+(1-E)F] + m_{EGR}$ y de residuales del ciclo anterior $m_r = fm$ evoluciona en un volumen cerrado y sufre un cambio de composición por la combustión a productos (p). En ciertos motores se añade combustible, $E = 1$, p. e. Diésel y gasolina de inyección directa. En otros, se añade en la admisión, $E = 0$, p. e. MEP de carburador o de inyección en colector. En un motor fumigado se añade en ambos sitios; para ellos $0 < E < 1$.

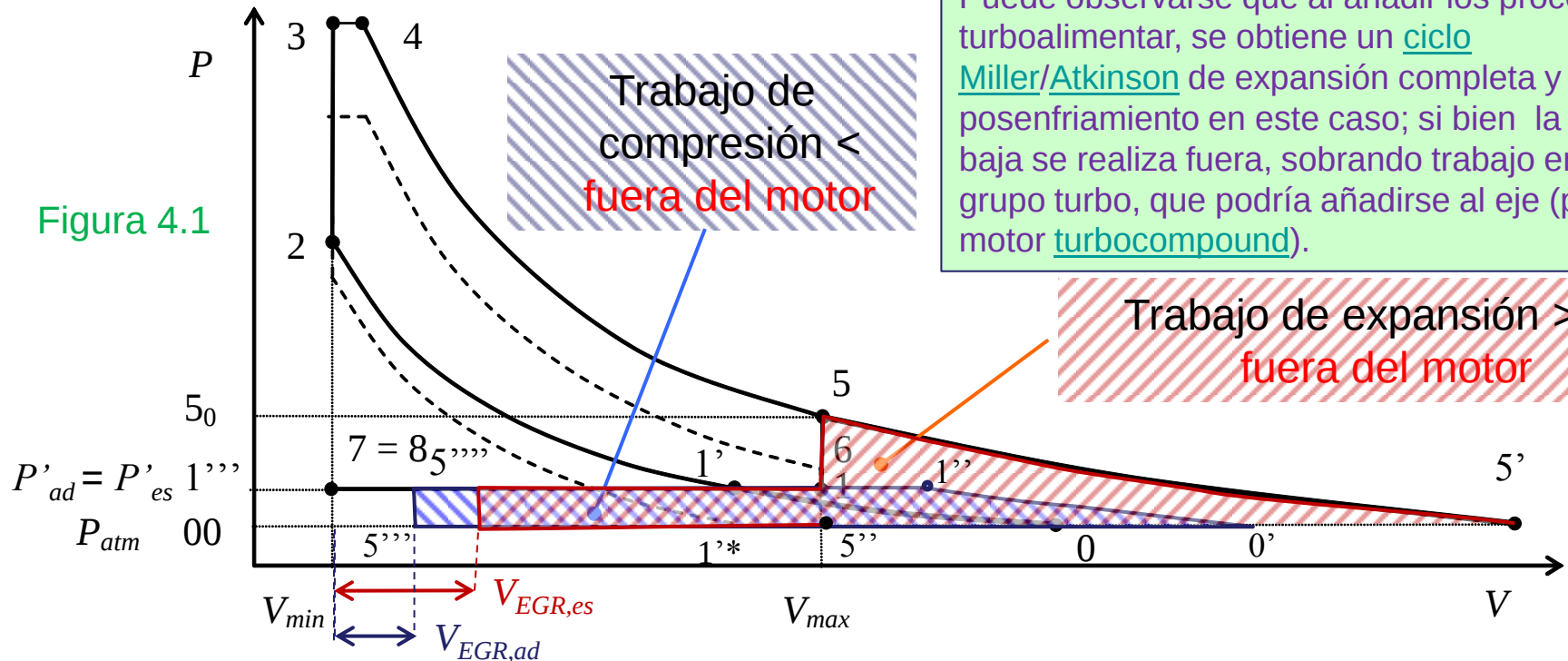
$$EGR_a = \frac{m_{EGR}}{m_a}; \frac{m}{m_a} = \frac{1 + (1-E)F + EGR_a}{1-f}; \frac{m_p}{m} = \frac{m_a + m_{comb} + m_{EGR} + m_r}{m} = 1 + \frac{m_{comb}}{m} = 1 + \frac{EF(1-f)}{1 + (1-E)F + EGR_a} \quad (4.0)$$

- Los procesos de renovación se modelan aquí con un ciclo abierto de baja presión, con evoluciones de descarga desde el mismo instante de apertura de la válvula de escape en PMI (5-1) , [Fig. 4.1](#), expansionándose los gases residuales dentro del motor isentrópicamente a $V = \text{cte.}$ y posteriormente, continúan siendo evacuados por desplazamiento del émbolo a $P'_{es} = \text{cte.}$ (con ' se indica la presión en el cilindro y sin ella fuera de él, contantes). Le sigue un proceso de carga (8-1'-1') a $P = P'_{ad}$, hasta terminar en el instante de cierre de la válvula de admisión (RCA). Por simplicidad en este primer dibujo se asume $P'_{ad} = P'_{es} = P_{1''} > P_{atm}$ por lo que la inclusión o no del bucle de baja presión en el rendimiento mecánico queda libre. La masa dentro del cilindro es pues variable en las fases abiertas del ciclo.
- ✓ Asumimos que el turbocompresor comprime aire desde la atmósfera P'_{atm} hasta P'_{ad} y posteriormente se enfrían a $P' = \text{cte.}$ (1''-1'). La turbina expansiona desde la presión de fin de expansión (PMI) dentro del motor P_5 hasta la presión atmosférica (5-5').
- ✓ En los procesos de transferencia de gases (materia) entre el motor y el grupo turbo ocurre una transferencia de trabajo mutua con los gases. Se alimenta al motor con gases a presión superior a la atmosférica, por lo que se le comunica trabajo al émbolo. También el émbolo del motor impulsa los gases a salir hacia el grupo turbo, a presión superior a la atmosférica durante la carrera de escape, por lo que transfiere trabajo a la turbina (llamado **trabajo estacionario** por ser a presión más o menos constante y aquí a $P'_{es} = \text{cte.}$ y $P_{es} = \text{cte.}$). Esto se suma al trabajo que los gases realizan sobre la turbina al abrirse la válvula de escape, a una presión variable y bastante alta, descargándose el cilindro y bajando la presión en una expansión libre. Este proceso no

4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal (cont.).

- En esta primera figura de un diagrama ideal P - V se ofrece un ciclo de presión limitada de referencia para MEP, MEC habituales, con el detalle de considerar carrera de expansión mayor que la de compresión debido al RCA, y también representa el ciclo [Miller](#). Muestra el ciclo con aspiración normal $5'''-5''-1'^*$ (con línea de trazos) y el [ciclo](#) turboalimentado (con línea continua), por ahora para el caso particular de $P'_{ad} = P'_{es}$, por simplicidad $7-1'-1''$. Obsérvese que se alcanzan mayores presiones máximas al turboalimentar si se mantiene la relación de compresión r_c y el calor liberado. Obsérvese (se detallará más adelante) que el trabajo externo de expansión ideal (área rayada a 45° en rojo) es netamente superior al de compresión (área rayada a -45° en azul) mientras P_5 sea lo suficientemente mayor que P'_{es} . Como P_5 sube al aumentar P'_{ad} no aparece límite teórico evidente al **grado de turboalimentación** posible: ρ_{ad}/ρ_{atm} .

Figura 4.1



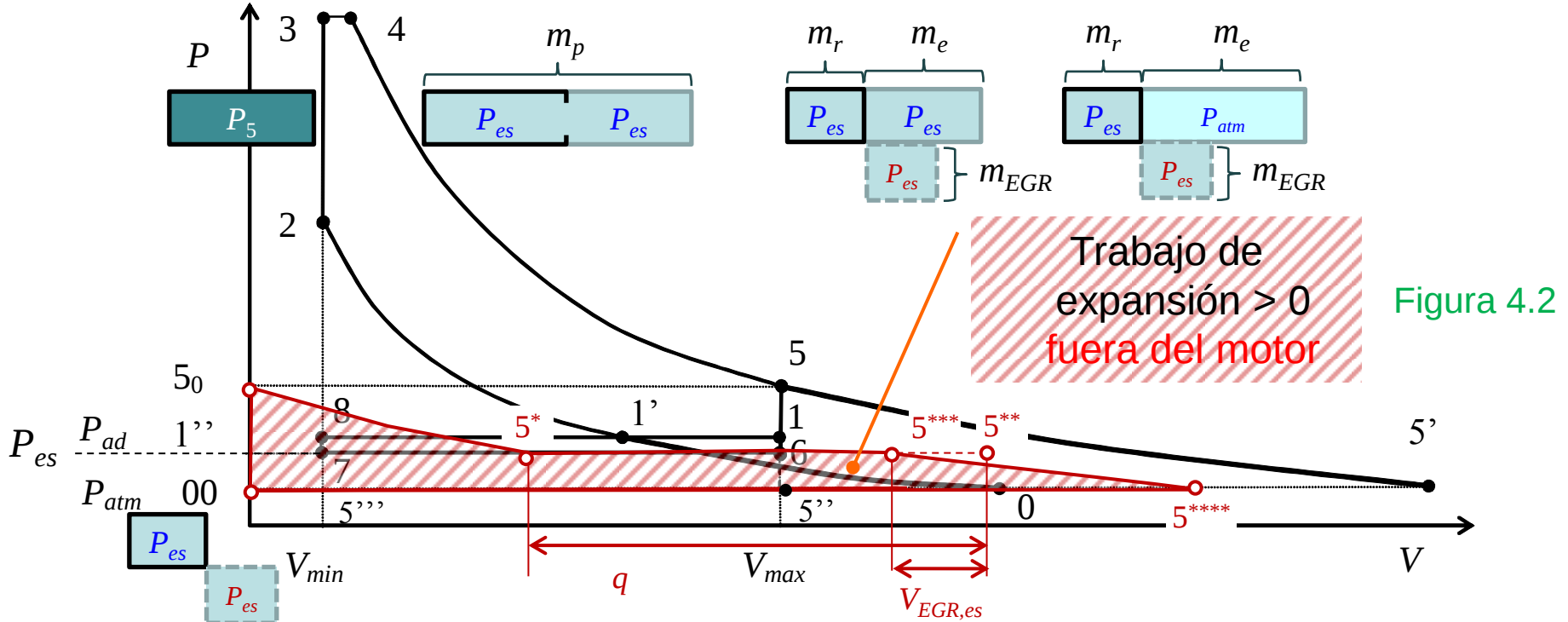
Puede observarse que al añadir los procesos de turboalimentar, se obtiene un [ciclo Miller/Atkinson](#) de expansión completa y sin posenfriamiento en este caso; si bien la parte baja se realiza fuera, sobrando trabajo en el grupo turbo, que podría añadirse al eje (p. e. motor [turbocompound](#)).



4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal (cont.).

- Se asume evoluciones en la turbina y en el compresor adiabáticas y reversibles, luego isentrópicas. En estas condiciones el trabajo de compresión es mínimo y el de expansión máximo (véase proceso de compresión y de expansión, **Caps. 4 y 6**). Las transferencias de gases entre grupo turbo y motor son adiabáticas, a la misma presión ($P \equiv P'$), luego isentrópicas también. Sin embargo, entre el compresor y el motor hay un posenfriador que reduce su volumen a $P_{ad} = \text{cte.}$, desde los puntos 1'' a 1'.
- Aunque tanto la compresión como la expansión en el grupo turbo se hacen con turbomáquinas, **la isentropía y el tener los mismos estados iniciales permite idealizarlas asumiendo otro tipo de máquina e iguales evoluciones, que por conveniencia y simplicidad asumimos que es un volumen de control de volumen variable, obviamente alcanzándose el mismo estado final.** Realizan un ciclo cerrado para quedar inalterados. Consecuentemente no necesitamos incluir el trabajo del lado exterior de la frontera, donde actúa la atmósfera, **Ec. (1.2)**.
- Para calcular el **trabajo máximo obtenible del escape** del motor, usemos la **Fig. 4.2**. Supongamos un volumen expansor externo muy próximo a la válvula de escape, inicialmente con $V = 0$ y a P_{atm} , punto 00; de tal manera que la presión sube a P_5 , punto 5₀ en el instante de abrirla. A continuación expansiona hasta P_{es} por aumento de su volumen hasta V_{5*} , mientras que el cilindro del motor permanece estacionario en V_5 , cayendo su presión por salida de gases en el proceso interno 5-6 $\equiv 1$. Alcanzada P_{es} , el émbolo del motor realiza la carrera de expulsión 6-7 disminuyendo su volumen en $q = V_{max} - V_{min}$ y aumentando en la misma cantidad el volumen externo (la temperatura es uniforme por haberse expandido isentrópicamente todo él m_p), por lo que la presión se mantiene en P_{es} y se llega al punto 5**. Se cierra la válvula de escape en PMI y del volumen externo V_{5**} solo V_{5***} es posible expansionarlo hasta P_{atm} pues el EGR se pierde hacia la admisión. El gas turbinado corresponde a una masa menor que la que había en el cilindro, m_e quedando en el cilindro m_r y recirculando m_{EGR} . Se cierra

4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal (cont.).



- Separando el tramo rectangular del área rayada entre 5^* y 5^{***} , coincide lo restante con el área triangular $5-5'-5''-5$ del ciclo del motor, lo cual se indica en la Fig. 4.1. Esto ocurre desplazando $V_{EGR,es} + V_{min}$ hacia la derecha, $_{es}$ indica condiciones del colector de escape. Tras corregir $V_{EGR,es}$ por enfriamiento y cambio de presión de P_{es} a P_{ad} , cosa que se ha aceptado para construir la Fig. 4.1 se convierte en $V_{EGR,ad}$. El triángulo $5_0-5^*-1''$ constituye el **trabajo de pulso**, pues corresponde al pulso de escape espontáneo del motor, aunque algunos lo consideran el $5-5'-5''-5$.
- Trasladando el rectángulo a la zona entre P_{ad} y P_{atm} y entre V_{5^*} y $V_{5^{***}}$ satisface parte del trabajo de compresión, indicado en la Fig. 4.1. Constituye el **trabajo estacionario**, pues corresponde a un trabajo constante en el tiempo.
- El trabajo total en la Fig. 4.1 es el área $5-5'-5''-5'''-5''''-1'-1-5$. Ni el EGR ni los residuales pasan por la turbina.
- Se estudia a continuación el caso general con $P_{es} \neq P_{ad}$.

4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal (cont.).

• Cuantificación del trabajo máximo obtenible del escape, Fig. 4.2:

$$\left. \begin{array}{l}
 1^\circ \text{ Subida desde } P_{atm} \text{ hasta } P_5 \text{ con } V = 0. \tau = 0. \\
 2^\circ \text{ Expansión de } m_p \text{ recibiendo gases desde } P_5, V_5 \\
 \text{a } P_{es}, V_{5*}; \text{ cilindro del motor a } V = \text{cte.} \\
 3^\circ \text{ Recibir más gases hasta } P_{es}, V_{5***}. \text{ Volumen de (expansor} \\
 \text{+cilindro+EGR) constantes. Pérdida de } V_{EGR,es}. \\
 4^\circ \text{ Expansión de } m_e \\
 \text{desde } P_{es} = P_1, \text{ hasta } P_{atm}, \text{ cilindro cerrado.} \\
 5^\circ \text{ Expulsión de } m_e \text{ a } P_{atm} \text{ hasta } V = 0.
 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{e,max} = \underbrace{\int_{5_0}^{5*} PdV + \int_{5***}^{5****} PdV}_{\substack{2^\circ \text{ y } 4^\circ. \text{ Adiabático:} \\ m_p(u_5 - u_{5*}) + m_e(u_{5***} - u_{5****}) \\ \text{"Trabajo de pulso"}}} - \underbrace{P_{atm} V_{5****}}_{\substack{5^\circ \\ \text{Compartido} \\ \text{entre trabajos} \\ \text{de pulso y} \\ \text{estacionario.}}} + \underbrace{(V_{5***} - V_{5*}) P_{es}}_{\substack{3^\circ \\ \text{"trabajo estacionario"} \\ q - V_{EGR,es}}} > 0$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Gicp; propie. productos} \equiv \text{residuales} \Rightarrow \tau_{e,max} = m_p c_{v,p} (T_5 - T_{5*}) + m_e c_{v,p} (T_{5***} - T_{5****}) - P_{atm} V_{5****} + (q - V_{EGR,es}) P_{es}; \gamma_p = c_{p,p} / c_{v,p} \\
 q = \frac{V_{max}}{V_5} - V_{min} = V_5 (1 - 1/r); T_{5***} = T_{5**} = T_{5*} = T_5 \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}}; T_{5****} = T_{5***} \left(\frac{P_{atm}}{P_{es}} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}}; P_{es} V_{EGR,es} = m_{EGR} R_{g,p} T_{5*}; m_p = m_e + m_{EGR} + m_r \\
 P_{atm} V_{5****} = m_e R_{g,p} T_{5****}; P_5 V_5 = m_p R_{g,p} T_5; \frac{R}{PM_p} = R_{g,p} = R_{g,r}; \text{Ec. (4.4)} \rightarrow m_e. \text{Ec. (4.0)} \rightarrow m_p \text{ y } m_{EGR} \Rightarrow m_{EGR} = m_e \frac{EGR_a}{1+F}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{e,max} = \frac{1}{m_e R_{g,p} T_5} \left\{ \frac{m_p}{m_e} \left[1 - \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \right] + \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \left[1 - \left(\frac{P_{atm}}{P_{es}} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \right] \right\} - \left(\frac{P_{atm}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} + \left[\frac{m_p}{m_e} \left(1 - \frac{1}{r} \right) - \frac{EGR_a}{1+F} \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{-1/\gamma_p} \right] \frac{P_{es}}{P_5}; \frac{m_p}{m_e} = \frac{1+F+EGR_a}{(1+F)(1-f)}$$

- Puede observarse que el trabajo máximo es directamente proporcional a la temperatura de fin de expansión en el motor T_5 y es necesario que $P_5 > P_{atm}$ para que se pueda turboalimentar.

4.1.- Energía para la turboalimentación. Modelo ideal (cont.).

- La compresión se realiza fuera del motor, véase la Fig. 4.1 por un "compresor" asumido volumétrico. Muestra el ciclo cerrado de compresión desplazado horizontalmente para encajar con el punto 1' del motor. El aire es recibido de la atmósfera desde volumen exterior nulo a P_{atm} hasta llegar a V_a y tras ser comprimido isentrópicamente la masa m_a hasta P_{ad} , es transferido al motor a presión constante P_{ad} mientras se enfría, volviendo a cero el volumen de control que lo contiene. Desplazando en horizontal el ciclo exterior resultante $V_{min} + V_{EGR,ad}$ hacia la derecha coincide el punto a con 1'', como indica la Fig. 4.1. $V_{EGR,ad}$ es el volumen ocupado por el EGR, que ya está comprimido, a P_{ad} . La evolución 1''-1' corresponde a la reducción de volumen isobara del aire en el posenfriador.

- Cuantificación del trabajo de compresión ideal, Fig. 4.1:**

$$\left. \begin{array}{l}
 1^{\text{er}} \text{ Admitir aire de la atmósfera a } P_{atm}; \tau = P_{atm} V_{0'} \\
 2^{\text{o}} \text{ Comprimir desde } P_{atm} \text{ hasta } P_{ad} \\
 3^{\text{er}} \text{ Volumen de compresor y cilindro constante a } P_{ad} \\
 \text{ hasta } V = 0; \tau = -P_{ad} V_{1''}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_c = - \underbrace{\int_{0'}^{1''} P dV}_{\text{Adiabático}} + P_{atm} V_{0'} - P_{ad} V_{1''} < 0 \Rightarrow \tau_c = \underbrace{H_{atm} - H_a}_{\substack{m_a (h_{atm} - h_a) \\ \text{Salto entálpico}}} < 0$$

Área 5''-0'-1''-1'-5'''-5'''-5'''

- H_a será a la que se llegue evolucionando isentrópicamente. .
- En el estudio del proceso de compresión en el Cap. 5, Ecs. (5.2) y (5.3), se puede comprobar la coincidencia de esta expresión con la potencia de compresión en un flujo estacionario, aunque allí se considera positiva. También allí se considera la energía cinética.
- Análogamente, el trabajo extraído por una turbina adiabática resulta ser igual al salto entálpico entre su entrada y su salida, lo que depende de la relación de presiones $\pi_{e,tt}$, que ha de coincidir con la Ec. (4.2). Para turbinas véase las Ecs. (7.2) y (7.3).

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite.

- El que el volumen intermedio entre cilindro y la máquina expansora sea nulo permitiría a una turbina expansionar desde la presión instantánea en el cilindro, que la distinguimos como P_{cil} . Es una idealización alejada de la práctica, pues las turbinas no pueden expansionar eficientemente desde cualquier presión y habría que tener una por cilindro, que además actuaría en condiciones fuertemente no estacionarias. Para aproximarse a este ideal, en muchos motores se eligen conductos estrechos y lo más cortos posible, constituyendo un **sistema de pulsos**, tratando de parecerse al ideal hasta ahora visto y sin incluir un depósito de gases en el colector de escape .
 - ✓ Esta técnica adolece del inconveniente de que los pulsos de un cilindro viajan por el colector hacia la turbina, y también hacia otros cilindros, reflejándose en ambos; se esquematizan en la [Fig. 4.3](#). Entre otras perturbaciones, reintroducen gases de escape en el cilindro al llegar ondas de presión. Esto es notorio si el número de ellos unidos es $N > 3$ para $T = 4$. Con $N = 3$ esto se evita porque $\underline{AAE} + 180^\circ + \underline{RCE} \approx 720^\circ/3$ con lo que cuando abre el escape de un cilindro, los otros dos están cerrados. Por tanto, el sistema de pulsos resultaría adecuado para motores con conductos independientes para cada cilindro y que atacaran directamente a la turbina distribuidos por su periferia, en admisión parcial a ella, p. e. [motores en estrella](#).
- Una alternativa opuesta y límite también, especialmente válida para motores estacionarios de un gran número de cilindros, ampliamente usada, es el **sistema de presión constante**. Se instala un amplio volumen intermedio. Significa aceptar degradación de la energía cinética del pulso en térmica (aumento de la entropía s), especialmente tras el paso a través de la/s válvula/s de escape, por expansión hasta esa presión baja cuasi-constante P_{es} sin transferencia de trabajo al exterior. La turbina expansiona desde $P_{es} = \text{cte.}$ hasta la atmósfera con lo que se la evita estar sometida a pulsos, aumentando su fiabilidad.
 - ✓ El sistema de presión constante adolece del inconveniente de aumentar el retraso en la respuesta del turbo, pues una variación de P_{es} lleva consigo que el llenado o vaciado correspondiente del depósito tome tiempo hasta llegar a las nuevas condiciones operativas.

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite.

- El proceso real de descarga del cilindro es no estacionario, especialmente durante el pulso de escape espontáneo. Durante éste se causa irreversibilidad interna viscosa en la pipa conducto, colector y depósito (asumimos es adiabático), luego aparece un aumento de s con $h_{cil} = h_{es} + V_{es}^2/2 = h_{es,t} = \text{cte.}$, siendo V_{es} la velocidad del gas a la entrada de la turbina. Contemplemos los dos modelos límite, ambos irreversibles:

- Sistema de presión constante:** Si se dispone de un depósito intermedio de gran volumen tal que hace que: a) la presión en él sea cuasi-constante, homogénea, $P_{cil}(t) > P_{es} \cong \text{cte.}$ El salto entálpico disponible para que la turbina extraiga trabajo ($es, t-6t$) $\Delta h_{tes,6} = h_{est} - h_{6t}$ es menor que el ideal ($cil-6,s$) y tanto menor cuanto menor sea P_{es} , por reducirse π_{es} , o lo que es lo mismo, cuanto mayor sea el aumento de entropía $s_{es} - s_{cil}$. Al ir bajando $P_{cil}(t)$ se aproximará a P_{es} hasta ser $P_{cil} = P_{es}$ anulándose las irreversibilidades. b) La energía cinética en es es despreciable por la amplitud del depósito, aunque eso es irrelevante por ahora.
- Sistema de pulsos:** Si se dispone un conducto intermedio estrecho, de volumen exiguo, sube la ahora no estacionaria $P_{es}(t)$ en una zona cercana al cilindro hasta valores cercanos a $P_{cil}(t)$ con lo que la velocidad V_{sa} puede ser menos distinta a la del gas circundante V_{es} , Fig. 4.3. El pulso del escape ($\rightarrow$) viaja a velocidad sónica y puede llegar casi íntegro a la turbina, con moderadas irreversibilidades, $s \cong \text{cte.}$ Las partículas fluidas portan un mayor $\Delta h_{tes,6}(t)$. La presión en el conducto no es homogénea.

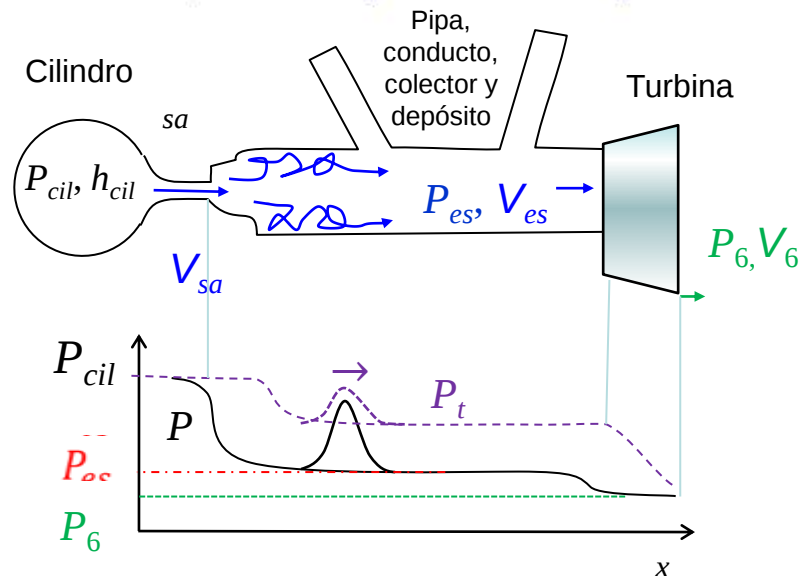
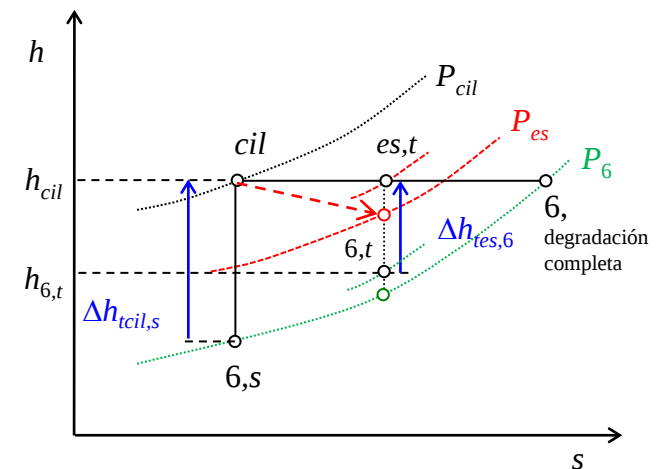


Figura 4.3



4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite.

- 3. Sistema mixto:** se logra aprovechar el mayor salto entálpico de los pulsos junto con un tramo constante, con $P_{es} > P_6$. El sistema mixto ideal ya se ha calculado antes, Ec. (4.2).
- El modelo ideal queda así configurado como el máximo posible.
 - El sistema de presión constante queda configurado como el menos eficiente de los tres en el propósito de evitar degradaciones antes de la turbina. La realidad estará por encima de este sistema si se logra transmitir a la turbina energía en forma de pulsos.
 - Seguimos asumiendo tracto de escape adiabático, turbina isentrópica y conductos sin fricción viscosa, idealizaciones de la realidad. Más adelante, en esta sección se admitirá tracto diabático y reactante. En el Cap. 8 se estudian las irreversibilidades en la turbina y el modelo del Cap. 9 incorpora compresor y turbina irreversibles, así como degradaciones viscosas en el resto de componentes.
 - Un ideal del sistema mixto y de pulsos ya ha sido obtenido, se obtiene a continuación el ideal (turbina isentrópica) del sistema de presión constante.



4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

- Para calcular el **trabajo máximo disponible en un sistema de presión constante** hay que determinar primero el trabajo que proporciona una turbina isentrópica en régimen estacionario, despreciando las energías cinéticas pues en el depósito la velocidad es mínima y el aprovechamiento máximo pide que a la salida de la turbina la velocidad sea asimismo mínima. Llamamos T_{es} a la temperatura de escape interna, idéntica por ahora a la de entrada a la turbina, tras mezclarse los gases en el depósito intermedio adiabático. Sobre la base de un balance de energía de un volumen de control isocoro abierto que comprende la turbina, y reconociendo que los gases residuales quedan en el cilindro, se deduce que el trabajo estacionario tiene por expresión:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Adiab.: } \tau_{e,s} = m_e \Delta h_{est} = m_e (h_{es,t} - h_{6t}) \\ \text{Reversible, gicp, propie. prod.} \equiv \text{residu.} \end{array} \right\} \tau_{e,s} = m_e c_{p,p} T_{es} \left[1 - \left(\frac{P_{atm}}{P_{es}} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \right] \Rightarrow \frac{\tau_{e,s}}{m_e R_{g,p} T_5} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p - 1} \frac{T_{es}}{T_5} \left[1 - \left(\frac{P_{atm}}{P_{es}} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \right]$$

$$m_e = m_a (1 + F), \text{ por no pasar los residuales ni el EGR por la turbina} \quad (4.4)$$

- Para determinar T_{es}** imaginamos un proceso similar al de la Fig. 4.2, pero asumiendo que entre cilindro y depósito la válvula de escape reduce la presión hasta P_{es} en todo momento. Para obtener una ecuación sencilla, se plantea un balance de masa y energía que considera adicionalmente en este cálculo $P_{es} = P'_{es}$ y $T_r = T_{es}$. Así se puede tomar como estado final ($_{es}$) la totalidad de la masa m_p en condiciones homogéneas, tanto si está dentro como al salir del cilindro por el escape forzado, manteniéndose el volumen total V_{es} . Se obtiene una ecuación aproximada que corresponde al límite $r = \infty$ (Payri y Desantes, eds. 2011) del cálculo exacto, Anexo I:

$$\left. \begin{array}{l} m_p (u_5 - u_{es}) = P_{es} (V_{es} - V_5); \text{ propie. productos} \equiv \text{propie. de residuales} \\ \text{Gicp: } P_{es} V_{es} = m_p R_{g,p} T_{es}; c_{v,p} = R_{g,p} / (\gamma_p - 1); u_5 - u_p = c_{v,p} (T_5 - T_{es}) \\ P_5 V_5 = m_p R_{g,p} T_5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T_{es}}{T_5} = \frac{1}{\gamma_p} \left[1 + (\gamma_p - 1) \frac{P_{es}}{P_5} \right] \leq 1 \quad (4.5)$$

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

- Una estimación de T_5 y de P_5 para la Ec. (4.5) puede obtenerse del ciclo de presión limitada dada P_{max} con tramo de combustión a volumen constante, seguido de tramo de combustión a presión constante. Esto último ocurre a $P_3 = r_p P_2$ hasta $V_4 = r_v V_3$. El ciclo se desarrolla con un gicp, admitiendo adiabáticamente a $P'_{ad} = cte.$ $< P_{ad}$ desde el PMS hasta el RCA en el punto 1' y posteriormente comprimiendo isentrópicamente hasta el PMS mezcla fresca (f) de aire, combustible vaporizado en el caso $E = 0$, y con gases de escape recirculados en proporción másica $EGR_a = m_{EGR}/m_a$. Al entrar al cilindro se mezclan con gases residuales del ciclo anterior en proporción másica f y temperatura T_r , dando lugar a $T_{1'} > T_{ad}$ y propiedades (R_g, γ) de una masa total m . Posteriormente se expansionan isentrópicamente productos de la combustión (p) con dosado F , por lo tanto de propiedades diferentes ($R_{g,p}, \gamma_p$), hasta el PMI, y V_5 . La expulsión adiabática se realiza a $V_5 = cte.$ y posteriormente a $P'_{es} = cte. > P_{es}$, hasta el PMS, tal como indica el ciclo al comienzo de este capítulo. Resulta:

- Se acepta que residuales y productos tienen iguales propiedades: $\gamma_r = \gamma_p$ y por ende $c_{v,r} = c_{v,p}$.

$$\frac{T_{1'}}{T_{ad}} = \frac{(1-f) \overbrace{(c_{v,f} / c_v)}^{\approx 1} \gamma_f}{1 + \frac{(\gamma-1)(r_c-1)}{r_c} - f \frac{c_{v,p}}{c_v} \frac{T_r}{T_{1'}}} \approx 1,01 \text{ a } 1,1 \quad (4.10)$$

- Se asume que los gases residuales se obtienen de la expansión isentrópica dentro del cilindro desde 5 a 6 por salida de gases. Y son expulsados en la carrera de escape adiabáticamente, luego:

$$\frac{T_r}{T_{1'}} = \frac{T_5}{T_{1'}} \left(\frac{P'_{es}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p-1}{\gamma_p}} \quad (4.11)$$

- Del ciclo se obtiene: $f = \frac{m_r}{m} = \frac{m_p / m}{r} \left(\frac{P'_{es}}{P_5} \right)^{\frac{1}{\gamma_p}} = \frac{m_p / m}{r_v (r_c^\gamma r'_a r_p)^{1/\gamma_p}} \approx 0,02 \text{ a } 0,07; r'_a = \frac{P'_{ad}}{P'_{es}}.$ (4.12)

- En estas expresiones se puede admitir que la presión en el interior del cilindro es $P'_{ad} < P_{ad}$ por degradaciones a través de la pipa de admisión y $P'_{es} < P_{es}$ por degradaciones a través de la pipa de escape.

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

- r_p y r_v se obtienen de la ecuación de compatibilidad con el combustible. Iguala la energía térmica liberada en la combustión a volumen constante del combustible con la necesaria para aumentar la temperatura y presión en los procesos 2-3 y 3-4 del ciclo, una vez cambiada la composición por la combustión. $\eta_{c,VC}$ es el rendimiento de combustión a volumen constante, muy próximo al de presión constante para hidrocarburos del petróleo. J_c tiene en cuenta la transferencia de calor a las paredes, Ec. (4.19):

$$\frac{r_c^{\gamma-1}}{\gamma_p - 1} \left[r_p - \frac{\gamma_p - 1}{\gamma - 1} + \gamma_p r_p (r_v - 1) \right] = \underbrace{\frac{F(1-f)}{1 + EGR_a + (1-E)F}}_{\dot{q}_{lc}} \frac{L_{i,VC} \eta_{c,VC} J_c}{R_g T_{1'}}; \text{Solución:} \begin{cases} \text{Se impone } r_{p,max} = \frac{P_{max}}{P'_{ad} r_c^{\gamma-1}} \\ \text{y se despeja } r_v, \text{ posibilidades} \\ \text{(a) } r_v \geq 1 \text{ OK} \\ \text{(b) } r_v < 1 \Rightarrow \begin{cases} r_v = 1 \\ \text{Se despeja } r_p \leq r_{p,max} \end{cases} \end{cases}$$

- Esta ecuación liga r_p y r_v con el dosado F con el que se alimenta al motor.
- Para los hidrocarburos petrolíferos actuales el poder calorífico a volumen constante $L_{i,VC}$ coincide prácticamente con el habitualmente proporcionado, que es a presión constante $L_{i,PC}$. Por lo tanto coinciden prácticamente también los rendimientos de combustión correspondientes $\eta_{c,VC}$ y $\eta_{c,PC}$. Para valores orientativos puede consultarse en J. B. Heywood, [1], Fig. 3-9, p. 82.
- En los MEC se suele buscar una ley de quemado (a través de la ley de inyección) que no haga sobrepasar la presión máxima del ciclo de un cierto valor, por resistencia estructural, típicamente en torno a 120 bar en motores de inyección directa de automoción, valor que puede llegar a 140 bar. A carga parcial puede darse que $r_v = 1$, por no alcanzarse P_{max} .
- En los MEP la presión máxima viene a ser un 70% de la presión que se alcanzaría caso de ser la combustión a volumen constante, luego $r_v > 1$, por ser la combustión progresiva.

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

- Es necesario agregar datos, como la relación de calores específicos γ como función de la temperatura media del proceso para gasolina ($E = 0$) y Diésel o gasolina inyección directa ($E = 1$). Para frescos usar $f = 0$ y T_{ad} . Para residuales y turbina de escape puede usarse T_r pues son productos. Los resultados son muy sensibles a γ .

$$\gamma = 1,41 - 0,045(1-E)F_R - 7,5 \times 10^{-5} K^{-1} \bar{T} + 0,01(f + EGR_a) \quad (4.12)$$

$$F_R \leq 1: \gamma_{p,pob} = 1,411 - 0,03F_R - 6,7 \times 10^{-5} K^{-1} \bar{T}; F_R > 1: \gamma_{p,ric} = \gamma_{p,pob} \Big|_{F_r=1} + 0,1(F_R - 1)$$

- Durante la compresión, un valor razonable de $\bar{T}$ a efectos de calcular γ es una media durante la compresión:

$$\bar{T}_c = (T_{ad} + \tilde{T}_2) / 2 = T_{ad} (1 + r_c^{\tilde{\gamma}-1}) / 2 \quad \tilde{\gamma} = 1,37 - 0,045(1-E)F_R$$

- Durante la combustión y expansión, un valor empírico razonable de $\bar{T}$ a efectos de calcular γ_p es: una media entre temperaturas al final de una combustión a $P = \text{cte.}$ estimada y tras la expansión.

$$\bar{T}_e = T_{ad} r_c^{\tilde{\gamma}-1} (\tilde{r}_v + \tilde{r}_v^{\tilde{\gamma}} / r_c^{\tilde{\gamma}-1}) / 2 \quad \tilde{r}_v = 1 + q_{lc} (\tilde{\gamma} - 1) / (r_c^{\tilde{\gamma}-1} \tilde{\gamma})$$

- Para el peso molecular de productos, EGR y residuales de aire con gasolina y gasóleo Diésel:

$$F_R \leq 1: \left\{ \begin{array}{l} \text{Diésel automoción.} \approx C_{10,8} H_{18,7} \\ \text{Gasolina} \approx C_{8,26} H_{15,5} \end{array} \right\}; PM_{p,pob} = \left(PM_a + \left(1,55 - 0,805 \frac{h}{c} \right) F_R \right) \frac{g}{mol}; F_R > 1: PM_{p,ric} = PM_{p,pob} \Big|_{F_r=1} - 5,12(F_R - 1) \frac{g}{mol}$$

- Para el peso molecular de reactantes:

$$\frac{1}{PM} = \frac{(1-f)}{1 + F(1-E) + EGR_a} \left[\left(\frac{1}{PM_a} + \frac{F(1-E)}{PM_{comb}} \right) + EGR_a \underbrace{\frac{1}{PM_{EGR}}}_{PM_p} \right] + \frac{f}{PM_r}; PM_a = 28,975 \frac{g}{mol}; C_c H_h: PM_{comb} = c PM_c + h PM_H$$

$\frac{12,011}{mol} \quad \frac{1,008}{mol}$

- Resulta finalmente:

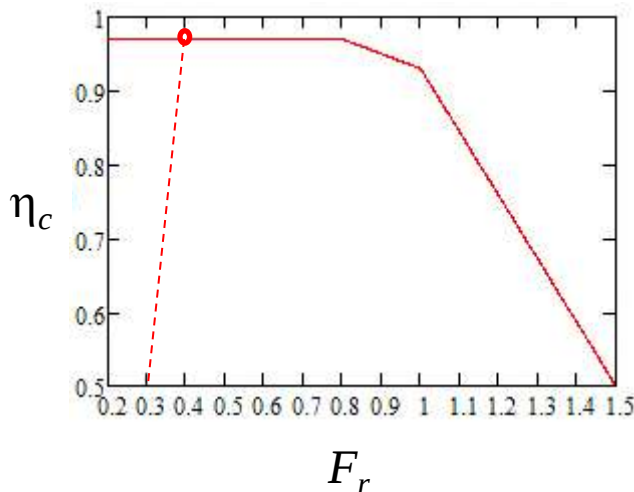
$$\frac{T_5}{T_{1'}} = r_p r_v^{\gamma_p} \frac{r_c^{\gamma-1}}{r^{\gamma_p-1}} \quad (4.17)$$

$$\frac{P_5}{P'_{ad}} = \frac{T_5}{T_{1'}} \frac{r_c}{r} \frac{m_p R_{g,p}}{m R_{g,f}}$$

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

Datos orientativos:

- η_c es < 1 por capa límite térmica en contacto con las paredes que apaga la llama o no permite la ignición. Además hay disociación de los productos e imperfecciones en el sistema de combustión.
- η_c es alto con motor caliente y quemando bien.
 - $\cong 0,97$ para $F_r < 1$ MIF (MEP). Bajaría al empobrecer demasiado.
 - $\cong 0,98$ para $F_r < 1$ MIE (MEC).
 - Al acercarse a $F_r = 1$ baja por carencia de oxígeno y cae bastante para $F_r > 1$.
 - Unos valores representativos como función de F_r (ver J. B. Heywood. *Internal Combustion Engines*, Fig. 3-9, p. 82).
 - La línea de trazos indica fallo de combustión para MEP, arbitrariamente, en $F_{R,min} = 0,4$.



- Un estudio de la transferencia de calor indica (Payri y Desantes, eds. 2011, p. 276) que aproximadamente:

$$1 - J_c \propto \frac{T_{gas} - T_{refrigerante}}{(\rho_{gas} u^*)^{0,25}} \quad (4.19)$$

$u^* \cong ku$ donde k depende del nivel de turbulencia medio engendrado en la cámara de combustión.

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

$$T_{es,e,real} = T_{es,e} - \Delta T_{pipa} - \Delta T_{col} + \Delta T_{postcomb}$$

- ΔT_{pipa} y ΔT_{col} son las caídas de temperatura por transferencia de calor en el tracto de escape: válvula y pipa de escape y por el colector de escape. Pueden llegar a 200 K a plena carga. Su estimación es laboriosa y necesita información detallada del motor y su entorno térmico relevante.
- $\Delta T_{postcomb}$ es el incremento de temperatura por postcombustión de inquemados en el tracto de escape. Una estimación considerando combustión completa a presión constante, válido para $F_{R,min} \leq F_R \leq 1$ es:

$$\Delta T_{postcomb} = L_i \overbrace{(1 - \eta_{c,PC})}^{\sim 2-3\% \text{ en caliente}} F / \left[\left(\frac{\gamma_p R_{g,p}}{\gamma_p - 1} \right) (1 + F + EGR_a) \right]; \approx 0 \text{ para } F_R > 1 \text{ y } \approx 0 \text{ para } F_R < F_{R,min}$$

• Análisis:

- La Ec. (4.12) requiere de temperaturas del ciclo, las cuales, a su vez, dependen de los valores de gamma. Es pues necesario recurrir a iterar, o bien estimar unos valores iniciales de r_p y r_v para determinar las $\bar{T}$ en la Ec. (4.13).
- A la vista de la relación de compatibilidad, T_5 y P_5 resultan casi lineales con $F_R < 1$ a través de r_p y r_v .
- Puede verse que T_5 resulta proporcional a $T_{ad} \cong T_1 - 30$ a 50 K. Ésta resulta del proceso de compresión del aire atmosférico y del posenfriamiento. No se han incluido efectos de aumento de temperatura al paso por la válvula de admisión y al entrar en el cilindro.
- Puede verse que P_5 resulta proporcional a P'_{ad} . Ésta resulta del proceso de compresión y de la pérdida de carga en conductos y posenfriador.

4.2.- Energía para la turboalimentación. Modelos límite (cont.).

• Análisis (cont.):

- La Fig. 4.4 presenta los trabajos máximo Ec. (4.2) (líneas en rojo, continua para $EGR_a = 0,5$ y de trazos para $EGR = 0$) y del sistema de presión constante Ec. (4.5) (líneas en rojo de raya y punto) con turbina isentrópica en función de P_{es} . Puede observarse que:
 - ✓ Ambos sistemas coinciden cuando $P_{es} = P_5$. La irreversibilidad del sistema de presión constante se anula.
 - ✓ El sistema de presión constante se aproxima notablemente al ideal a partir de una P_{es} aproximadamente la mitad de P_5 por el descenso de la irreversibilidad en el escape. En definitiva, para altos grados de turboalimentación.
 - ✓ El sistema ideal, representativo de un sistema de pulsos mixto eficiente, resulta ventajoso frente al de presión constante para P_{es} bajas en comparación con P_5 . En definitiva, para bajos grados de turboalimentación.
- La Fig. 4.6 presenta también (con líneas finas azul y violeta) aproximadamente (véase Cap. 9) el trabajo de turbina necesario para la compresión isentrópica con cociente de temperatura T_5 a T_{atm} de 2 y de 3, valores moderados, véase la Ec. (4.17), a modo indicativo y $P_{es} = P_{ad}$. Resultan ser notablemente inferiores a los trabajos obtenibles de turbina isentrópica. Queda pues margen amplio para irreversibilidades, tanto en las turbomáquinas como adicionales en los trectos de admisión y escape.

$$\begin{aligned}
 P_5 &= 4 \text{ bar} \\
 P_{atm} &= 1 \text{ bar} \\
 \gamma &= 1,35 \\
 \gamma_p &= 1,3 \\
 r &= 15 \\
 F &= 1/30
 \end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{e, \left\{ \begin{smallmatrix} \text{max} \\ s \end{smallmatrix} \right\}}}{m_e R_{g,p} T_5}$$

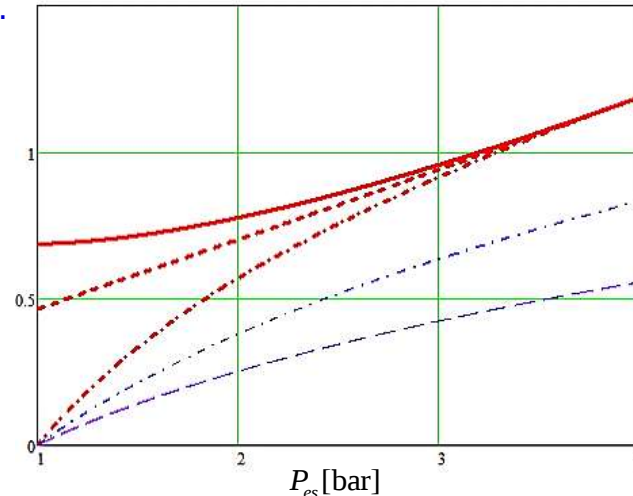


Figura 4.6



4.3.- Resumen y preguntas de autoevaluación.

Sobrealimentación

- Si se coloca un compresor entre la atmósfera y la entrada del motor (válvulas de admisión), la densidad de admisión puede ser superior a la atmosférica y así lograr que la masa de aire atrapada al finalizar el proceso de admisión fuera mayor.
- Se puede aumentar aún más la densidad si los gases calientes tras la compresión se enfrían.
- Parte del trabajo de compresión lo recupera el émbolo del motor al admitir a $P'_{ad} > P'_{es}$, siendo positiva el área del bucle de bombeo, Fig. 1.3.
- Al poderse aumentar la masa de combustible que se añada, p. e. igual dosado, el trabajo por ciclo podrá aumentar, Ec. (1.4), $\tau_e = m_{comb} L_i \eta_e$ y con ello la *PME* y consecuentemente la potencia del motor a igual régimen (mayor par).
- Si no se aumenta la masa de combustible proporcionalmente al aumento de masa de aire, el dosado disminuirá. Ello trae consigo un aumento de la eficiencia del ciclo (p. e. ver eficiencia de un ciclo de aire/combustible en la bibliografía). El aumento de potencia en este caso se debe exclusivamente al aumento de eficiencia.

Turboalimentación:

- El trabajo necesario para la compresión puede obtenerse de los gases de escape al ser los ciclos Otto y Diésel de expansión incompleta, $P_s > P_{atm}$. Basta para ello crear contrapresión en el escape con una turbina, necesaria para mover el turbocompresor, reduciendo así la irreversibilidad de la expansión libre en el escape..
- El trabajo neto del ciclo (área P - V del bucle de alta y de baja) se ve reducido por la contrapresión, pero al subir P_{ad} se amortigua este efecto, incluso llegando a aumentar si $P_{ad} > P_{es}$.
- Es posible trabajar con P_{ad} igual o distinto que P_{es} , ofreciendo $P_{ad} > P_{es}$ la ventaja adicional de poder reducir el

4.3.- Resumen y preguntas de autoevaluación (cont.).

Turboalimentación: (cont.)

- No conviene instalar un expansor volumétrico en el escape pues sería exagerado su volumen. $V_{s'} \gg V_s$. El grupo turbo resulta compacto, ligero y de coste altamente rentable por conseguirse más que duplicar la potencia del motor.
- El resultado de la turboalimentación es que el motor siente renovar gases con una atmósfera artificial de presión superior a la atmosférica, la cual se puede variar a voluntad.

Sistemas

- El sistema de **presión constante** aumenta su eficiencia (menos irreversibilidades) con respecto al ideal al aumentar P_{es} , por lo que resulta idóneo para motores con π_c de 2 a 4 o incluso 5.
- Los sistemas turbos reales de motores de automoción e industriales pequeños trata de aumentar la energía aprovechada aprovechando los pulsos, dada el moderado grado de sobrealimentación generalmente usado.
 - ✓ Para múltiplos de $N = 3$ cilindros resulta especialmente adecuado, uniéndose de 3 en 3. Para múltiplos de $N = 4$ se opta por unirlos en parejas e impedir interferencias con un estator-voluta de turbina dividido, tipo “twin” o “twin scroll”, véase fotografía del grupo turbo al final del **Capítulo 6**.
- Los motores de 1 y 2 cilindros no se suelen turboalimentar por ser demasiado el tiempo que no se “sopla” la turbina, girando mientras tanto en vacío por lo que pierde régimen. Un sistema de presión constante para ellos podría valer, pero el volumen del depósito intermedio necesario resulta exagerado. Además, los turbos pequeños no son eficientes.

4.3.- Resumen y preguntas de autoevaluación (cont.).

Preguntas de autoevaluación:

4.1	En el ciclo de presión limitada aquí expuesto no se usa el símil de aporte y extracción de calor al ciclo para simular la combustión y los procesos de renovación de la carga.	NO
4.2	Los motores con cilindros en V con más de $N = 4$ cilindros totales son idóneos para instalar 2 turbos, uno para cada fila.	SI
4.3	Observando la Fig. 4.1 se puede apreciar una optimización interesante. Se usan turbomáquinas para la parte baja del ciclo, apropiadas para el gran volumen específico y máquina volumétrica para la parte alta del ciclo, que si fuera turbomáquina, su altura de álabes resultaría demasiado pequeña, por lo tanto ineficiente y frágil.	SI
4.4	La causa de que $\gamma_p < \gamma$ se debe a la formación de especies químicas triatómicas: CO_2 y H_2O y a la alta temperatura.	SI
4.5	El ciclo de presión limitada simplifica el proceso de combustión progresiva por dos tramos de evoluciones simples.	SI
4.6	Incluso tras la turbina, los gases de escape están aún calientes, por lo que contienen energía térmica aprovechable, p. e. para cogeneración.	SI
4.7	La fracción del trabajo máximo obtenible en el escape de la cantidad $mR_{g,r}T_5$ puede llegar a ser > 1 en la Fig. 4.4 ¿es eso físicamente correcto?	SI
4.8	¿Es $m_p R_{g,p} T_5$ la energía interna disponible al final del ciclo?	NO
4.9	Si en un motor de aspiración normal creamos contrapresión en el escape, ¿sube la temperatura de escape corriente arriba de lo que crea la contrapresión?	SI

4.4.- Asuntos adicionales.

1. En las **Figs. 4.1** y **4.2** de este capítulo, por claridad, se ha asumido que $P'_{ad} = P'_{es}$, pero las ecuaciones usadas admiten que sean distintas.
2. $P_{ad} > P'_{ad}$ por caída de presión de remanso media a través de las válvulas de admisión, en magnitud difícil de cuantificar por la no estacionariedad del proceso. A efectos prácticos puede ser del orden de un 2% a plena potencia.
3. $P_{es} < P'_{es}$ por caída de presión de remanso media a través de las válvulas de escape, en magnitud difícil de cuantificar por la no estacionariedad del proceso de escape forzado. A efectos prácticos puede ser del orden de un 6% a plena potencia.
4. En este capítulo se ha asumido que la presión de escape del motor es la de entrada a la turbina. Entre colector de escape y turbina pudiera existir un equipo de reducción de contaminantes en los gases de escape (filtro de partículas, catalizador) que redujera esta presión hasta P_6 .
5. En el **Cap. 9** se introducirán las irreversibilidades en compresor, turbina y eje que los une para obtener una cifra más ajustada de lo que es posible con la turboalimentación.

4.5.- Apéndice I.

Temperatura de escape (corriente arriba de la turbina) del sistema de presión constante.

Instante inicial, dentro del cilindro, Fig. 4.2: $m_p = m_e + m_r + m_{EGR}; V_5 = V_{max}; T_5; P_5$

Instante final, dentro del cilindro: $m_r; V_{min}; T_{5*}; P_{es}$ Fuera del cilindro: $m_e + m_r; V_{5**}; T_{es} \neq T_{5*}; P_{es}$

Los desplazamientos, tanto del émbolo del cilindro, como de la frontera fluida que entra en la turbina ($_e$) y al sistema de EGR son a $P_{es} = \text{cte}$.

Balance de energía: $c_{v,p} \left\{ m_p T_5 - \left[m_r T_{5*} + (m_e + m_{EGR}) T_{es} \right] \right\} = \overbrace{P_{es} (V_{5**} + V_{min} - V_5)}^{\text{Trabajo hacia el exterior}}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Gicp: } P_{es} V_{5**} &= (m_e + m_{EGR}) R_{g,p} T_{es}; P_{es} V_{min} = m_r R_{g,r} T_{5*}; P_5 V_5 = m_p R_{g,p} T_5; r = V_{max} / V_{min} \\ \text{Isentropía dentro del cilindro: } T_{5*} &= T_5 \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{\frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m_r}{m_p} = \frac{1}{r} \left(\frac{P_{es}}{P_5} \right)^{\frac{1}{\gamma_p}} \quad (\text{AI.1})$$

Sustituyendo se llega a:

$$\frac{T_{es}}{T_5} = \frac{1 + \left[\gamma_p \left(1 - \frac{1}{r} \right) - 1 \right] \frac{P_{es}}{P_5}}{\gamma_p \left(1 - \frac{1}{r} \frac{P_{es}}{P_5} \right)} \quad (\text{AI.2})$$