Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

La Máquina de Turing como precusora de la Teoría de la Computación (I)

Mª Araceli Sanchis de Miguel
Grupo de Control y Aprendizaje de Sistemas

Contenido

- Motivación e interés
- Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas
- Orígenes de la computabilidad
- La Máquina de Turing

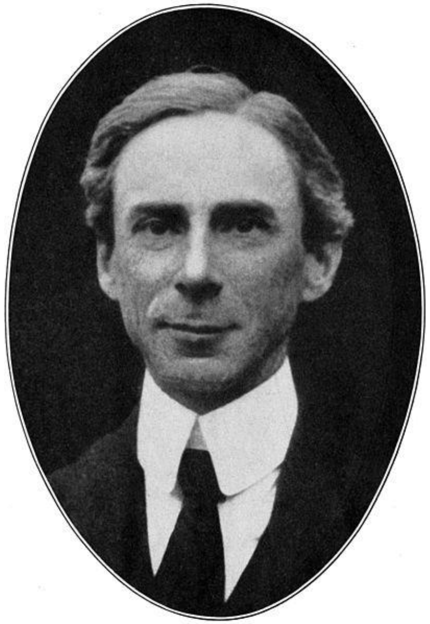
Motivación e interés

- ¿Puede tener mente un computador?
- ¿Existe algún algoritmo que describa el funcionamiento del cerebro humano? $\Rightarrow$ la IA lo busca.
- ¿Por qué no se ha encontrado aún?
  - Límites tecnológicos (temporales)
  - Forma de razonar es No-algoritmizable
- ¿Donde están, si existen, los límites de la computación?

- **Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell**

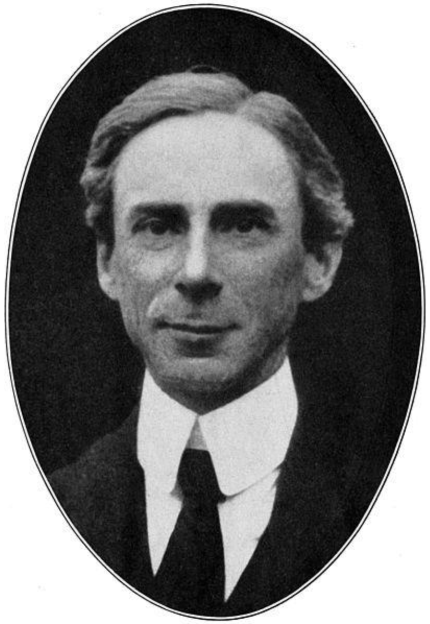
  - Todo empezó con Bertrand Russell, matemático inglés (18 de mayo de 1872 - 2 de febrero de 1970).
  - Placa conmemorativa en el Trinity College de Cambridge:

"El tercer conde Russell, O.M., profesor de este colegio, fue particularmente famoso como escritor intérprete de la lógica matemática. Abrumado por la amargura humana, en edad avanzada, pero con el entusiasmo de un joven, se dedicó enteramente a la preservación de la paz entre las naciones, hasta que finalmente, distinguido con numerosos honores y con el respeto de todo el mundo, encontró descanso a sus esfuerzos en 1970, a los 98 años de edad."



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Honourable_Bertrand_Russell.jpg

- **Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell**
    - ***Principia mathematica*** (1910-1913) contienen las bases de la matemática por Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead:
        - Intento de derivar la mayor parte de los conocimientos matemáticos de la época a partir de un conjunto de principios o axiomas.
        - Incluían: teoría de conjuntos, números cardinales, números ordinales y números reales. No estaban incluidos algunos teoremas del análisis de números reales, pero **parecía que efectivamente todas las matemáticas podían ser derivadas adoptando el mismo formalismo**.



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Honourable_Bertrand_Russell.jpg

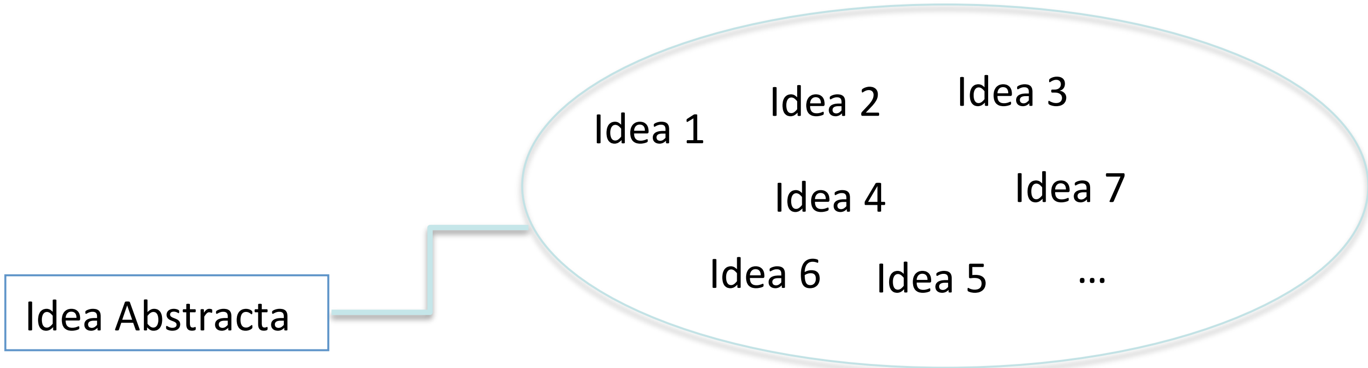
Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell

- Primera aportación**: las paradojas perturban a la lógica**. Son casos en los que un razonamiento aparentemente impecable, conduce a una contradicción.
- Segunda aportación: descubrimiento de muchas paradojas de gran interés para los matemáticos de la época. Solo una de ellas lleva su nombre:
  - La **paradoja de Russell** o **paradoja del barbero**, 1901, demuestra que la teoría original de conjuntos formulada por Cantor y Frege es contradictoria:
    - Dado el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, ¿es este conjunto elemento de sí mismo?

    ➔Si fuera elemento de si mismo, no lo sería , y viceversa.

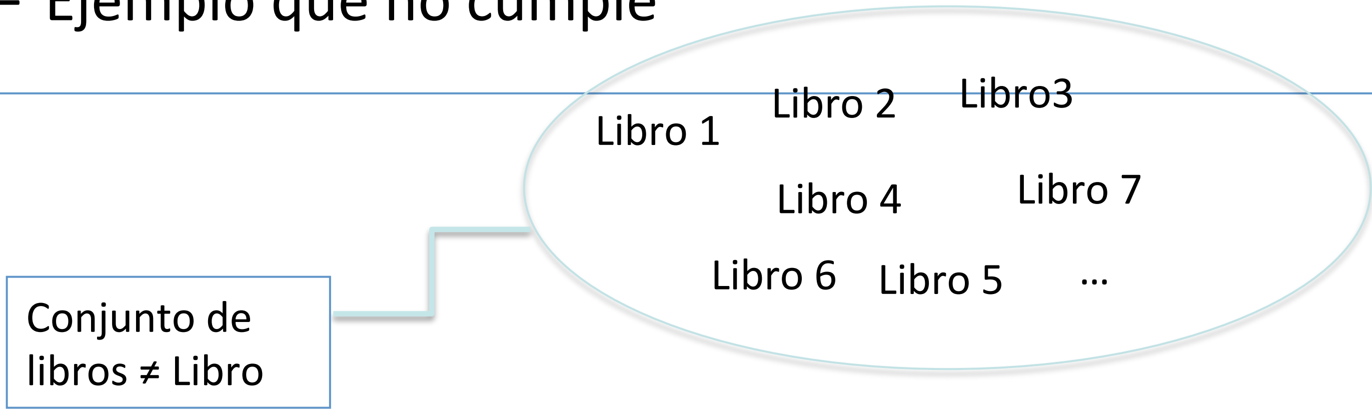
Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell

- **Paradoja de Russell** o **paradoja del barbero:**
  - *Dado el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, ¿es este conjunto elemento de sí mismo?*
  - Ejemplo que cumple



Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell

- **Paradoja de Russell** o **paradoja del barbero:**
  - *Dado el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, ¿es este conjunto elemento de sí mismo?*
  - Ejemplo que no cumple



Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Russell (II)

- **Paradoja de Russell** o **paradoja del barbero:**
  - *<u>Dado el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, ¿es este conjunto elemento de sí mismo?</u>*

Paradoja: si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismos y por lo tanto forma parte de sí mismo. ➔ formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

Aportaciones de Russell desde el punto de vista Matemático (I)

⇒ PARADOJAS

¿Se afeita el barbero a si mismo? Si, y solamente si, si NO se afeita a si mismo…

- “El barbero afeita a todos los individuos que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?”
- “Todos los cretenses son mentirosos, uno de sus propios poetas lo ha dicho”
- “El conjunto de todos los conjuntos, ¿es miembro de sí mismo?”
- “El enunciado siguiente es verdadero. El enunciado precedente es falso.”

Aportaciones de Russell desde el punto de vista Matemático (II)

⇒ PARADOJAS

- "El barbero afeita a todos los individuos que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?"
- "Todos los cretenses son mentirosos, uno de sus propios poetas lo ha dicho"
- "El conjunto de todos los conjuntos, ¿es miembro de sí mismo?"
- "El enunciado siguiente es verdadero. El enunciado precedente es falso."

Aportaciones de Russell desde el punto de vista Matemático (III)

⇒ PARADOJAS

- "El barbero afeita a todos los individuos que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?"
- "Todos los cretenses son mentirosos, uno de sus propios poetas lo ha dicho"
- "El conjunto de todos los conjuntos, ¿es miembro de sí mismo?"
- "El enunciado siguiente es verdadero. El enunciado precedente es falso."

Cada enunciado por separado es coherente, pero juntos, crean un sinsentido!!

Aportaciones de Russell desde el punto de vista Matemático (IV)

- Un conjunto de declaraciones ciertas lleva a deducir (demostrar) declaraciones ciertas.

- Bertrand Russell: demostración de que una declaración falsa permite demostrar cualquier cosa, anécdota:

  "2+2=5, permite demostrar que tú eres el Papa"

Si 2 + 2 son 5, entonces 5 = 4
y restando 3, pues
2 = 1
Y como tu y el papa sois 2,
pues tu y el papa sois 1!!!

Aportaciones de Russell desde el punto de vista Matemático (V)

- Las paradojas supusieron la crisis de la lógica.
- No solo eran juegos de palabras. Era necesario buscar una solución.
- Propuesta de Hilbert, eludir este problema por medio de los formalismos:
  - Si encontramos problemas al seguir razonamientos aparentemente correctos, se planteó el uso de un lenguaje artificial con reglas especificadas con tal precisión que no puedan surgir contradicciones.

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Hilbert

“Problema de la decisión” “Enscheidungproblem”

¿Es posible determinar, en un número finito de pasos, la veracidad o la falsedad de cualquier enunciado lógico?

Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas: Hilbert

- Idea de Hilbert:
  - Construir un **lenguaje artificial perfecto** para el razonamiento, la deducción y la matemática.
  - Quería que la matemática fuese formulada sobre unas bases sólidas y completamente lógicas.
  - Partir de un conjunto de **postulados básicos** (axiomas) y de **reglas bien definidas** para: efectuar deducciones y demostrar teoremas válidos.
  - Muy costoso dpv. matemático pero muy importante dpv filosófico.
- Hilbert estaba equivocado. Pero su error fue muy fructífero porque había planteado una pregunta muy acertada.
- Creó la ***metamatemática***: campo que estudia lo que la matemática puede o no conseguir.

Hilbert desde el punto de vista Matemático

- D. Hilbert: la matemática "cerrada".
  - Búsqueda de declaraciones ciertas. Se basó en los *Principia Mathematica* de Russel.
  - Definir la matemática como el conjunto de fórmulas que puedan crearse a partir de cualquier conjunto inicial de axiomas $\Rightarrow$ todo afirmaciones ciertas, No paradojas.
  - Progresos: Geometría Euclidiana y Aritmética.

Gödel desde el punto de vista Matemático

- Gödel: objetivo de Hilbert **INALCANZABLE**!!!
  - Siempre existe una afirmación cuya verdad o falsedad no puede ser decidida.
  - Aunque se aumente el tamaño del conjunto de reglas o incluyendo nuevos axiomas: se introducen más proposiciones indecidibles.
  - El programa de Hilbert no puede funcionar.
  - Demostrado con la aritmética elemental: 0,1, 2, 3,…, adición y multiplicación.
  - El sistema tendrá que ser incompleto o incoherente.
  - Asociar de forma unívoca números a proposiciones lógicas $\Rightarrow$ Número de Gödel

Orígenes de la Computabilidad

David Hilbert: 1920.
"Problema de la decisión: ¿es posible determinar, en un número finito de pasos, la veracidad o falsedad de cualquier enunciado lógico?"

Kurt Gödel: 1931. Teorema de la incompletitud: ningún sistema axiomático coherente es capaz de probar o refutar todos los enunciados posibles de la aritmética

Alan Turing: 1936.
Noción de computabilidad. Límites a la capacidad de cálculo y razonamiento matemáticos.

La Máquina de Turing

Breaking the Code:
Biography of Alan Turing
(Derek Jacobi, BBC, 1996)
hwp://www.youtube.com/watch?v=S23yie-779k
hwp://www.youtube.com/watch?v=6k2OUZdA7vQ

…una ilimitada capacidad de memoria obtenida en la forma de una cinta infinita marcada con cuadrados, en cada uno de los cuales podría imprimirse un símbolo. En cualquier momento hay un símbolo en la máquina. La máquina puede modificar el símbolo leído y su comportamiento está en parte determinado por ese símbolo. Además, la cinta se puede mover hacia adelante y hacia atrás a través de la máquina, siendo esta una de las operaciones elementales de la máquina.

La Máquina de Turing

- 1937 Alan Turing introdujo la **Máquina de Turing**:
  - Entidad matemática abstracta que formalizó el concepto de algoritmo.
  - Precursora de las computadoras digitales.
  - Turing demostró que existen problemas irresolubles, de los que ningún ordenador será capaz de obtener su solución, ➔ se le considera el **padre de la teoría de la computabilidad**.
- También se le considera el **padre de la Inteligencia Artificial** por su famoso Test de Turing, que permitiría comprobar si una máquina puede ser tan inteligente como un ser humano.

La Máquina de Turing

- Consta de un cabezal lector/escritor y
- una cinta infinita
- el cabezal lee el contenido, borra el contenido anterior y escribe un nuevo valor.
- Operaciones:

  Avanzar el cabezal lector/escritor para la derecha.

  Avanzar el cabezal lector/escritor para la izquierda.
- El cómputo se determina a partir de una **tabla de estados** de la forma:

  (estado, valor) -----> (nuevo estado, nuevo valor, dirección)
- Con este autómata extremadamente sencillo es posible realizar cualquier cómputo que un ordenador sea capaz de realizar.

La Máquina de Turing

- ***Complejidad computacional:*** MT permitió la categorización de problemas computacionales de acuerdo a su comportamiento: clases P y NP.
- En 1947, Turing planteó un tipo especial de Máquina de Turing que podía realizar el trabajo de todas las demás:
  - Esta máquina especial se llama ***Máquina de Turing Universal***, MTU.
  - La MTU se considera la idea germinal del concepto de ***Sistema Operativo***, un programa que puede, a su vez, ejecutar (controlar otros programa)s, demostrando su existencia, y abriendo camino para su construcción real.

La Máquina de Turing

- ***¿Podemos considerar la Mente como una Máquina de Turing?***
  - Algunos científicos consideran el funcionamiento del cerebro similar al de una Máquina de Turing.
  - Para ello las neuronas del cerebro deberían reaccionar y actuar siempre igual ante una determinada entrada.
  - No se ha podido demostrar que esta hipótesis sea cierta.
  - El funcionamiento de las neuronas se encuentra profundamente influido por las fluctuaciones cuánticas.

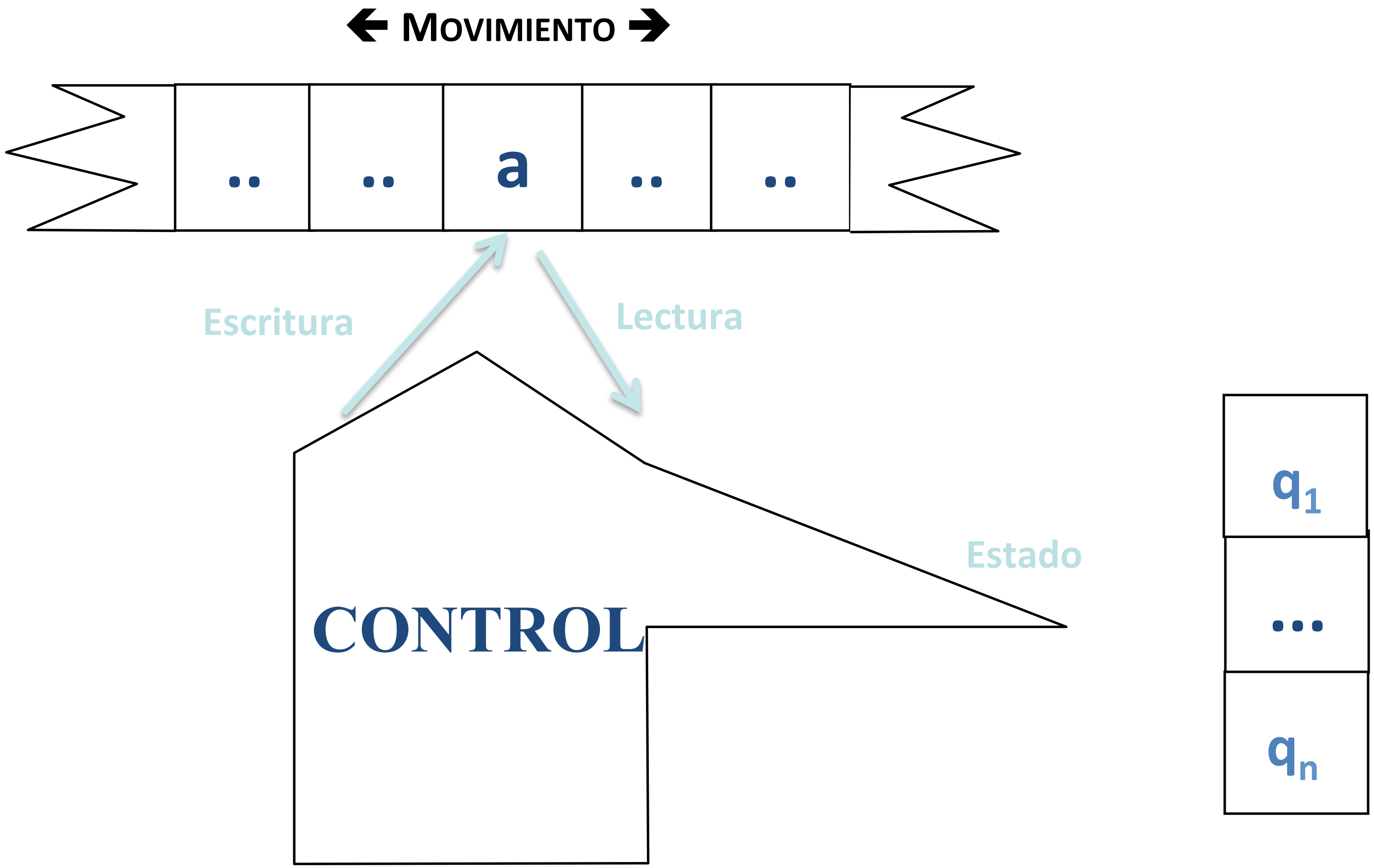
Doodle
Alan Turing's 100th Birthday

http://www.google.com/doodles/alan-turings-100th-birthday

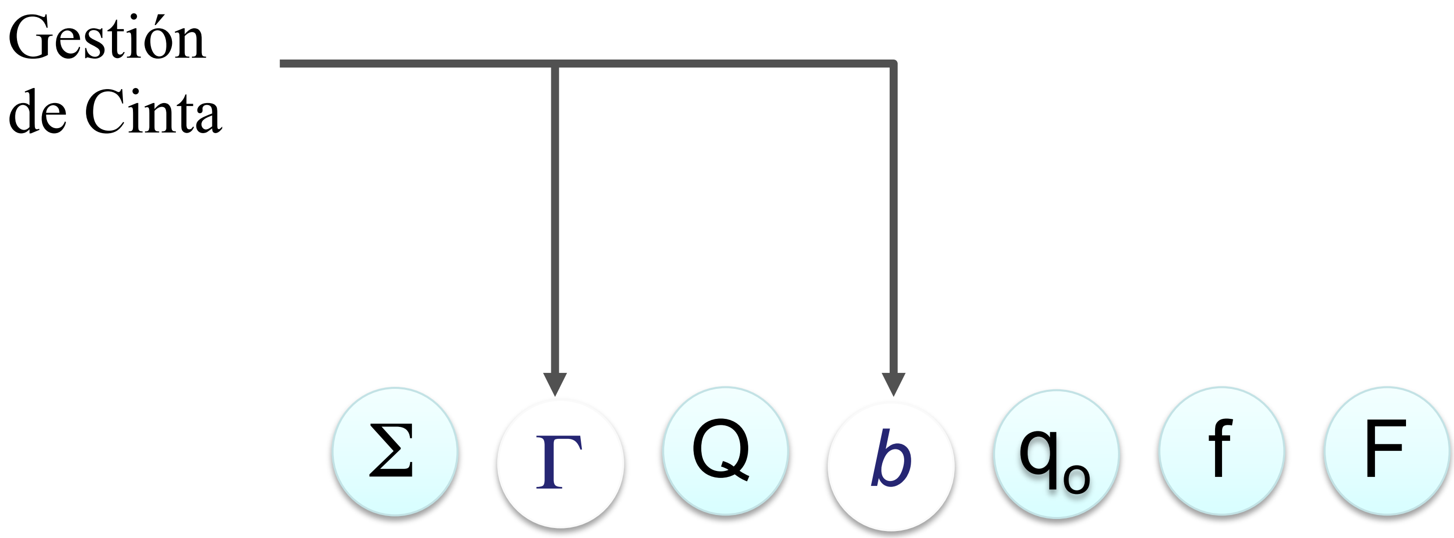
El 'juego' es sencillo:

- hay hacer coincidir las cifras de la cinta con las que presenta en la parte superior, de tal modo que las letras de Google vayan apareciendo.
- Lo que no resulta simple es averiguar cómo realizar las operaciones que se piden, ya que este **Doodle** no está dirigido para usuarios comunes, sino para aquellos con conocimientos en lenguaje de programación.
- Una vez que se van descubriendo letras, las pruebas que pone **Google** son más complicadas.

Definición formal de MT. Arquitectura



Definición formal de MT: MT = Séptupla



- Dos alfabetos: Σ (entrada/salida) y Γ (cinta) / $\Sigma \subset \Gamma$
- Un símbolo de cinta especial: $b \in \Gamma$, espacio en blanco
- Conjunto de estados Q, $q_0 \in Q$
- Función de transición, f**:** **$Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D,I,P\}$,** D: Derecha, I: Izquierda, P: Parada
- $F \subset Q$: conjunto de estados finales

Definición formal de MT

- Características:
  - Cinta infinita: la información de entrada está rodeada de infinitos espacios en blanco representados por *b*.
  - Al comenzar: están los símbolos de entrada (número finito que depende del problema a resolver) del alfabeto Σ, rodeado por infinitos blancos (símbolo especial *b*).
  - El control se representa por una tabla de transición de doble entrada:
    - En las filas: estados
    - En las columnas: símbolos de Γ
    - En la intersección (q,a): f(q,a)

Ejemplo de MT

- MT_1=({0,1,*b*}, {1}, *b*, {p,q,r,s}, p, f, {s})

f	1	0	b
→*p*	*q*0D	*p*0I	*r*bD
q	*q*1D	*q*0D	*p*0I
r		*r*1D	*s*bP
**s*			

¿Qué hace MT_1?

.. | b | 1 | 1 | b | .. ➔ .. | b | 0 | 1 | b | .. ➔ .. | b | 0 | 1 | b | .. ➔

p (p,1) = (q,0,D) *q* (q,1) = (q,1,D) *q* (q,b) = (p,0,I)

.. | b | 0 | 1 | 0 | b | .. ➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | b | .. ➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | b | ..

p (p,1) = (q,0,D) *q* (q,0) = (q,0,D) *q*

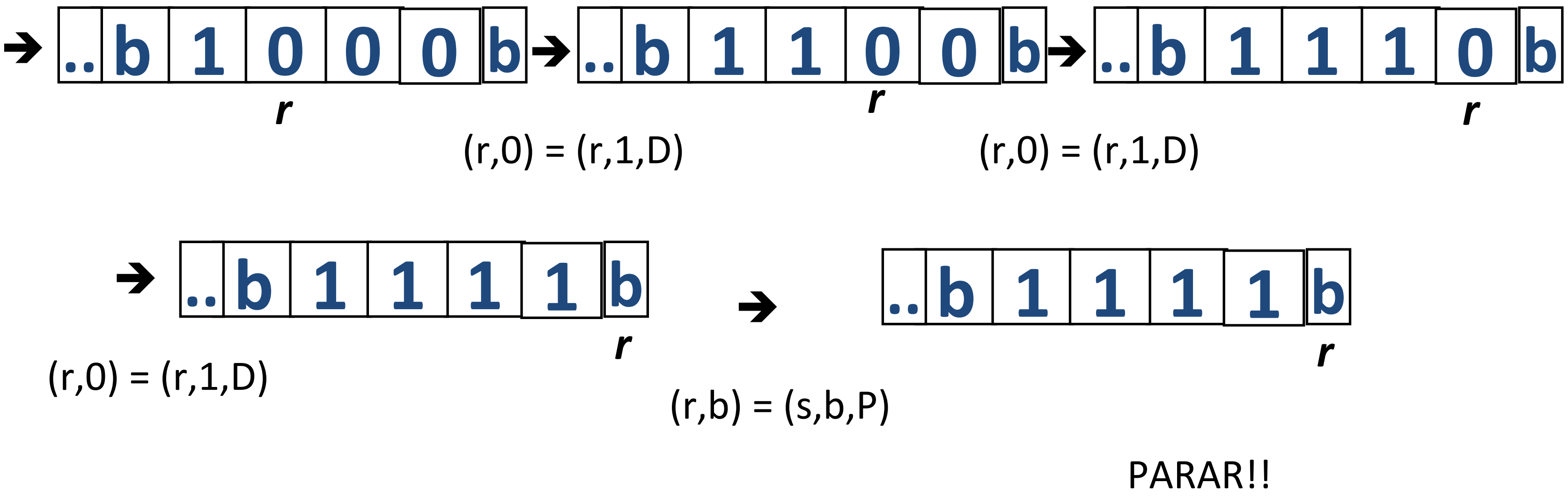
➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | 0 | b ➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | 0 | b ➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | 0 | b

(q,b) = (p,0,I) *P* (p,0) = (p,0,I) *p* (p,0) = (p,0,I) *p*

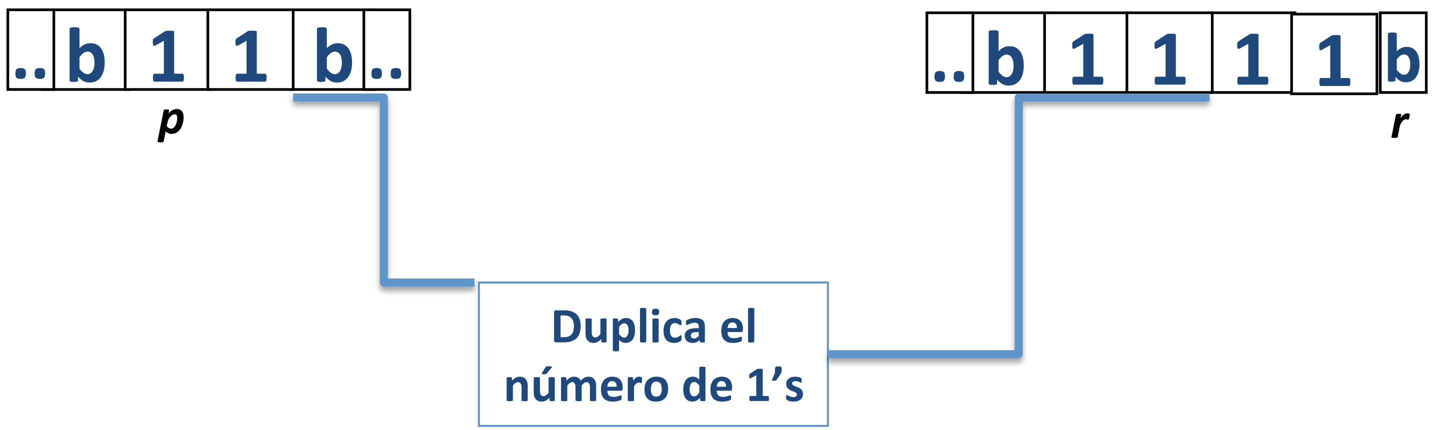
➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | 0 | b ➔ .. | b | 0 | 0 | 0 | 0 | b ➔ .. | b | 1 | 0 | 0 | 0 | b

P (p,0) = (p,0,I) *r* (p,b) = (r,b,D) *r* (r,0) = (r,1,D)

¿Qué hace MT_1?


..b 1 0 0 0 b
r
..b 1 1 0 0 b
r
(r,0) = (r,1,D)
..b 1 1 1 0 b
r
(r,0) = (r,1,D)
..b 1 1 1 1 b
r
(r,0) = (r,1,D)
..b 1 1 1 1 b
r
(r,b) = (s,b,P)
PARAR!!

¿Qué hace MT$_1$?



¿Qué hace MT_1?

- ***P*: busca el siguiente 1 para copiarlo**. Para ello va leyendo 0's y moviéndose hasta la izda hasta que lee un 1. En este momento transita a ***q***, después de cambiar el 1 por un 0. Si encuentra *b* es que ya ha terminado de copiar la cadena de 1's y transita a ***r***.
- ***q: copia el 1 en la siguiente posición libre***. Para ello se desplaza a la D hasta que lee *b*, en cuyo caso escribe un 0 en esa posición y transita a ***p*** para buscar el siguiente 1 y copiarlo.
- ***r:*** todos los 1's que ya han sido copiados se han cambiado por 0's para tenerlo en cuenta***. Este estado convierte los 0's en 1's,*** desplazándose a la D hasta que encuentra un b en cuyo caso transita a s y se para, porque ha terminado su ejecución.
- ***s:*** es un estado ficticio que sólo sirve para mostrar que ha ***terminado la ejecución de la*** MT_1.