

Capítulo 3

Modulaciones Analógicas

En este capítulo se presentan las modulaciones analógicas más frecuentemente utilizadas, las modulaciones de amplitud y las modulaciones angulares, sus principales características y el efecto del ruido en las mismas.

3.1. Introducción al concepto de modulación

Una señal analógica es una señal en tiempo continuo con un rango continuo de posibles valores (señal continua en tiempo continuo). La mayoría de las fuentes de información tienen este tipo de señales de salida. Voz y vídeo son dos ejemplos significativos de fuentes analógicas. La Figura 3.1 muestra una señal de voz. En este tipo de señales, la información está impresa en la forma de onda de la propia señal. Por tanto, un sistema de comunicaciones analógico debe tratar de transmitir dicha forma de onda de la forma más fiel posible hasta el otro extremo del sistema.

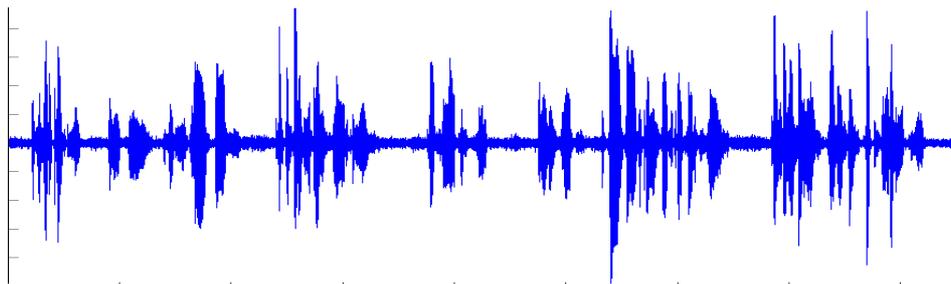


Figura 3.1: Ejemplo de una señal de voz.

La tendencia general consiste en muestrear y cuantificar las señales (conversión analógico/digital, o conversión A/D) y transmitir las por un sistema de comunicaciones digitales, para en el receptor reconstruirlas (conversión digital/análogo, o conversión D/A). Sin embargo, todavía existen hoy en día algunos sistemas de comunicaciones analógicos, especialmente para la radiodifusión de señales de audio y de vídeo. Por eso es necesario analizar estos sistemas.

La transmisión de señales analógicas se puede realizar fundamentalmente de dos modos diferentes:

1. Transmisión en banda base o transmisión sin modular: se transmite directamente, sin modificar, la señal de información.
2. Transmisión de la señal paso banda o modulada: se modifica la señal de información, trasladando el espectro de la señal que pasará a estar centrado en torno a una cierta frecuencia central o de portadora ω_c rad/s. Se puede modificar o no la forma del espectro o el ancho de banda de la señal, tal y como se muestra en la Figura 3.2 en los ejemplos A y B, respectivamente.

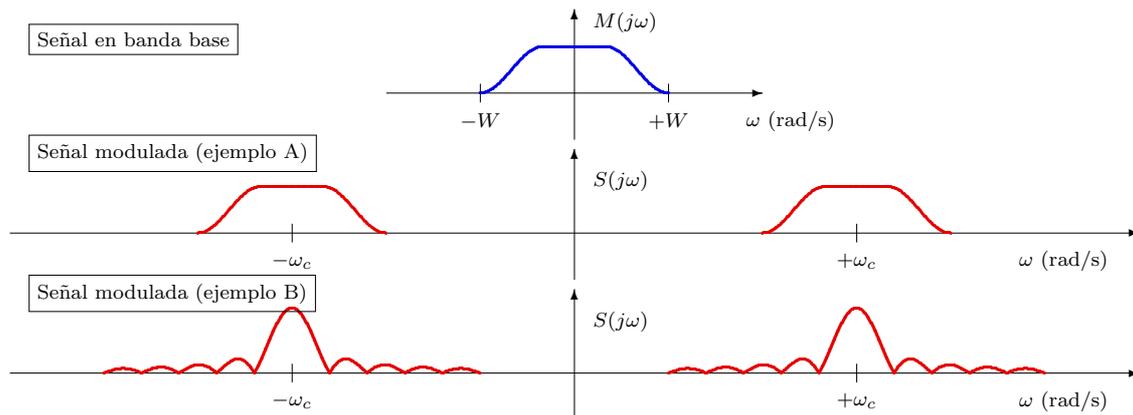


Figura 3.2: Ejemplo sencillo de multiplexación de tres señales por división en frecuencia.

La opción más frecuente es la transmisión de la señal modulada. Al proceso de modificación de la señal de información para generar otra señal con distintas características espectrales pero que contenga impresa la información se le denomina genéricamente modulación. La señal generada que será transmitida se denomina señal modulada, mientras que la señal de información se denomina señal moduladora. Habitualmente, la transmisión se suele realizar mediante la modulación de una señal llamada portadora. En general, *se imprime la señal analógica en la amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal*. Esto da lugar a las denominadas modulaciones de amplitud, frecuencia o fase.

La modulación de una señal analógica persigue uno de los siguientes propósitos:

1. Trasladar en frecuencia la señal original para adecuarla a las características del canal, es decir, llevarla a aquella región de frecuencia donde el canal se comporta de un modo que permita la transmisión de la misma sin distorsión (banda de paso).
2. Acomodar la transmisión simultánea de distintas señales o fuentes de información en un mismo canal, lo que se denomina *multiplexación*. En este caso, se trataría de la denominada multiplexación por división de frecuencia (FDM), cuya idea fundamental se ilustra en la Figura 3.3. En este caso, se tienen tres señales que comparten la misma banda de frecuencias. Si se transmiten las tres señales directamente por el mismo medio, no sería posible separarlas posteriormente. En cambio, si se modifica su rango de frecuencias de cada señal y se mueve el espectro de cada una de ellas a una banda de frecuencias de tal modo que no exista solapamiento entre el espectro de las tres señales moduladas, es posible la transmisión simultánea de las tres señales de forma que en el receptor, tras filtrar cada una de las tres señales, y volver a situarlas en su rango de frecuencias original, se puede recuperar por separado cada una de las tres señales.

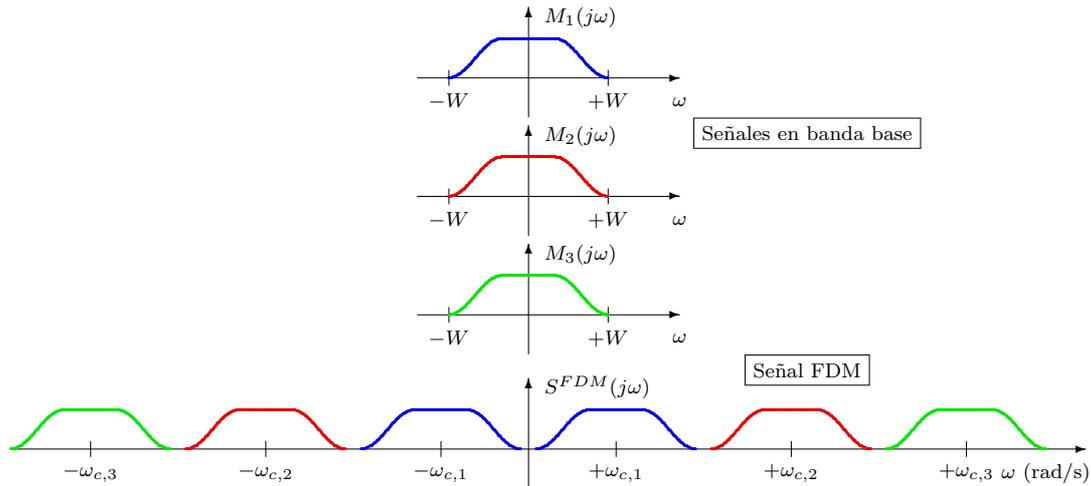


Figura 3.3: Ejemplo sencillo de multiplexación de tres señales por división en frecuencia.

- Expandir el ancho de banda de la señal transmitida para aumentar la inmunidad al ruido de la transmisión.

Los dos primeros objetivos se consiguen con los tres tipos de modulaciones anteriormente mencionadas (amplitud, frecuencia o fase), mientras que el tercero sólo se produce con las denominadas *modulaciones angulares*, que son las modulaciones en frecuencia y en fase.

3.1.1. Notación básica y modelos de señal moduladora

A continuación estableceremos algunos aspectos de la notación que se utilizará durante todo el capítulo. En cuanto a la señal de información analógica que se quiere transmitir, o señal moduladora, se denotará como $m(t)$. A la hora de presentar y analizar los distintos tipos de modulación, en algunos casos se supondrá que se conoce de forma determinista dicha señal; en otros casos se supondrá que no se conoce de forma determinista, sino que será una señal aleatoria de la que se conocen sus parámetros estadísticos.

En el primer caso, cuando se considera la señal moduladora determinista, en general se asumirá que se trata de una señal con las siguientes características:

- Señal paso bajo con ancho de banda B Hz o $W = 2\pi B$ rad/s; es decir, que su transformada de Fourier, $M(j\omega)$, es tal que $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ rad/s.
- Es una señal de potencia. Su potencia es

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} |m(t)|^2 dt$$

Cuando se considera la señal moduladora aleatoria, para el análisis de estos sistemas, esta señal se caracterizará mediante un proceso estacionario $M(t)$ con las siguientes características:

- Es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio (WSS).

2. Tiene una función de autocorrelación $R_M(\tau)$ conocida.
3. La densidad espectral de potencia es $S_M(j\omega)$ (relacionada con la función de autocorrelación a través de la transformada de Fourier).
4. Es un proceso aleatorio limitado en banda, con ancho de banda B Hz o $W = 2\pi B$ rad/s; es decir, $S_M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ rad/s.
5. Potencia del proceso es P_M , que se puede obtener a partir de las funciones anteriores como

$$P_M = R_M(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(j\omega) d\omega.$$

La señal se transmite a través de un canal de comunicaciones imprimiéndola en una señal portadora de la forma

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c),$$

donde A_c es la amplitud, f_c es la frecuencia y ϕ_c es la fase de la señal portadora. Se dice que la señal $m(t)$ modula la señal portadora en amplitud, frecuencia o fase, si la amplitud frecuencia o fase dependen de $m(t)$. En cualquier caso, el efecto de la modulación es *convertir la señal paso bajo, $m(t)$, en una señal paso banda en el entorno de la frecuencia de la señal portadora, f_c* . Resumiendo, se tienen los siguientes tipos de modulaciones analógicas:

1. Modulaciones de amplitud (AM: *Amplitude Modulation*)

La amplitud de la portadora varía en el tiempo en función de la señal moduladora

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

2. Modulaciones angulares

El valor angular de la portadora varía en el tiempo en función de la señal moduladora

- a) Modulación de fase (PM: *Phase Modulation*)

La fase de la portadora varía en el tiempo en función de la señal moduladora

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

- b) Modulación de frecuencia (FM: *Frequency Modulation*)

La frecuencia instantánea de la portadora varía en el tiempo en función de la señal moduladora

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora en el instante t

3.2. Modulaciones de amplitud (AM)

En una modulación de amplitud o AM, la señal moduladora $m(t)$ se imprime en la amplitud de la señal portadora $c(t)$, es decir, que pasa de tener un valor constante A_c a variar en el tiempo en función de $m(t)$. Por eso se le llama también modulación de doble banda lateral con portadora. Existen diferentes variantes de modulaciones de amplitud. A continuación se van a ver las cuatro siguientes

1. AM: Modulación AM convencional (o modulación AM de doble banda lateral con portadora).
2. DBL: Modulación de Doble Banda Lateral (sin portadora).
3. BLU: Modulación de Banda Lateral Única.
4. BLV: Modulación de Banda Lateral Vestigial.

3.2.1. AM convencional

Una señal AM convencional consiste en la suma de la señal portadora más una señal AM de doble banda lateral, que consiste en el producto entre la señal moduladora y la portadora. La expresión analítica general para la señal modulada es por tanto

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Portadora } c(t)} + \underbrace{m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Doble banda lateral (DBL): } m(t) \times c(t)}$$

$$s(t) = A_c \cdot [1 + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c). \quad (3.1)$$

La amplitud que tiene ahora la senoide a lo largo del tiempo es $A_c \cdot [1 + m(t)]$. En la mayor parte de los casos resulta útil imponer la restricción $|m(t)| \leq 1$ de modo que esta amplitud $A_c[1 + m(t)]$ sea siempre positiva, ya que en ese caso este será el valor de la envolvente de la señal modulada y se facilitará la demodulación de la señal. Si para algún valor de t se cumple que $m(t) < -1$, se dice que la señal está *sobremodulada*, y el proceso necesario para la demodulación se complica. En la práctica, cuando se desea evitar la sobremodulación $m(t)$ se escala de forma que la amplitud sea siempre menor que la unidad. La forma más habitual de hacerlo es introduciendo una normalización y el denominado índice de modulación.

Teniendo en cuenta el rango dinámico de la señal moduladora, y asumiendo que $-C_M \leq m(t) \leq +C_M$, se define la señal moduladora normalizada $m_n(t)$ como

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|} = \frac{m(t)}{C_M}.$$

A partir de esta señal normalizada, se define la señal moduladora con índice de modulación a como

$$m_a(t) = a \times m_n(t).$$

El factor de escala a se denomina *índice de modulación*, y se trata de un valor positivo. Ahora, la señal modulada AM con un índice de modulación a se define reemplazando en la expresión (3.1) la señal modulada por la señal modulada con índice de modulación a , es decir

$$s(t) = c(t) + m_a(t) \times c(t) = A_c \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c).$$

Para evita la sobremodulación se debe cumplir que el índice de modulación esté en el rango,

$$0 < a \leq 1.$$

La Figura 3.4 representa un ejemplo de la forma de onda resultante para un índice de modulación $a = \frac{1}{2}$. Se puede ver cómo la señal de información está impresa en la envolvente de la señal, y como la amplitud de la misma varía entre $A_c(1 - a)$ y $A_c(1 + a)$, en este caso entre $\frac{A_c}{2}$ y $\frac{3A_c}{2}$.

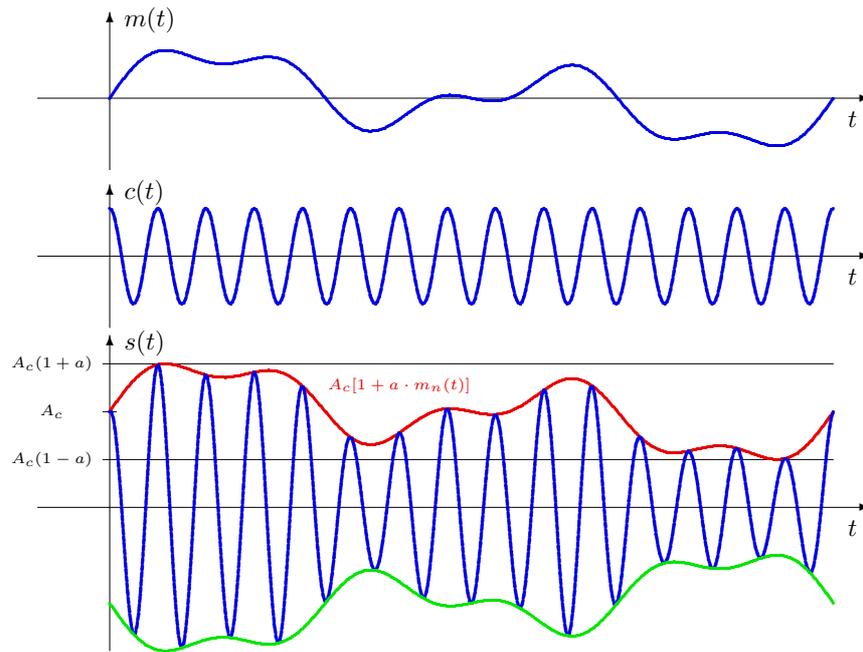


Figura 3.4: Ejemplo de señal AM convencional con índice de modulación $a = \frac{1}{2}$.

Si para la misma señal moduladora se modifica el índice de modulación, y se utiliza $a = \frac{3}{4}$, la señal modulada resultante es la que se muestra en la Figura 3.5. De nuevo la señal moduladora (información) está impresa en la envolvente de la señal, pero ahora la amplitud de la misma varía en un rango mayor, entre $\frac{A_c}{4}$ y $\frac{7A_c}{4}$. Con respecto al caso anterior, ahora los valores más pequeños de la envolvente, están más cerca de cero.

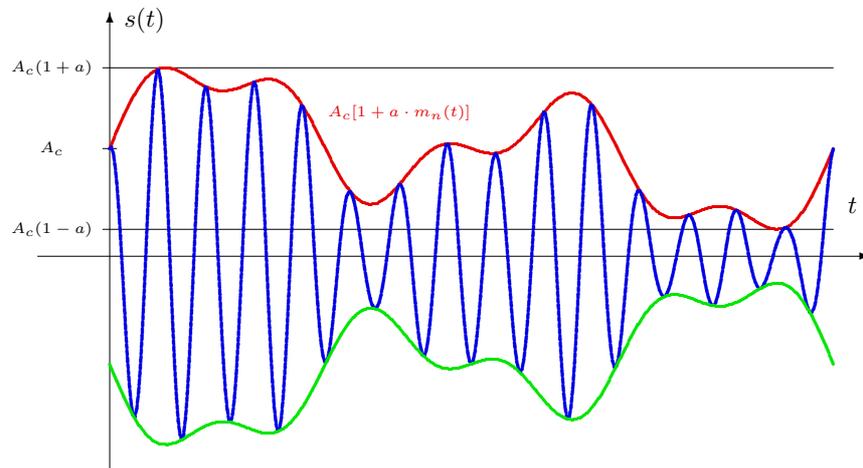


Figura 3.5: Ejemplo de señal AM convencional con índice de modulación $a = \frac{3}{4}$.

Si el índice de modulación tomara un valor mayor que 1, por ejemplo $a = \frac{3}{2}$, ahora el término de amplitud $A_c[1 + m_a(t)]$ podrá tomar valores negativos. la señal modulada resultante es la que se muestra en la Figura 3.6. Se puede ver cómo ahora la envolvente de la señal ya no contiene la forma de la señal moduladora (información), y que donde se produce el paso por cero en el término de amplitud $A_c[1 + m_a(t)]$ hay un salto de 180° en la senoide de la señal modulada. Esto, dificultará la demodulación de la señal.

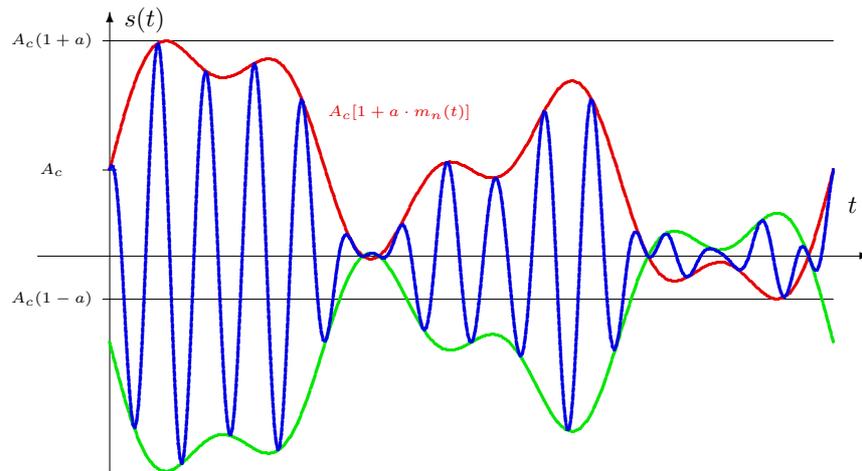


Figura 3.6: Ejemplo de señal AM convencional con índice de modulación $a = \frac{3}{4}$.

Espectro de la señal AM convencional - Caso determinista

Se va a obtener en este apartado la respuesta en frecuencia de la señal modulada cuando se considera una señal moduladora $m(t)$ determinista con transformada de Fourier $M(j\omega)$, con $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W = 2\pi B$. Resulta conveniente recordar que $m_a(t) = a \cdot m_n(t)$ con $m_n(t) = \frac{1}{C_M} \cdot m(t)$, por lo que en el dominio frecuencial $M_a(j\omega) = a \cdot M_n(j\omega) = \frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega)$. Teniendo en cuenta que la señal modulada es

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

aplicando la propiedad básica de la transformada de Fourier de que un producto de señales en el tiempo se convierte en una convolución de sus transformadas de Fourier en el dominio frecuencial, y teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de una senoide son dos deltas, y que el término de fase en la senoide implica una exponencial compleja en el dominio frecuencial, la transformada de Fourier de la señal modulada es

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= TF[A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)] + TF[m_a(t)] * TF[A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)] \\ &= A_c \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \\ &\quad + \frac{A_c}{2} \cdot \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega - j\omega_c)} \cdot e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega + j\omega_c)} \cdot e^{-j\phi_c} \right]. \end{aligned}$$

Si se analiza esta expresión, se llega a las siguientes conclusiones

- Módulo de la transformada de Fourier $S(j\omega)$
 - Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - Amplitud $A_c\pi$
 - Réplicas de la forma de $M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - Factor de escala $\frac{aA_c}{2C_M}$
- Fase de la transformada de Fourier

- La fase de la portadora introduce el término $e^{-j\phi_c}$
 - Término de fase constante
- Ancho de banda de la señal modulada

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

El ancho de banda de la señal modulada es por tanto el doble que el ancho de banda de la señal moduladora transmitida $m(t)$

Las Figuras 3.7 y 3.8 muestran dos ejemplos de transformada de Fourier de la señal modulada, para dos casos particulares de respuesta en frecuencia de la señal moduladora.

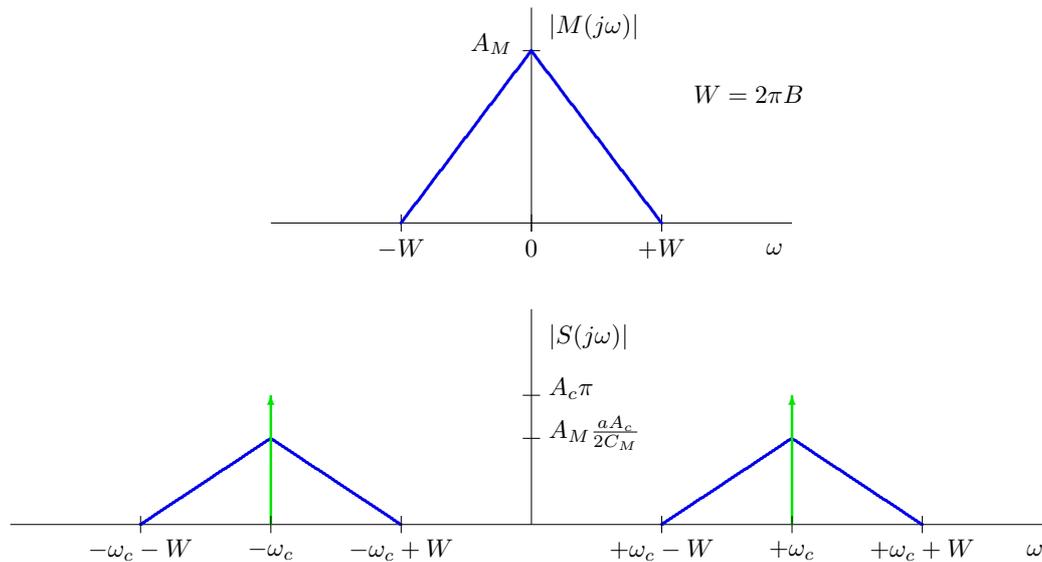


Figura 3.7: Un ejemplo de transformada de Fourier de la señal modulada AM convencional.

Análisis estadístico de la modulación AM convencional

Se considera ahora el caso en el la señal moduladora se considera una señal aleatoria cuya estadística es conocida y modelada mediante un proceso aleatorio $M(t)$ estacionario, con las características definidas en la Sección 3.1.1

$$M(t), \text{ estacionario, con } m_M = 0, R_M(\tau), S_M(j\omega), \text{ y potencia } P_M$$

En primer lugar se obtendrán los parámetros estadísticos del proceso aleatorio que modela la señal modulada, que se define como

$$S(t) = A_c[1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c),$$

donde el proceso $M_a(t)$ modela la señal moduladora con índice de modulación a , que viene dada por $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$. La media de este proceso aleatorio $S(t)$ es

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c[1 + E[M_a(t)]] \cos(\omega_c t + \phi_c) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

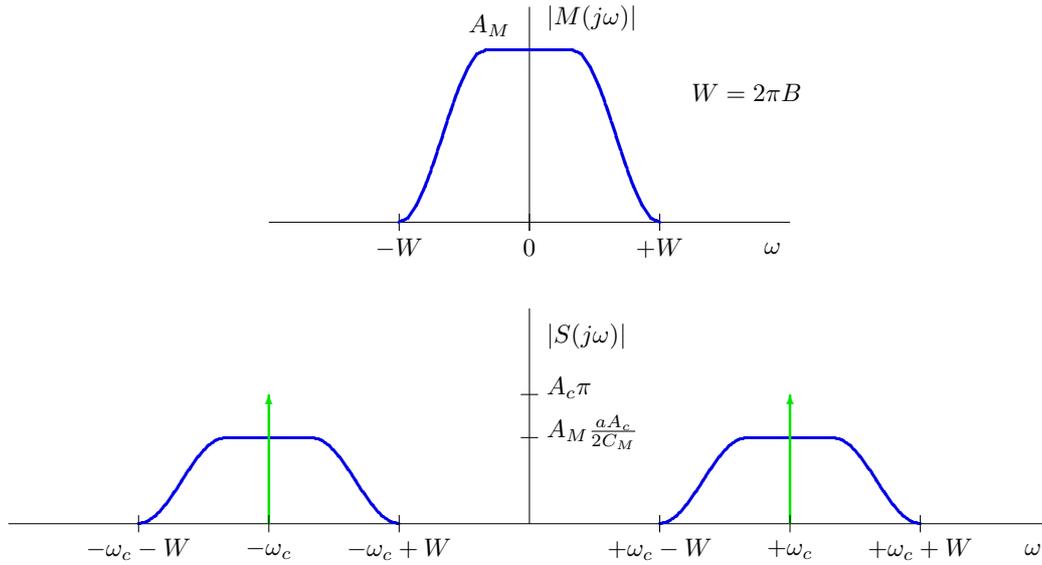


Figura 3.8: Otro ejemplo de transformada de Fourier de la señal modulada AM convencional.

ya que $E[M_a(t)]$ es la definición de la media del proceso $M_a(t)$, y si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, $E[M_a(t)] = \frac{a}{C_M} \cdot E[M(t)] = 0$.

Y la función de autocorrelación se obtiene como

$$\begin{aligned}
 R_S(t, t + \tau) &= E[S(t) \times S(t + \tau)] \\
 &= A_c^2 \cdot E \left[\underbrace{(1 + M_a(t))(1 + M_a(t + \tau))}_{1 + M_a(t) + M_a(t + \tau) + M_a(t) \times M_a(t + \tau)} \right] \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\
 &= \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)]
 \end{aligned}$$

Se ha hecho uso de la propiedad de linealidad del operador esperanza matemática, de que $E[1] = 1$, y del hecho de que al ser $M_a(t)$ un proceso aleatorio estacionario, $E[M_a(t)] = E[M_a(t + \tau)] = 0$, y de que $E[M_a(t) \times M_a(t + \tau)]$ es la definición de la función de autocorrelación del proceso aleatorio $M_a(t)$, i.e, $R_{M_a}(\tau)$. Asimismo se ha utilizado la igualdad trigonométrica

$$\cos(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b).$$

Se puede comprobar que tanto la media como la autocorrelación son funciones periódicas de período $T_m = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$ para la media y $T_R = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$ para la función de autocorrelación. El período común para ambas es $T = T_m$ el mayor de ambos. Por tanto el proceso es un proceso *cicloestacionario* con período T . Así pues, para caracterizarlo hace falta calcular la autocorrelación promediada en un período, que vale

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(\tau)] \cdot \cos(\omega_c \tau) \\
 &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau) \right] \cdot \cos(\omega_c \tau)
 \end{aligned}$$

En este caso se ha tenido en cuenta que la integral sobre la variable t en el coseno de frecuencia $2\omega_c$ rad/s se hace sobre 2 períodos completos de la sinusoide, lo que da lugar a cero. Tenga también en cuenta que si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, entonces $R_{M_a}(\tau) = a^2 \cdot R_{M_n}(\tau) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot R_M(\tau)$; por tanto también se tiene que $S_{M_a}(j\omega) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega)$ y $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M$.

Ahora la densidad espectral de potencia se calcula tomando la transformada de Fourier de este promedio en un período de la función de autocorrelación

$$\begin{aligned} S_S(j\omega) &= TF[\tilde{R}_S(\tau)] = \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_{M_a}(j\omega - j\omega_c) + S_{M_a}(j\omega + j\omega_c)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot \left[\frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega + j\omega_c) \right] \end{aligned}$$

Y la potencia del proceso se puede calcular como

$$\begin{aligned} P_S = \tilde{R}_S(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(0)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}] = \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M \right]. \end{aligned}$$

Analizando estas expresiones, se llega a las siguientes conclusiones:

- Ancho de banda de la señal AM convencional

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Densidad espectral de potencia consta de

- Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - Amplitud $\frac{A_c^2}{2}\pi$
 - Réplicas de la forma de $S_M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - Factor de escala $\left(\frac{aA_c}{2C_M}\right)^2$
- Potencia AM convencional

$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(0)] = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + P_{M_a}] = \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M \right]$$

- Potencia de la portadora: $\frac{A_c^2}{2}$
- Potencia de la DBL: $\left(\frac{A_c^2}{2} \frac{a^2}{C_M^2}\right) \times P_M$

La potencia de la portadora no es potencia útil desde el punto de vista de que no transporta información (aunque sí es útil porque como veremos permite la utilización de un receptor simple).

Las Figuras 3.9 y 3.10 muestran dos ejemplos de densidad espectral de potencia de la señal modulada, para dos casos particulares de densidad espectral de potencia de la señal moduladora.

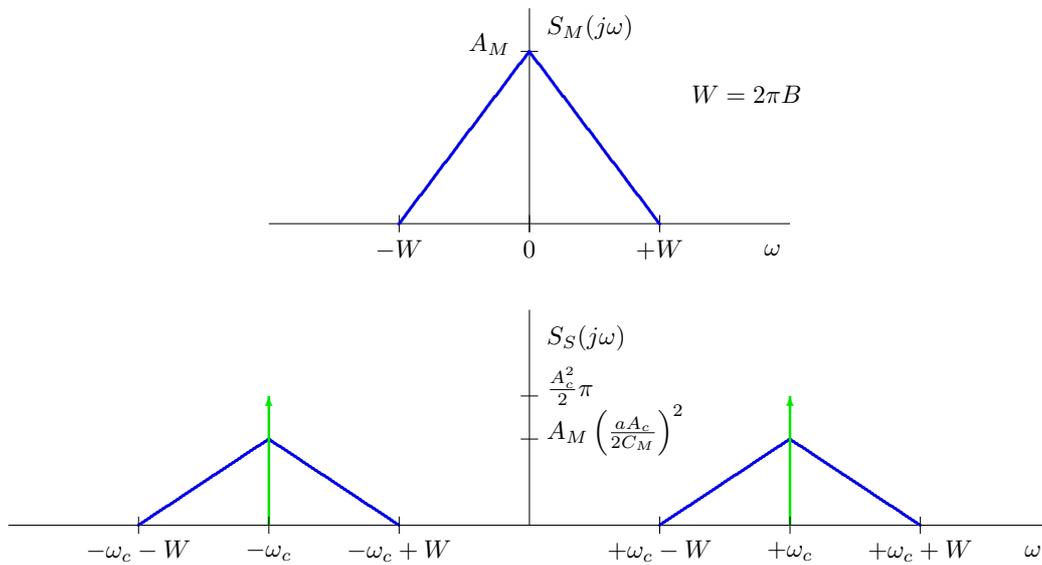


Figura 3.9: Un ejemplo de densidad espectral de potencia de la señal modulada AM convencional.

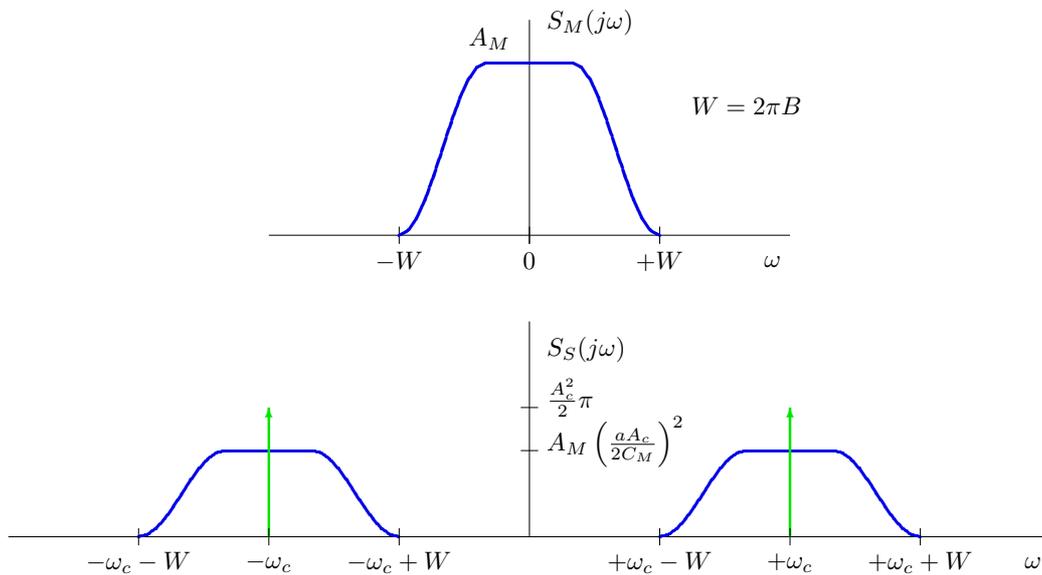


Figura 3.10: Otro ejemplo de densidad espectral de potencia de la señal modulada AM convencional.

Demodulación de la modulación AM convencional

La gran ventaja de esta modulación está en su demodulación:

1. Es muy simple, ya que al estar la señal moduladora presente en la forma de la envolvente, un simple detector de envolvente permite recuperarla.
2. No necesita demodulador síncrono o coherente, aunque se puede utilizar también (este receptor se verá más tarde, al analizar la modulación de doble banda lateral con portadora).

Como se cumple la condición $|m_a(t)| < 1$ la envolvente (amplitud) es $1 + m_a(t) > 0$. Esto permite implementar el receptor mediante un simple detector de envolvente, que se puede implementar mediante un rectificador y un filtro paso bajo con la frecuencia de corte adaptada al ancho de banda de la señal, B .

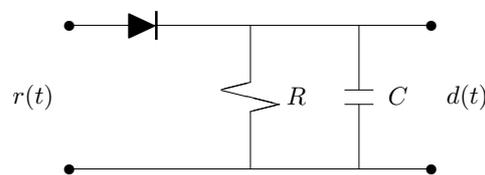


Figura 3.11: Detección de envolvente de una señal AM convencional

Este demodulador recupera la señal con un factor de ganancia y con un término de continua que hay que eliminar.

$$d(t) \approx A_c \left[1 + \frac{a}{C_M} m(t) \right].$$

La simplicidad de este demodulador hace que sea la que se utiliza para la radiodifusión de radio AM. Esto se debe a que

1. Los receptores son muy sencillos, y hay millones de ellos.
2. Aunque no es eficiente en cuanto a la potencia transmitida, hay pocos transmisores, lo que limita este problema en la práctica.

Como resumen de las características de esta modulación se podrían citar los siguientes aspectos:

- Inconvenientes de la modulación AM convencional:
 - Escasa eficiencia en potencia
 - Se gasta potencia en la transmisión de la portadora (que no contiene información)
 - Escasa eficiencia espectral
 - El ancho de banda de la señal modulada es el doble del de la moduladora
- Ventaja fundamental de la modulación AM convencional
 - Si $a \leq 1$, no hay sobremodulación y la envolvente de la señal es proporcional a $1 + m_a(t) \geq 0$, de donde se puede extraer $m(t)$

- Eliminación de la media y escalado
- Receptor simple: detector de envolvente
 - No se necesita un demodulador síncrono

3.2.2. Doble banda lateral sin portadora (DBL)

Esta técnica suprime la portadora de la modulación AM convencional de forma que se elimina el problema de la eficiencia en potencia de la misma. La expresión matemática de la misma es

$$s(t) = m(t) \times c(t) = m(t) \times A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c).$$

La eliminación de la portadora hace que la envolvente de la señal ya no contenga la forma de onda de la señal moduladora, lo que veremos que requerirá de un receptor más complejo para la demodulación. La Figura 3.12 muestra un ejemplo de señal modulada.

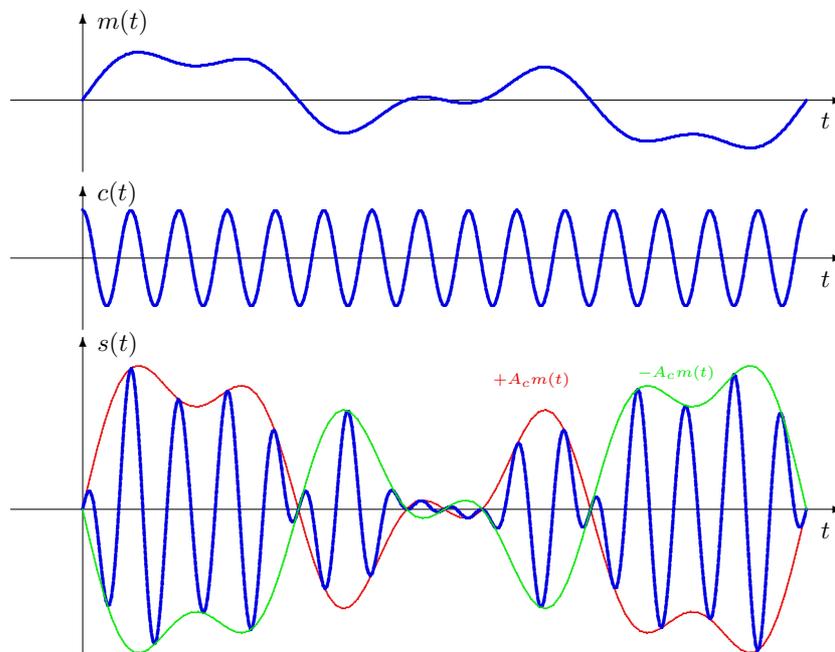


Figura 3.12: Ejemplo de señal de doble banda lateral.

Espectro de la señal DBL - Caso determinista

Se considera una señal $m(t)$ determinista con transformada de Fourier $M(j\omega)$. El espectro de la señal modulada en amplitud es

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= TF[m(t)] * TF[A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)] \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j\omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \end{aligned}$$

Con respecto a la modulación AM convencional se puede apreciar que:

- Desaparecen las deltas de la modulación AM convencional.

- Cambia el escalado de las réplicas del espectro de $M(t)$ al no haber en este caso normalización, de forma que desaparecen los factores a y C_M .

El nombre de la modulación hace referencia a que en el espectro de la señal aparecen dos bandas laterales, inferior ($|w| < w_c$) y superior ($|w| > w_c$), cada una de ellas siendo simétrica con respecto a la otra:

1. $|\omega| > \omega_c$: Banda lateral superior
2. $|\omega| < \omega_c$: Banda lateral inferior

Las Figuras 3.13 y 3.14 muestran dos ejemplos de transformada de Fourier de la señal modulada, para dos casos particulares de respuesta en frecuencia de la señal moduladora.

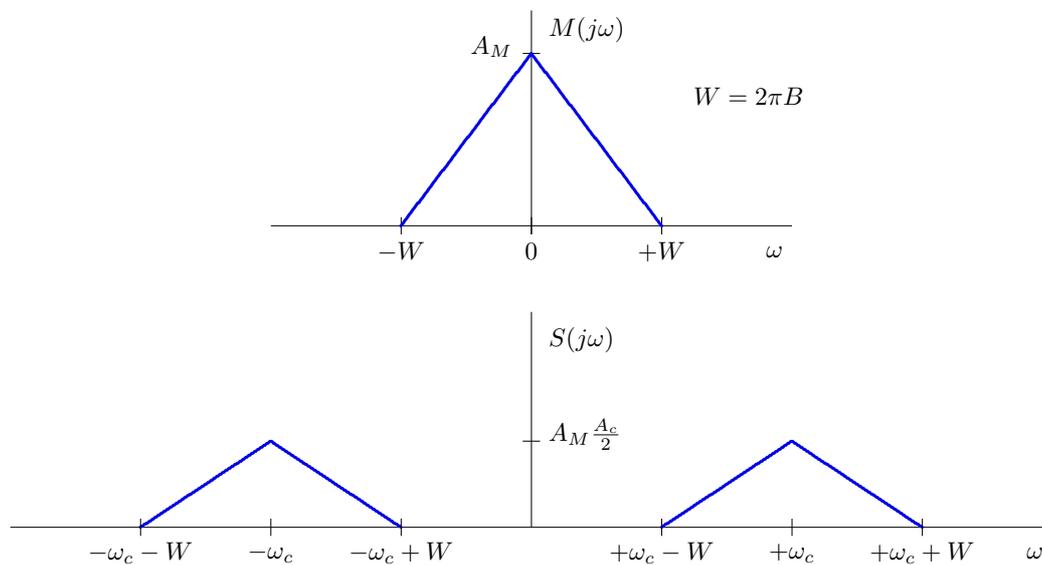


Figura 3.13: Un ejemplo de transformada de Fourier de la señal modulada de doble banda lateral.

Como se ve, el espectro de la señal DBL ocupa también dos veces el ancho de banda de la señal moduladora

$$BW_{DBL} = 2B \text{ Hz},$$

por lo que espectralmente sigue siendo igual de ineficiente que la modulación AM convencional.

La modulación DBL contiene las dos bandas. Hay que remarcar que cada una de las bandas laterales contiene toda la información de la señal, tiene todas las componentes frecuenciales de la misma. Además la portadora se ha suprimido, con lo que no aparecen las deltas en $\pm f_c$.

Análisis estadístico de la modulación de doble banda lateral

Para realizar este análisis se recurre de nuevo a los procesos estocásticos. El mensaje, o señal moduladora, se modela como un proceso estocástico estacionario en sentido amplio $M(t)$, con las características descritas en la Sección 3.1.1. La señal modulada se modela mediante el proceso aleatorio definido por

$$S(t) = M(t) \times c(t) = A_c M(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

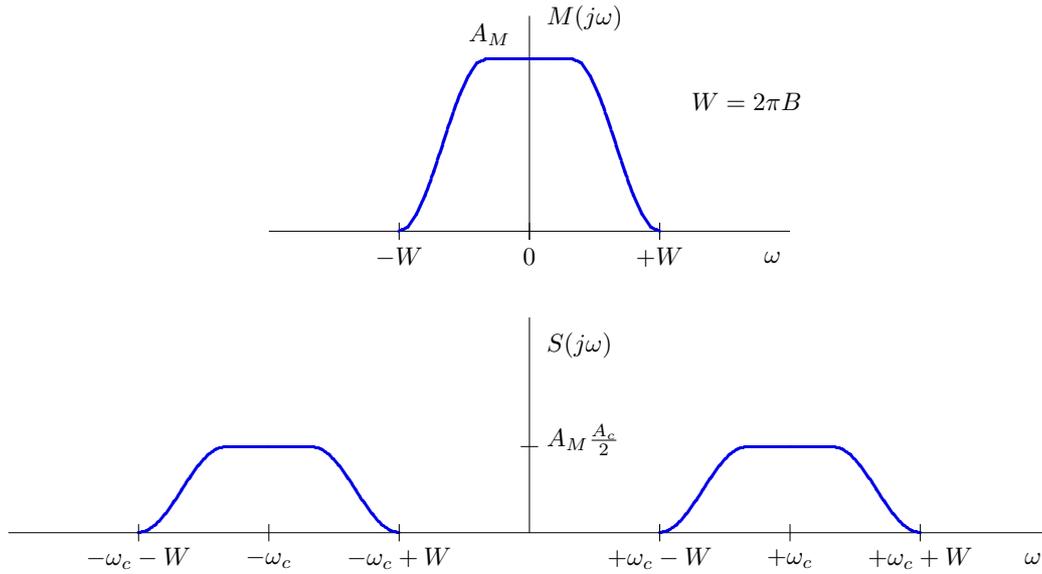


Figura 3.14: Otro ejemplo de transformada de Fourier de la señal modulada de doble banda lateral.

La media de la señal modulada es

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c \cdot E[M(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) = 0$$

Y la función de autocorrelación

$$\begin{aligned} R_S(t, t + \tau) &= A_c^2 \cdot E[M(t) \cdot M(t + \tau)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

Se puede comprobar que aunque la media es constante, la función de autocorrelación es periódica de período $T = \frac{1}{2f_c}$. Por tanto el proceso es un proceso *cicloestacionario*. Así pues, para caracterizarlo hace falta calcular la autocorrelación promediada en un período

$$\tilde{R}_S(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot \cos(\omega_c \tau).$$

De nuevo se ha tenido en cuenta que la integral en un período de una senoide vale cero. La densidad espectral de potencia se obtiene a través de la transformada de Fourier

$$S_S(j\omega) = TF \left\{ \tilde{R}_S(\tau) \right\} = \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

La potencia de la señal modulada es

$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} R_M(0) = \frac{A_c^2}{2} P_M.$$

Ahora ya no aparece un término de potencia asociado a la portadora, de modo que esta modulación es más eficiente en potencia que la modulación AM convencional.

Las Figuras 3.15 y 3.16 muestran dos ejemplos de densidad espectral de potencia de la señal modulada, para dos casos particulares de densidad espectral de potencia de la señal moduladora.

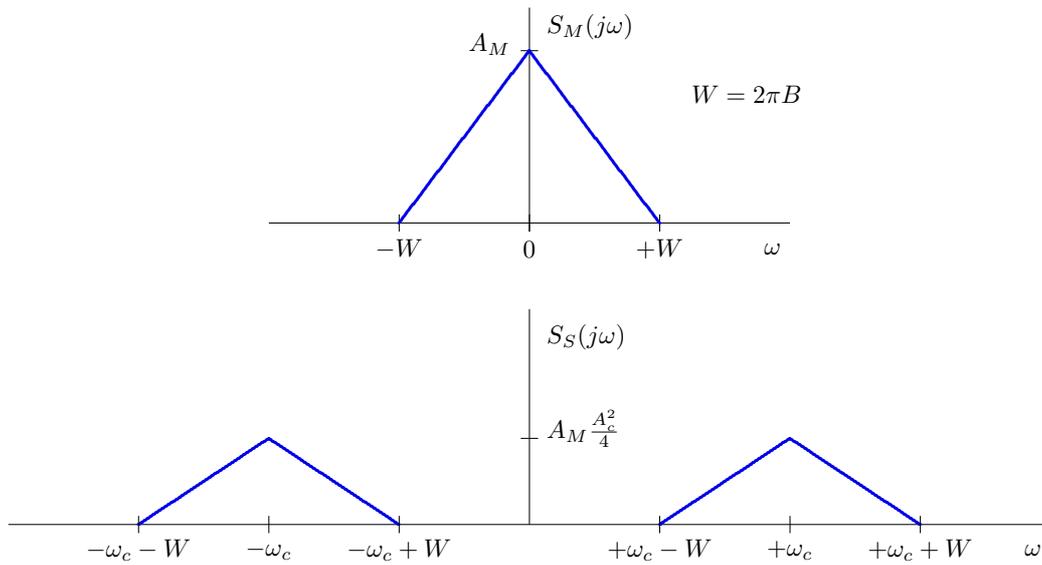


Figura 3.15: Un ejemplo de densidad espectral de potencia de la señal modulada de doble banda lateral.

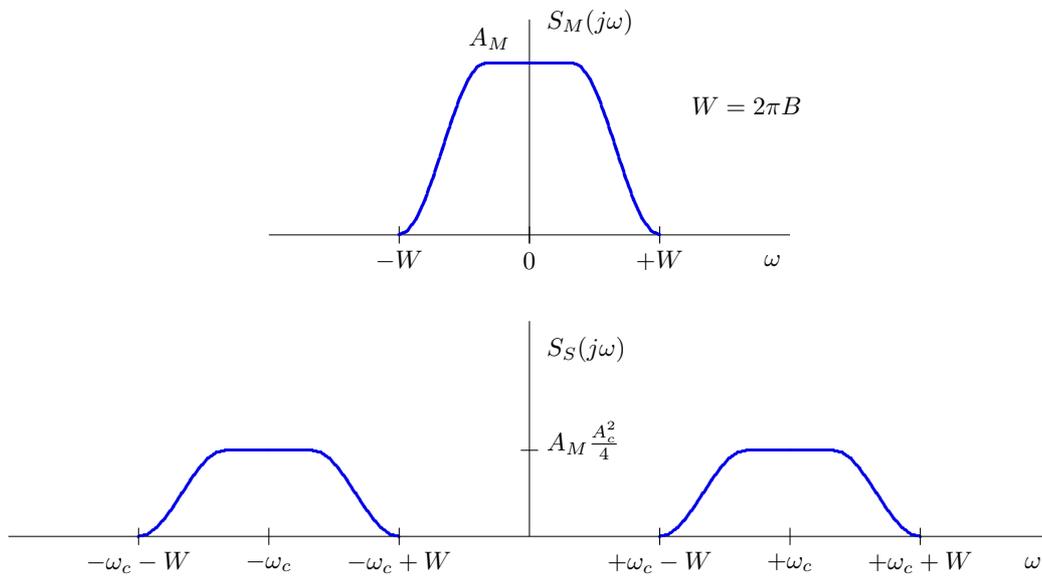


Figura 3.16: Otro ejemplo de densidad espectral de potencia de la señal modulada de doble banda lateral.

Demodulación de señales DBL

La supresión de la portadora, tal y como ya se indicó con anterioridad, y como puede verse por ejemplo en la Figura 3.12, hace que la forma de la envolvente de la señal ya no sea proporcional a la señal moduladora, por lo que no es posible utilizar un receptor coherente para demodulación. En este caso es necesario utilizar un receptor síncrono o receptor coherente. Este tipo de receptor se muestra en la Figura 3.17, donde el acrónimo LPF representa filtro paso bajo (del inglés *Low Pass Filter*) de ancho de banda de B Hz. El rendimiento óptimo se obtiene con un receptor síncrono o

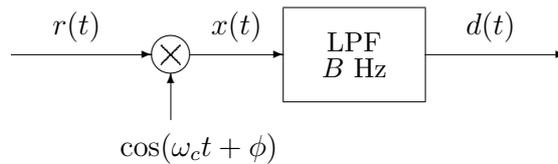


Figura 3.17: Demodulador síncrono para una señal DBL.

coherente, lo que quiere decir que la fase de la portadora del receptor es la misma que la fase de la portadora que se utilizó en el transmisor para la generación de la señal, es decir,

$$\phi = \phi_c.$$

Como veremos a continuación, si esta condición no se cumple (receptor no síncrono o incoherente), se produce una atenuación de la señal recibida y por tanto una pérdida de relación señal a ruido y de prestaciones.

Se procederá a continuación al análisis del funcionamiento del receptor. Inicialmente se asume que la señal no sufre ninguna distorsión durante su transmisión (situación ideal), por lo que la señal recibida es igual a la señal modulada transmitida

$$r(t) = s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c).$$

La señal demodulada antes de filtrar, $x(t)$, vale por tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot [\cos(\phi - \phi_c) + \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi)]. \end{aligned}$$

El filtro paso bajo elimina las componentes de alta frecuencia, con lo que la salida filtrada del demodulador es

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi_c - \phi).$$

El valor ideal, con un receptor coherente ($\phi = \phi_c$) es

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t).$$

En caso de utilizar un receptor no coherente, aparece un factor $\cos(\phi_c - \phi)$ multiplicando a la señal deseada. Este término es un término de atenuación. Se pueden dar múltiples valores para la diferencia de ángulos. Algunos casos son

1. $\phi = \phi_c$. Este es el caso *ideal*, en el que el coseno vale 1.
2. $\phi_c - \phi = 45^\circ$. La amplitud se reduce por un factor $\sqrt{2}$, lo que significa que la potencia se reduce a la mitad.
3. $\phi_c - \phi = 90^\circ$. La señal desaparece.

Esto indica la necesidad de tener una *demodulación síncrona* o *demodulación coherente en fase* o simplemente coherente.

Para generar una senoide en recepción enganchada en fase con la portadora recibida, existen dos posibilidades

1. Incluir un tono piloto (una portadora de baja amplitud). Este tono se extrae en recepción con un filtro de banda estrecha sintonizado a la frecuencia ω_c . Esta opción tiene la desventaja de que se pierde eficiencia en potencia, ya que se utiliza una parte de la potencia de la señal transmitida en la generación del piloto, que no contiene propiamente información.
2. Introducir un lazo enganchado en fase o PLL (*Phase-Locked Loop*), un dispositivo que permite recuperar la fase de la portadora a partir de la señal recibida. Esta alternativa hace que el receptor sea más complejo y de mayor coste.

La Figura 3.18 muestra una interpretación frecuencial del proceso de demodulación.

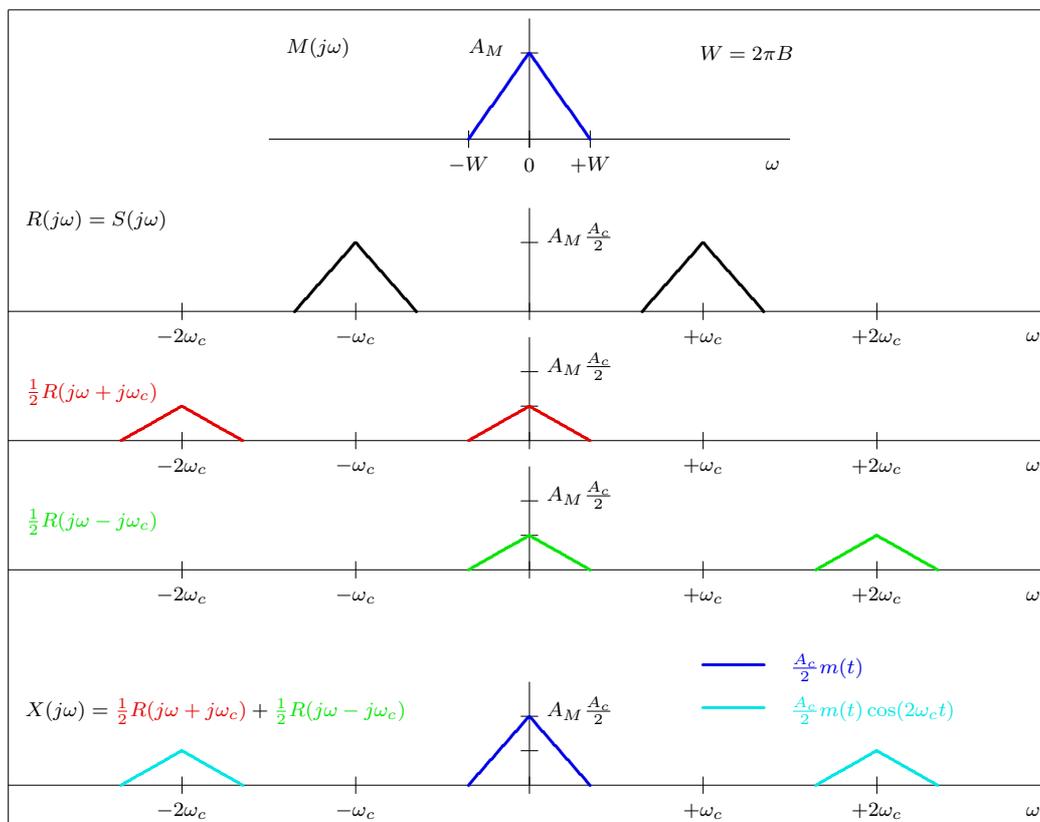


Figura 3.18: Interpretación frecuencial del proceso de demodulación de una señal de doble banda lateral.

Teniendo en cuenta que el producto con una senoide produce dos réplica del espectro (cada una con la mitad de amplitud de la senoide), una desplazada ω_c a la derecha, y otra ω_c a la izquierda

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}R(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}R(j\omega + j\omega_c),$$

la contribución de ambos términos reconstruye el espectro de la señal y añade una componente de alta frecuencia (centrada en $2\omega_c$ que se elimina con el filtrado paso bajo.

3.2.3. Modulación de banda lateral única (BLU)

La modulación con doble banda lateral y la AM convencional tienen presentes las dos bandas laterales, cada una de las cuales contiene toda la información de la señal transmitida o moduladora por la propiedad de simetría de la respuesta en frecuencia de señales reales. El uso de las dos bandas es redundante y se desperdicia un recurso importante como es el ancho de banda. La modulación de banda lateral única transmite una única banda lateral, de forma que se reduce el ancho de banda a la mitad.

$$BW_{BLU} = B \text{ Hz.}$$

La Figura 3.19 muestra la respuesta en frecuencia de este tipo de modulación.

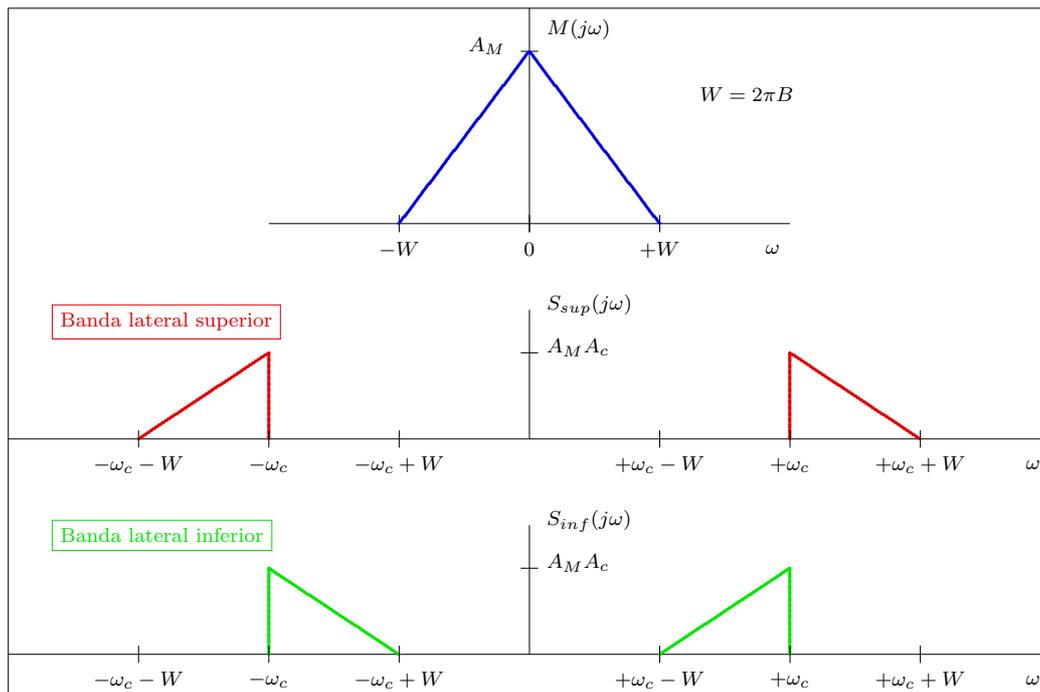


Figura 3.19: Espectro de la señales de banda lateral única, de banda lateral superior y banda lateral inferior.

La opción más simple para la generación de este tipo de señales es mediante filtrado directo; en este caso se genera una señal de doble banda lateral, y posteriormente se elimina mediante filtrado una de las dos bandas laterales:

- BLU de banda lateral superior (BLS): se eliminan las frecuencias $|\omega| < \omega_c$

- BLU de banda lateral inferior (BLI): se eliminan las frecuencias $|\omega| > \omega_c$

El esquema de este método de generación de la señal BLU se muestra en la Figura 3.20. Por conveniencia en la notación, nótese que la señal intermedia $s_D(t)$ es una señal de doble banda lateral pero de amplitud doble (con respecto a la considerada en la sección anterior).

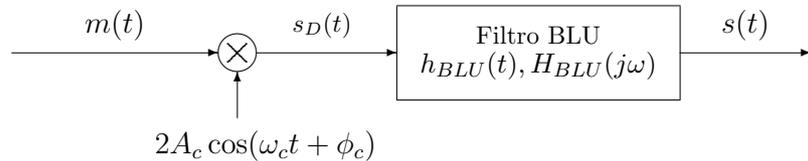


Figura 3.20: Generación de una señal de banda lateral única (BLU) mediante filtrado directo.

La respuesta en frecuencia genérica de los filtros de banda lateral única, para banda lateral superior, y para banda lateral inferior, será

$$H_{BLU}^{sup}(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\omega| \geq \omega_c \\ 0, & \text{si } |\omega| < \omega_c \end{cases} \text{ y } H_{BLU}^{inf}(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\omega| > \omega_c \\ 1, & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$

La Figura 3.21 muestra la respuesta en frecuencia de las señales generadas con esta opción.

Existe otra alternativa para la generación de la señal de banda lateral única. Como se demostrará a continuación, la señal BLU tiene la expresión analítica

$$s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$

donde el signo negativo corresponde a la banda lateral superior, el signo positivo a la banda lateral inferior y $\hat{m}(t)$ es la transformada de Hilbert de la señal $m(t)$. Por simplicidad en la notación se ha asumido una fase nula en las portadoras, $\phi_c = 0$.

La transformada de Hilbert de una señal es la señal que se obtiene al filtrar la señal original con un transformador de Hilbert

$$\hat{m}(t) = m(t) * h_{Hilbert}(t),$$

donde un transformador de Hilbert es un filtro lineal con respuesta al impulso

$$h_{Hilbert}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

y respuesta en frecuencia

$$H_{Hilbert}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ +j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

Esto permite la generación de la señal utilizando un transformador de Hilbert y dos osciladores en cuadratura (desfasados 90°, un coseno y un seno). Este esquema para la generación, que se muestra en la Figura 3.22, recibe el nombre de modulador de Hartley.

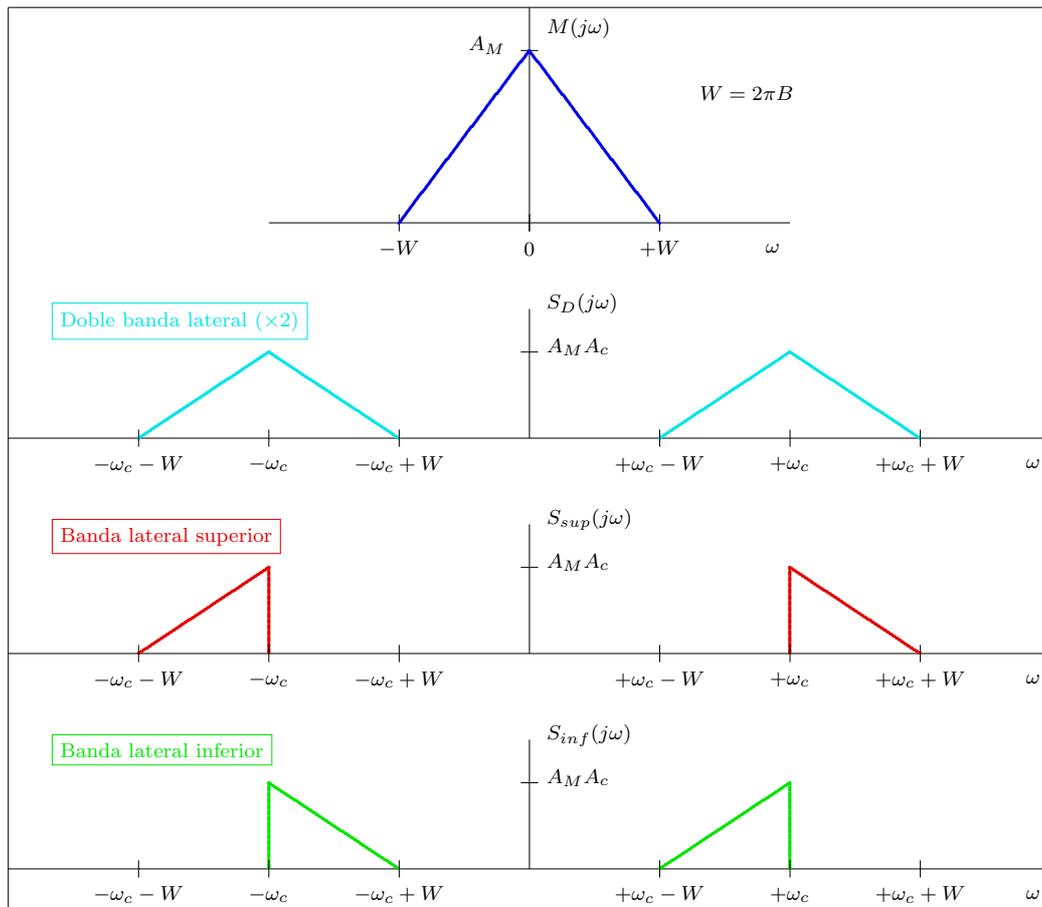


Figura 3.21: Ejemplo de espectro de la señales de banda lateral única, de banda lateral superior y banda lateral inferior, y de la señal de doble banda lateral intermedia que se genera antes del filtrado.

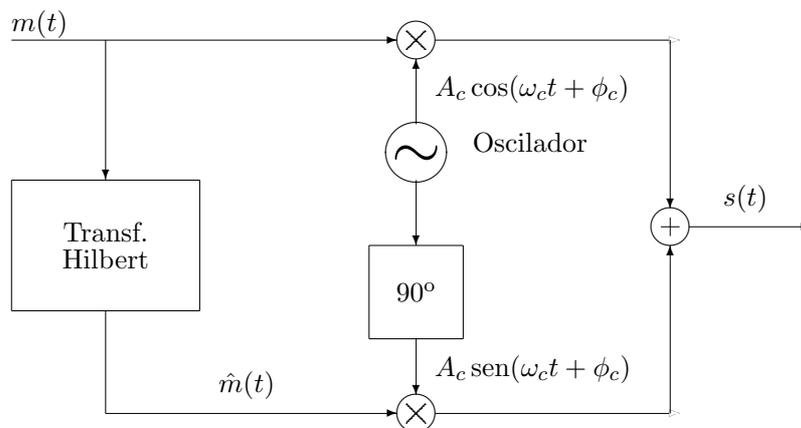


Figura 3.22: Generación de una señal de banda lateral única (BLU) utilizando un transformador de Hilbert y dos portadoras en cuadratura (modulador de Hartley).

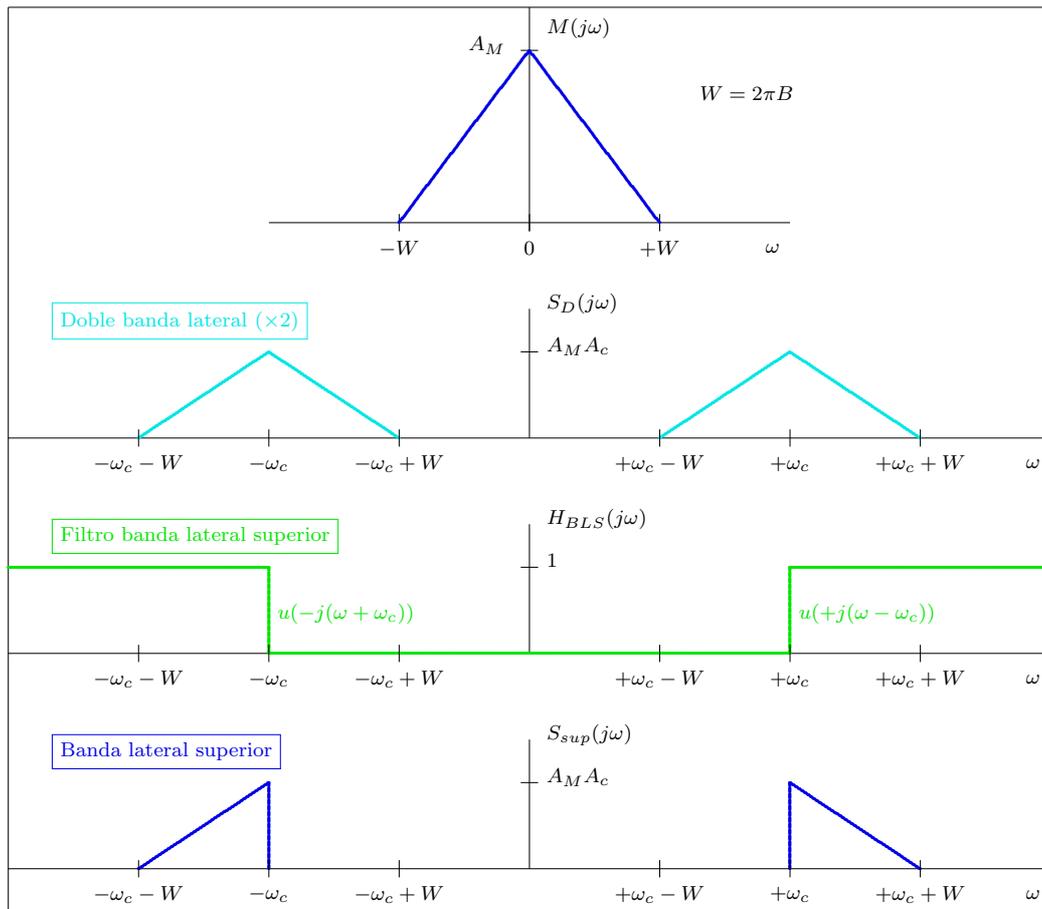


Figura 3.23: Representación de la generación de una señal de banda lateral superior en el dominio de la frecuencia.

Expresión analítica de la señal modulada - Banda lateral superior

La Figura 3.23 muestra la respuesta en frecuencia de las señales generadas con esta opción. En este caso se puede ver que la respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral única para banda lateral superior se puede escribir en función de la función escalón $u(x)$, en concreto Respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral superior:

$$H_{BLU}^{Sup}(j\omega) = u(\omega - \omega_c) + u(-(\omega + \omega_c))$$

La respuesta en frecuencia de la señal DBL con amplitud doble, $s_D(t)$, es

$$S_D(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + j\omega_c)]$$

A partir de la figura es fácil ver que la respuesta en frecuencia de la señal de banda lateral superior se puede escribir como Espectro de la señal BLU con banda lateral superior

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_D(j\omega) \cdot H_{BLU}^{Sup}(j\omega) \\ &= A_c M(j\omega) \cdot u(\omega)|_{\omega=\omega-\omega_c} + A_c M(j\omega) \cdot u(-\omega)|_{\omega=\omega+\omega_c}, \end{aligned}$$

es decir, la suma de dos términos: el producto de la respuesta de la moduladora y un escalón desplazados a $+\omega_c$, y el producto de la respuesta de la moduladora y un escalón abatido desplazados a $-\omega_c$, en ambos casos con el factor de escala A_c .

Para obtener la respuesta en el dominio temporal, lo único que hay que hacer es calcular la transformada de Fourier inversa, para lo que resultarán de utilidad las siguientes expresiones (propiedades de la transformada de Fourier y fórmulas de Euler para sinusoides):

$$\begin{aligned} TF \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] &= u(\omega), \\ TF \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] &= u(-\omega), \\ TF[x(t) \cdot e^{j\omega_c t}] &= X(j\omega - j\omega_c) \\ \cos(\omega_c t) &= \frac{e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \\ \text{sen}(\omega_c t) &= \frac{e^{+j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} = j \frac{e^{-j\omega_c t} - e^{+j\omega_c t}}{2} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, es fácil calcular la transformada de Fourier inversa de $S(j\omega)$

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{j\omega_c t} + A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) + j\hat{m}(t)] \cdot e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) - j\hat{m}(t)] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t). \end{aligned}$$

Expresión analítica de la señal modulada - Banda lateral inferior

Se podría en este caso repetir el procedimiento anterior variando la expresión del filtro de banda lateral única para utilizar el de banda lateral inferior. Pero resulta más sencillo aplicar la propiedad de que la suma de las señales de banda lateral inferior y de banda lateral superior da lugar a la señal de doble banda lateral con amplitud doble

$$s_D(t) = 2 \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) = s_{sup}(t) + s_{inf}(t)$$

tal y como se puede ver en la Figura 3.21. Teniendo esto en cuenta

$$\begin{aligned} s_{inf}(t) &= s_D(t) - s_{sup}(t) \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \sen(\omega_c t). \end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia

Teniendo en cuenta que las señales se pueden obtener a partir del filtrado de una señal de doble banda lateral con amplitud doble, es trivial obtener las expresiones de la densidad espectral de potencia de una señal de banda lateral única a partir de las expresiones obtenidas en su momento para la modulación de doble banda lateral

- Banda lateral superior

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- Banda lateral inferior

$$S_{S_{inf}}(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

La potencia se puede calcular mediante la integral de la densidad espectral de potencia. En ambos casos se cumple que

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega = A_c^2 P_M.$$

Demodulación de señales BLU

Para la demodulación óptima de señales de banda lateral única de nuevo es necesaria la utilización de un demodulador síncrono o coherente, como el mostrado en el esquema de la Figura 3.17, en el que $\phi = \phi_c$. Recuerde que por simplicidad en la notación se supuso $\phi_c = 0$. De nuevo se asume una transmisión ideal sin ninguna distorsión, en cuyo caso la señal recibida coincide con la señal modulada que se transmite

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \sen(\omega_c t).$$

La señal demodulada antes de filtrar, $x(t)$, es

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= [A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi) \\ &\quad + \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(2\omega_c t + \phi) \mp \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(2\omega_c t + \phi). \end{aligned}$$

El filtrado elimina las componentes de alta frecuencia (términos en $2\omega_c$), con lo que la señal demodulada filtrada queda

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi).$$

Si en el generador la fase ϕ_c fuera una fase arbitraria no nula la expresión resultante sería

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_c).$$

Ahora, el efecto del error de fase es por un lado reducir la amplitud de la señal recibida, que puede incluso desaparecer, tal y como ocurría para una modulación de doble banda lateral, y por otro lado (segundo término) se suma una señal indeseada $\hat{m}(t)$ a la señal recibida, lo que se puede interpretar como un término de distorsión. Por tanto, el uso de un receptor coherente es incluso más necesario que en el caso de la modulación DBL.

La solución es la misma que para la DBL, o bien utilizar un tono piloto o bien utilizar un PLL.

Las Figuras 3.24 y 3.25 muestran una interpretación frecuencial del proceso de demodulación para los casos de banda lateral superior y banda lateral inferior, respectivamente.

Debido a la eficiencia espectral de este método de modulación, se utiliza por ejemplo para la transmisión de canales de voz por cables telefónicos. Con esta modulación se dobla la capacidad, en número de canales, del cable en cuestión.

El principal inconveniente está en su generación. Utilizando la técnica de filtrado directo, para no tener ninguna distorsión en la señal generada se requieren filtros ideales, lo que no es posible en la práctica. Utilizando la técnica basada en el filtro de Hilbert, el inconveniente es que ahora se necesitan dos osciladores en cuadratura, y además una implementación exacta de un transformador de Hilbert, que tampoco es posible. Por tanto, en el propio proceso de generación de la señal habitualmente se generará un cierto grado de distorsión.

3.2.4. Modulación de banda lateral vestigial (BLV)

Para relajar los requerimientos de los filtros necesarios para la modulación BLU, la modulación de banda lateral vestigial permite que una parte, llamada *vestigio*, de la banda no deseada aparezca en la señal modulada. De este modo se facilita la implementación de los filtros al precio de incrementar ligeramente el ancho de banda de la señal.

Para construir esta señal, como en el caso de la señal BLU por filtrado directo, se parte de la una señal de doble banda lateral (de amplitud doble), $s_D(t)$ que se filtra, tal y como se muestra en la Figura 3.26.

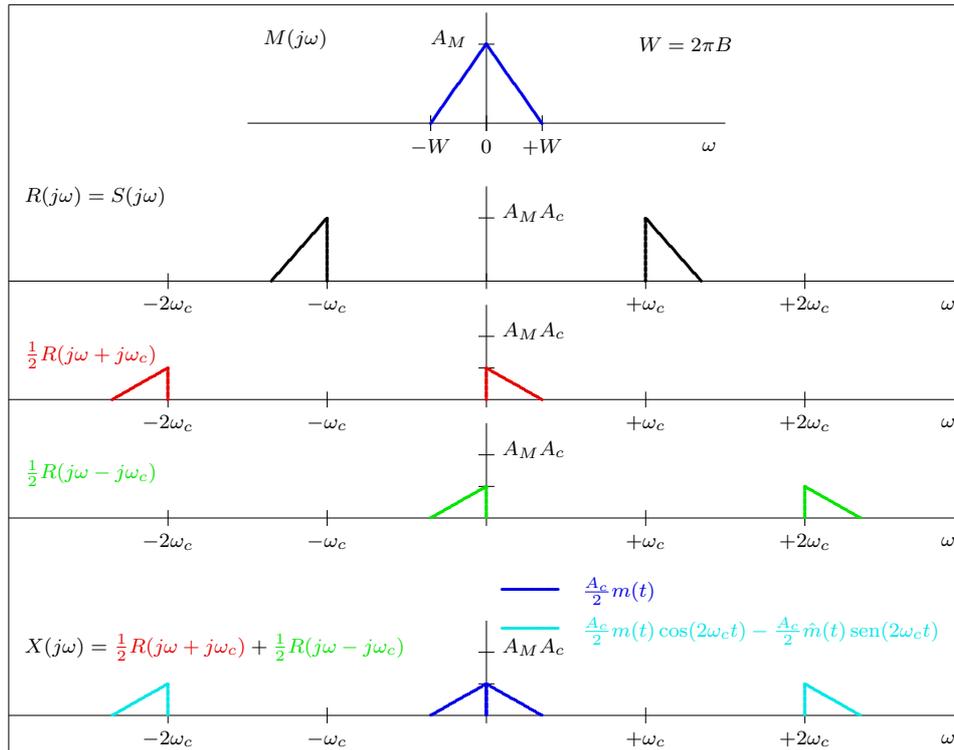


Figura 3.24: Interpretación frecuencial del proceso de demodulación de una señal de banda lateral única (para banda lateral superior).

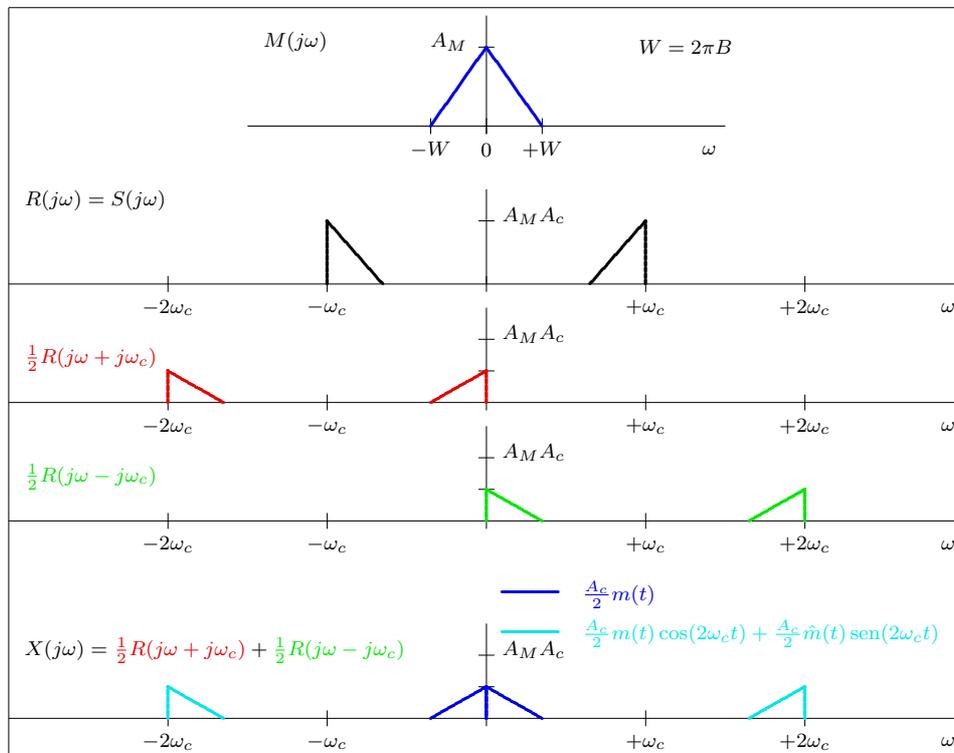


Figura 3.25: Interpretación frecuencial del proceso de demodulación de una señal de banda lateral única (para banda lateral superior).

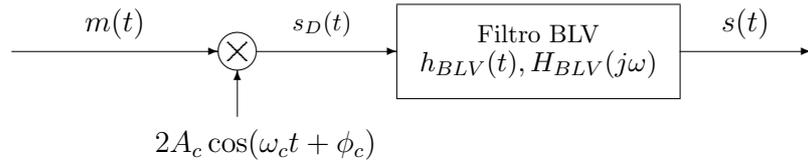


Figura 3.26: Generación de una señal de banda lateral vestigial (BLV) mediante filtrado directo.

La señal modulada de banda lateral vestigial tiene por tanto la expresión analítica

$$s(t) = \underbrace{m(t) \times 2A_c \cos(\omega_c t)}_{s_D(t)} * h_{BLV}(t).$$

En el dominio frecuencial, esta expresión se corresponde con

$$S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega).$$

Analicemos lo que ocurre en el receptor, si se utiliza un receptor síncrono como el de la Figura 3.17. Se asumirá que la señal se ha transmitido sin distorsión, por lo que la señal recibida será igual a la señal BLV transmitida. En este caso

$$R(j\omega) = S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega).$$

La señal demodulada (sin filtrar) en el dominio frecuencial es

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_c t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot [R(j\omega - j\omega_c) + R(j\omega + j\omega_c)].$$

$$X(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j2\omega_c) + M(j\omega)] \cdot H_{BLV}(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega) + M(j\omega + j2\omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega + j\omega_c).$$

Finalmente, la señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(j\omega) \cdot [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)].$$

Se puede interpretar que esta señal se ha obtenido filtrando la señal modulada con un filtro con respuesta equivalente

$$H_{EQ}(j\omega) = H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c).$$

Para que no se produzca distorsión, esta respuesta conjunta debe cumplir que en la banda de paso de la señal, para $|\omega| \leq W = 2\pi B$ rad/s, ha de ser ideal; es decir, que su módulo ha de ser constante, y su fase lineal. De aquí se pueden obtener la condición que ha de cumplir el filtro de banda lateral vestigial, que es

$$|H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)| = \text{cte, en } |\omega| \leq 2\pi B \text{ rad/s.}$$

Idealmente, el valor constante será 1. Esta condición se cumple si la respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral vestigial tiene una simetría impar respecto a ω_c en el rango de frecuencias

$\omega_c - \Delta_W < \omega < \omega_c + \Delta_W$, siendo Δ_W el exceso de ancho de banda (vestigio) en radianes/s. En ese caso, el ancho de banda de la señal modulada es

$$BW_{BLV} = B + \Delta_B \text{ Hz, con } \Delta_B = \frac{\Delta_W}{2\pi} \text{ Hz,}$$

donde Δ_B es exceso de ancho de banda vestigial en Hz (habitualmente $\Delta_B \ll B$).

La Figura 3.27 muestra un ejemplo de filtros para banda lateral superior y banda lateral inferior.

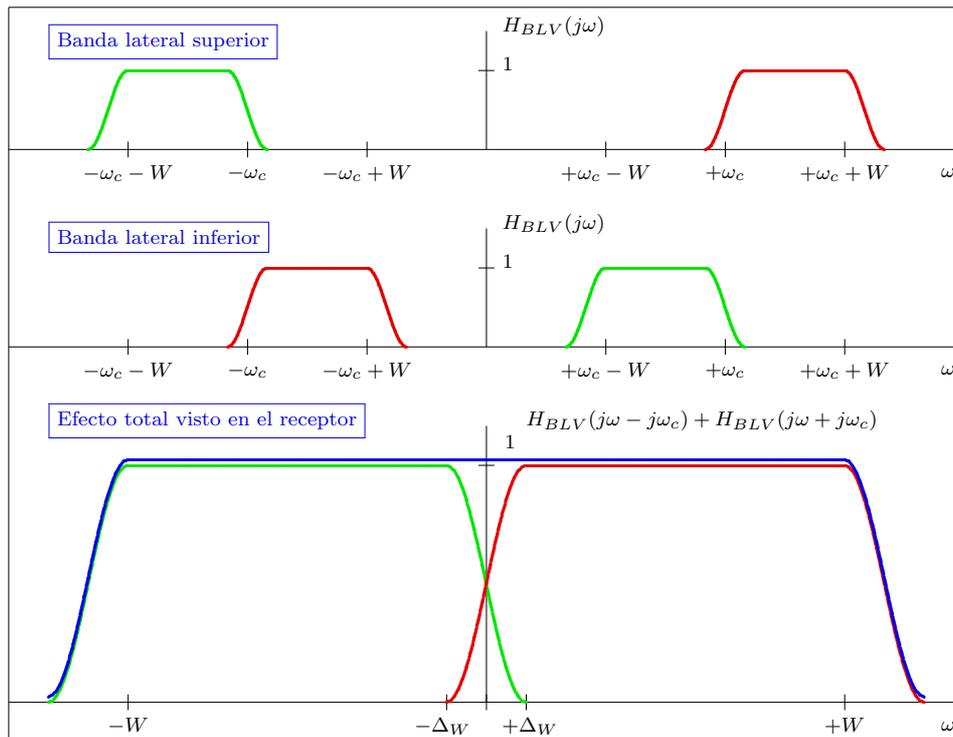


Figura 3.27: Ejemplos de filtros de banda lateral vestigial para banda lateral superior y banda lateral inferior.

Demodulación de señales BLV

Si los filtros cumplen la condición especificada, es posible recuperar la señal sin distorsión utilizando un receptor síncrono. La Figura 3.28 muestra la interpretación frecuencial del proceso de modulación y demodulación para una señal BLV de banda lateral superior.

3.2.5. Resumen de características y comparativa entre las distintas modulaciones de amplitud

La Tabla 3.1 muestra las principales características de las distintas modulaciones de amplitud que se han estudiado. En particular se hace referencia a la potencia de la señal modulada, y cuanta de ella está relacionada con la información transmitida, y al consumo de ancho de banda. Si se considera la eficiencia en potencia y la eficiencia espectral, las conclusiones que se pueden extraer son:

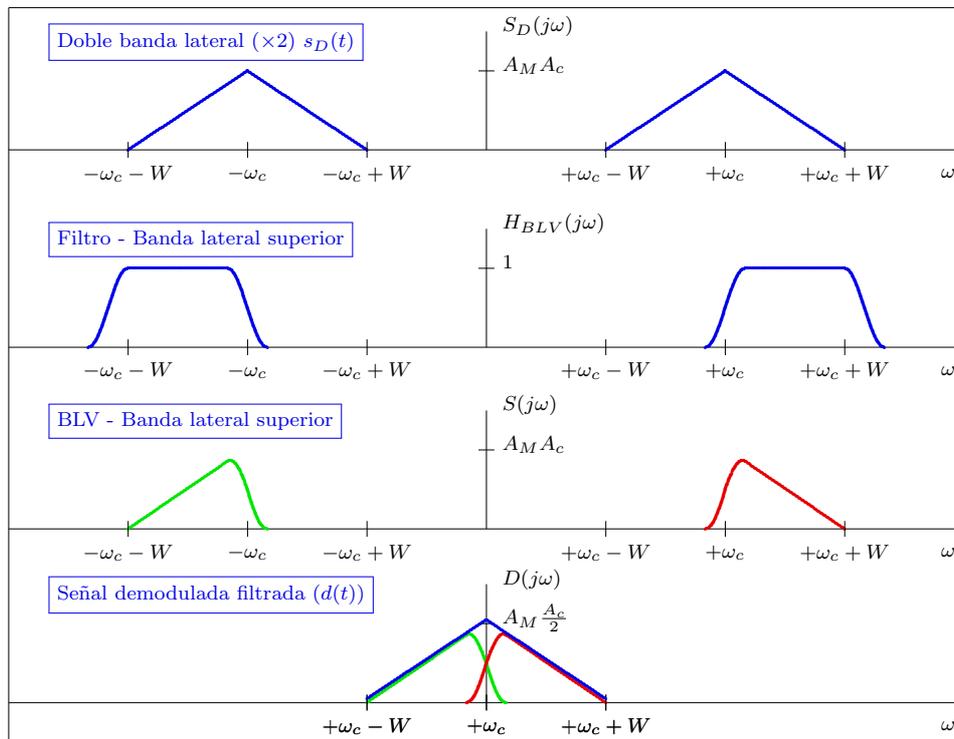


Figura 3.28: Interpretación frecuencial del proceso de modulación y demodulación para una modulación de banda lateral vestigial (banda lateral superior).

Modulación	BW (Hz)	P_S	$P_S(m(t))$	$d(t)$	$P_d(m(t))$
AM convencional	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	B	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$B + \Delta_B$	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

BW (Hz): ancho de banda de la señal modulada en Hz

P_S : potencia de la señal modulada

$P_S(m(t))$: potencia de la señal modulada relativa al término relacionado con $m(t)$

$d(t)$: señal recuperada con un receptor síncrono o coherente

$P_d(m(t))$: potencia de la señal demodulada relativa al término relacionado con $m(t)$

Tabla 3.1: Comparativa de modulaciones de amplitud.

- Eficiencia en potencia
 - Se entiende como tal que toda la potencia de la señal está relacionada con la transmisión de la información (señal $m(t)$).
 - DBL, BLU y BLV
- Eficiencia espectral
 - Mínimo ancho de banda para la transmisión (mismo ancho de banda que la señal moduladora, B Hz)
 - BLU y BLV (en este caso con un incremento vestigial Δ_B)

En cuanto a los datos correspondientes al demodulador que aparecen en la tabla, se ha considerado siempre que se ha utilizado un receptor síncrono o coherente. Como para el caso de la modulación AM convencional no se había estudiado este receptor, por completitud, se incluye a continuación

Detección síncrona de una modulación AM convencional

En esta sección se estudia la demodulación de una señal AM convencional con un receptor como el de la Figura 3.17. Como siempre, se asume que la señal modulada se transmite sin distorsión, por lo que la señal recibida es igual a la señal modulada que se ha transmitido, que en el caso de una modulación AM convencional es

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

La señal demodulada sin filtrar $x(t)$ es entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi) + \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi) \end{aligned}$$

El filtrado paso bajo elimina los términos de alta frecuencia (términos en $2\omega_c$), con lo que la señal demodulada filtrada es entonces

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi).$$

Por tanto, se revela también para esta modulación la conveniencia de un demodulador síncrono o coherente, con $\phi = \phi_c$, en cuyo caso la señal demodulada vale

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)].$$

3.3. Modulaciones Angulares

En la sección anterior se ha visto la modulación de amplitud de una portadora, en la que la amplitud de la misma se modifica en función de la señal mensaje $m(t)$. A los métodos de

modulación de amplitud se les denominan también *modulaciones lineales*, aunque una señal AM no es lineal en sentido estricto.

Las modulaciones de frecuencia (FM) y de fase (PM) se denominan *modulaciones angulares*. En este caso se modifica la frecuencia o fase de la señal portadora en función de la señal mensaje. Estas modulaciones son claramente no lineales, lo que implica una serie de propiedades:

1. Son más difíciles de implementar (tanto el modulador como el demodulador).
2. Su análisis es en general más complejo. En muchos casos, sólo es posible realizar análisis mediante aproximaciones.

Por otro lado, las modulaciones angulares expanden el espectro de la señal de modo que el ancho de banda de la señal es varias veces mayor que el de la señal. En sentido estricto, estas señales tienen un ancho de banda infinito, pero normalmente se trabaja con el denominado *ancho de banda efectivo*, que es aquel en el que la amplitud del espectro es relevante.

La razón por la que las modulaciones angulares se utilizan, a pesar de estas desventajas, es que tienen la ventaja de que presentan una gran inmunidad frente al ruido. Así pues, lo que hacen estas modulaciones es “cambiar” ancho de banda por inmunidad frente a ruido. Por esta razón, la modulación FM se emplea en sistemas de difusión de música de alta fidelidad o en sistemas de comunicaciones punto a punto en el que la potencia de transmisión está limitada.

3.3.1. Representación de las señales FM y PM

Si se tiene en cuenta que ambas modulaciones modifican, en función de la señal mensaje, el argumento de una portadora sinusoidal, es posible hacer un análisis conjunto de las dos modulaciones y, como se verá posteriormente, existe una clara relación entre ambas.

En general, una modulación angular se puede representar matemáticamente como

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t)),$$

donde teniendo en cuenta que se trata de una señal generada a partir de una portadora de frecuencia f_c Hz ($\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s) en general se escribirá

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t) = \omega_c t + \phi(t).$$

Esta será la representación que se utilizará de forma conjunta para modulaciones PM y FM. El argumento $\theta(t)$ es la fase de la señal en el instante t , y la frecuencia instantánea de la señal, $f_i(t)$, viene dada por su derivada

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t).$$

Para la expresión particular anterior

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t).$$

Si $m(t)$ es la señal moduladora (mensaje a transmitir), la relación de los parámetros de la señal $s(t)$ con la señal moduladora es la siguiente para cada una de los dos tipos de modulación:

- Modulación de fase (PM)

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t)$$

k_p : constante de desviación de fase

- Modulación de frecuencia (FM)

$$\Delta f_i(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \phi(t) = k_f \cdot m(t)$$

k_f : constante de desviación de frecuencia

Las constantes k_p y k_f son las *constantes de desviación* de fase y frecuencia, respectivamente.

Hay una relación entre ambos métodos de modulación, que se puede ver fácilmente si se escriben las expresiones de $\phi(t)$ y $\frac{d}{dt} \phi(t)$ en PM y FM

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot \frac{d}{dt} m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot m(t), & \text{FM} \end{cases}$$

Se puede ver que modular en FM una portadora con la integral de un mensaje es equivalente a modular en PM la portadora con el mensaje original. Es decir, si se modula en frecuencia (FM) con la derivada de un mensaje, se obtiene la misma señal que si se modula en fase (PM) con el mensaje original. La Figura 3.29 representa la relación entre ambas modulaciones

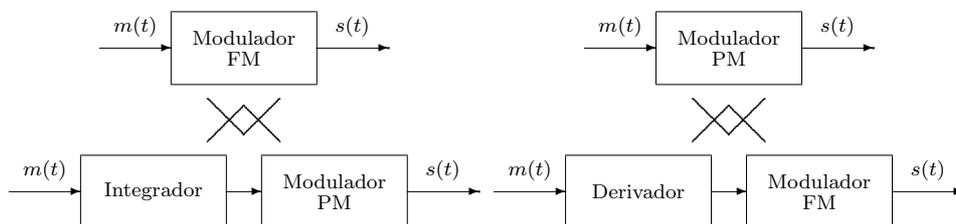


Figura 3.29: Relación entre las modulaciones FM y PM.

Esta relación entre ambos tipos de modulación permite analizarlas en común para luego destacar sus diferencias. La forma de onda de una modulación angular es la de una senoide de amplitud constante, cuya información angular se modifica a lo largo del tiempo, lo que visualmente se traduce en que cambia la longitud entre pasos por cero de la señal. La Figura 3.30 muestra un ejemplo de señal moduladora, la señal portadora, y la señal modulada en FM resultante.

El efecto de las constantes de desviación de frecuencia o fase, es ponderar el grado de desviación de la señal modulada respecto de la señal portadora de frecuencia y fase constantes. Las Figuras 3.31 y 3.32 muestran la señal modulada para una modulación de fase PM para dos valores distintos de constante de desviación de fase, $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$ y $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$, respectivamente.

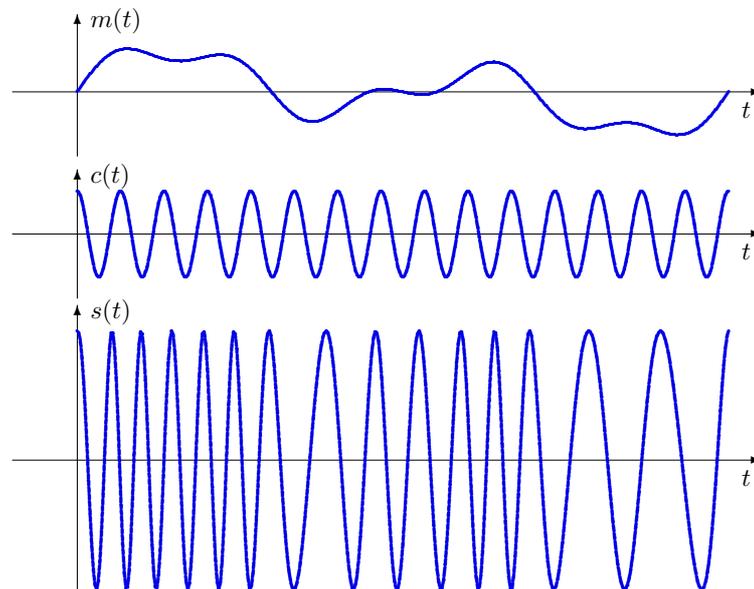


Figura 3.30: Forma de onda de una modulación angular (en este caso FM) para un ejemplo de señal moduladora.

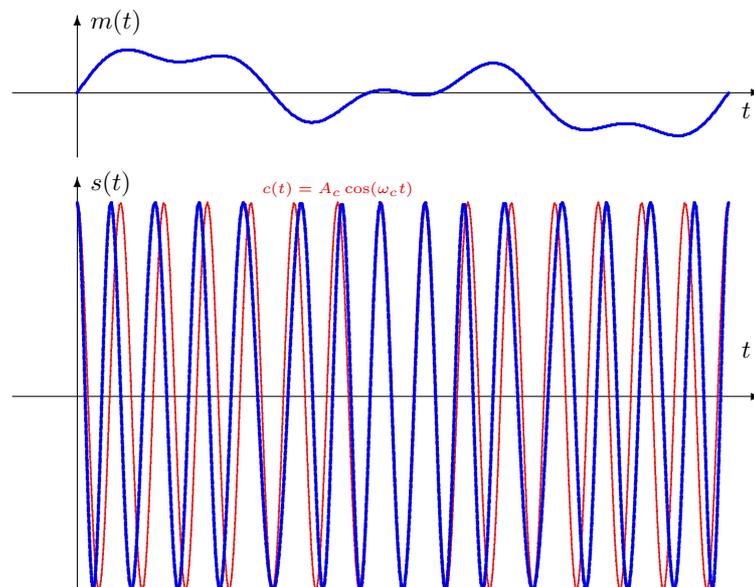


Figura 3.31: Señal modulada para una modulación PM con $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$ para un ejemplo de señal moduladora.

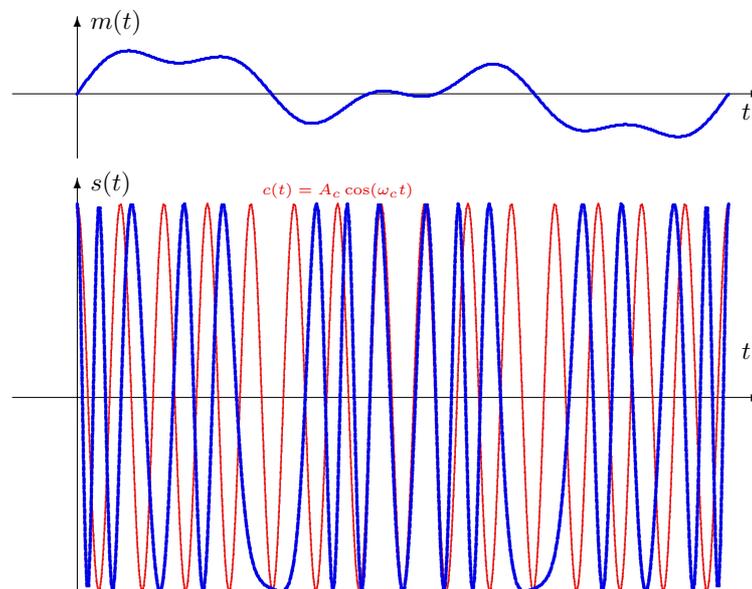


Figura 3.32: Señal modulada para una modulación PM con $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$ para un ejemplo de señal moduladora.

Se puede ver cómo con respecto a la señal portadora, cuando la señal moduladora toma valores positivos, la señal modulada se adelanta (al incrementarse el término de fase proporcionalmente a $m(t)$), y se retrasa cuando toma valores negativos (al reducirse el término de fase en este caso). La magnitud del adelanto o retardo en un instante dado, es proporcional al parámetro k_p .

Las Figuras 3.33 y 3.34 muestran la señal modulada para una modulación de fase PM para dos valores distintos de constante de desviación de fase, $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$ y $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$, respectivamente.

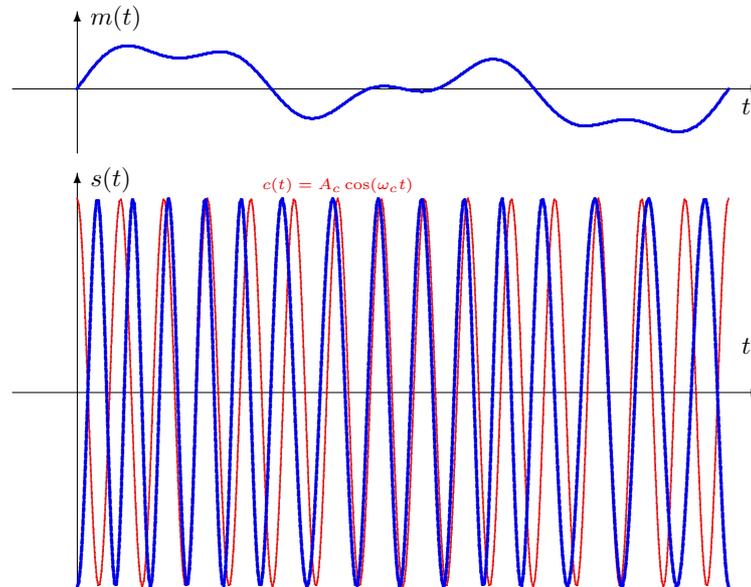


Figura 3.33: Señal modulada para una modulación FM con $k_f = 2\pi \times \frac{1}{4}$ para un ejemplo de señal moduladora.

Ahora, la señal modulada se adelanta frente a la portadora cuando la integral de la señal es positiva, y se retrasa cuando es negativa, ya que ahora es la integral de la señal moduladora la que modifica el término de fase. De nuevo, la magnitud de la desviación con respecto a la portadora en un instante, es proporcional al valor de la constante de desviación, en este caso de frecuencia, k_f .

3.3.2. Índices de modulación

Un parámetro importante de una modulación angular es el índice de modulación, ya que varios aspectos de la modulación, como el ancho de banda o la inmunidad frente al ruido, dependen de su valor. Los índices de modulación se definen a partir de las constantes de desviación, de fase o frecuencia, respectivamente. En una señal modulada en fase, la máxima desviación en fase de la señal es

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|).$$

Del mismo modo, en una señal modulada en frecuencia, la máxima desviación de frecuencia de la señal es

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|).$$

A partir de estas desviaciones máximas, se definen los índices de modulación de una modulación PM y de una modulación FM, respectivamente, como

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M$$

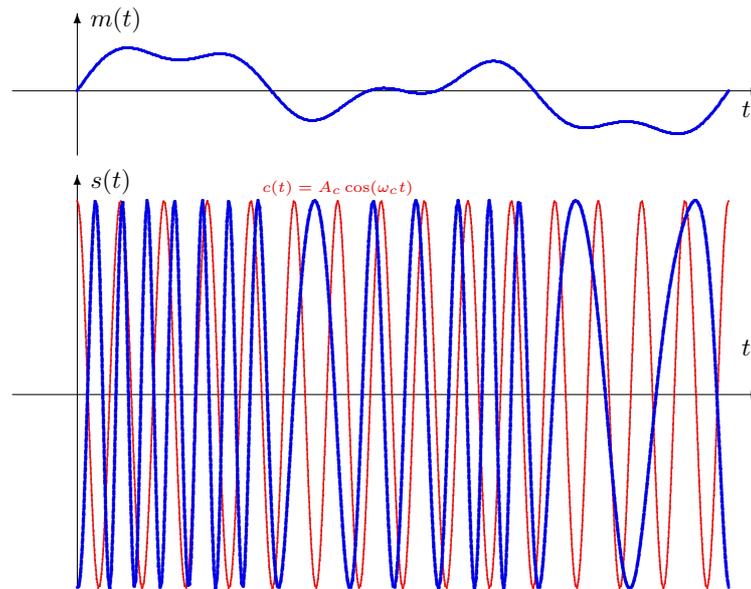


Figura 3.34: Señal modulada para una modulación FM con $k_f = 2\pi \times \frac{3}{4}$ para un ejemplo de señal moduladora.

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B},$$

donde B es al ancho de banda en Hz de la señal moduladora $m(t)$, y C_M es el valor máximo del módulo de la misma, lo que define su rango: $-C_M \leq m(t) \leq +C_M$.

3.3.3. Características espectrales de una modulación angular

Debido a la no linealidad de las modulaciones angulares, en muchos casos la caracterización precisa de su espectro no se puede tratar de forma matemática estricta. Normalmente se estudia para señales moduladoras sencillas y se hacen ciertas aproximaciones. A continuación se ven algunos casos particulares: la modulación de banda estrecha, las modulaciones mediante una señal sinusoidal y mediante una señal periódica, y finalmente se discutirá el caso de una señal moduladora arbitraria no periódica.

Modulación angular de banda estrecha

Una modulación angular se denomina de banda estrecha si las constantes k_p o k_f y la señal $m(t)$ son tales que se cumple que

$$\phi(t) \ll 1.$$

Esto implica valores pequeños de las constantes de desviación. En este caso, dado que la señal modulada tiene la expresión general

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t)),$$

y teniendo en cuenta la relación trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \text{sen}(A) \text{sen}(B),$$

se puede expandir la expresión de la señal modulada y hacer la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos \phi(t) - A_c \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \sin \phi(t) \\ &\approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t). \end{aligned}$$

Se han considerado las siguientes aproximaciones para $\phi(t)$ pequeño

$$\cos(\phi(t)) \approx 1, \quad \sin(\phi(t)) \approx \phi(t).$$

Esta ecuación es muy similar a la expresión de una señal AM convencional, donde aparece un signo negativo y un seno en lugar de un coseno, y en lugar de la señal $m(t)$ tenemos la fase $\phi(t)$, que para una PM es proporcional a $m(t)$ y para una FM es proporcional a la integral de $m(t)$. Recuerde que

$$\text{AM Convencional: } s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot m_a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$\text{Recuerde también que } \phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Para este tipo de modulaciones el espectro de la señal es muy similar al de una señal AM, al menos en cuanto a su ancho de banda. Hay que tener en cuenta que el ancho de banda de la integral de una señal es el mismo que el de la propia señal (la respuesta en frecuencia de un derivador es $j\omega$). Por tanto el espectro tendrá las siguientes componentes y características:

- Dos deltas, situadas en $\pm\omega_c$ (espectro portadora)
- Réplicas del espectro de $\phi(t)$ situadas en $\omega = \pm\omega_c$
- Forma del espectro de $\phi(t)$
 - PM: proporcional al espectro de $m(t)$

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) \leftrightarrow \Phi(j\omega) = k_p \cdot M(j\omega)$$

- FM: proporcional al espectro de la integral de $m(t)$

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \leftrightarrow \Phi(j\omega) = 2\pi k_f \cdot \frac{M(j\omega)}{j\omega}$$

Así pues, el ancho de banda de estas señales de banda estrecha es

$$BW_{Angular-BE} \approx 2B.$$

Modulación mediante una señal sinusoidal

En esta sección se analizará el caso en que la señal moduladora es una señal sinusoidal, de amplitud a y frecuencia ω_m rad/s. Por conveniencia, para poder analizar simultáneamente las modulaciones PM y FM, la expresión analítica de la señal será

$$m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t) & \text{para modulación PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t) & \text{para modulación FM} \end{cases}$$

De esta forma, la expresión analítica de la señal moduladora coincide para las dos variantes. Los índices de modulación de una modulación PM y FM son

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M = k_p \cdot a$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B} = k_f \cdot a \cdot \frac{2\pi}{\omega_m}$$

Por tanto, las expresiones del término de fase $\phi(t)$ son

- Expresiones de $\phi(t)$ para PM

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) = k_p \cdot a \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_p \sin(\omega_m t)$$

- Expresiones de $\phi(t)$ para FM

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = 2\pi \cdot k_f \cdot a \cdot \frac{1}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_f \sin(\omega_m t)$$

Lo que significa que la expresión de la señal modulada es común para ambos tipos de modulación

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t))$$

donde β es el índice de modulación de la modulación correspondiente, β_p o β_f . Como un coseno es la parte real de una exponencial compleja, la señal modulada se puede reescribir como

$$s(t) = \text{Re} (A_c \cdot e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)})$$

La función $e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)}$ es periódica de frecuencia $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ Hz. Esto implica que admite un Desarrollo en serie de Fourier, de la forma

$$e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t}$$

El coeficiente de índice n del desarrollo en serie, que se denota aquí como $J_n(\beta)$, es en este caso la función de Bessel de primera especie de orden n y argumento β . Una expansión en serie de la función de Bessel es la siguiente:

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}$$

Para valores pequeños de β , se puede utilizar la aproximación

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}$$

Se puede ver que para valores pequeños de β únicamente son significativos los primeros términos (en general se puede limitar a $n = 1$ o $n = 2$).

Las funciones de Bessel cumplen además las siguientes propiedades de simetría

$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \text{ par} \\ -J_n(\beta), & n \text{ impar} \end{cases}$$

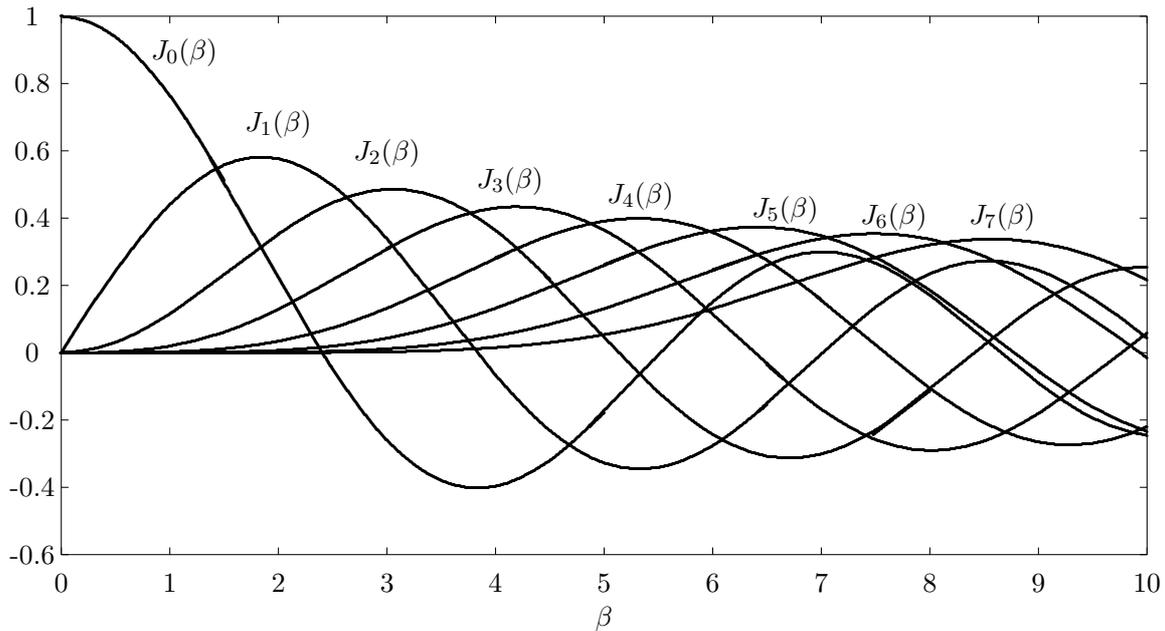


Figura 3.35: Funciones de Bessel, $J_n(\beta)$, para distintos valores de n .

La Figura 3.35 representa las funciones de Bessel, en función de β , para varios valores de n .

Utilizando el desarrollo en serie de Fourier, se puede obtener una expresión alternativa de la señal modulada

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \text{Re} \left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n\cdot\omega_m)t} \right) = \text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \underbrace{e^{j\omega_c t} \cdot e^{j(n\cdot\omega_m)t}}_{e^{j(\omega_c + n\cdot\omega_m)t}} \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \cos((\omega_c + n \cdot \omega_m) \cdot t)
 \end{aligned}$$

La señal modulada se puede expresar como una suma infinita de sinusoides (cosenos) con las siguientes características (teniendo en cuenta que el índice del sumatorio es n):

- Frecuencias de las sinusoides

$$\text{Frecuencias (Hz)} : f_c + n \cdot f_m, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Pulsación (rad/s)} : \omega_c + n \cdot \omega_m, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Amplitud de la senoide de pulsación $\omega_c + n \cdot \omega_m$

$$A_c \cdot J_n(\beta)$$

Esto quiere decir que el ancho de banda es teóricamente infinito. Sin embargo, el ancho de banda de la señal modulada no es infinito, ya que la amplitud de las componentes para valores altos de n es muy pequeña. Por ello se define un *ancho de banda efectivo* finito. En general, se define el ancho de banda efectivo como aquel que contiene al menos el 98% de la potencia de la señal. En este caso, este ancho de banda efectivo es

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m \text{ Hz}$$

Veamos como afecta la señal moduladora al espectro de la señal. En este caso, suponiendo las mismas señales moduladoras sinusoidales de amplitud a y frecuencia f_m

$$B_e = 2(\beta + 1)f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right)f_m, & \text{FM} \end{cases},$$

o lo que es lo mismo

$$B_e = 2(\beta + 1)f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2(k_f a + f_m), & \text{FM} \end{cases}.$$

Por otro lado, el número total de armónicos en el ancho de banda efectivo B_e es

$$M_e = 2\lfloor\beta\rfloor + 3 = \begin{cases} 2\lfloor k_p a \rfloor + 3, & \text{PM} \\ 2\lfloor \frac{k_f a}{f_m} \rfloor + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

Estas expresiones muestran que el aumento de la amplitud de la señal, a , tiene prácticamente el mismo efecto en ambas modulaciones, incrementa el ancho de banda. Por otro lado, el incremento de la frecuencia, f_m , también incrementa el ancho de banda, pero el efecto es mucho mayor en la modulación PM que en la FM. En la PM el incremento es multiplicativo mientras que en la FM es aditivo.

Un incremento de la amplitud incrementa el número de armónicos en el ancho de banda de la señal. Sin embargo, el aumento de la frecuencia, para la PM, no varía el número de armónicos, mientras que en la FM lo decremanta. Esto explica la relativa insensibilidad del ancho de banda de la FM respecto a la frecuencia de la señal. Por un lado, aumentar f_m aumenta el espacio entre los armónicos, pero por otro lado su número es cada vez menor.

A continuación se verá un ejemplo de la forma del espectro. En este caso, se hará para una modulación con índice de modulación $\beta = 5$. En este caso, la señal modulada es una suma de sinusoides de amplitud $A_c \cdot J_n(\beta)$ y pulsaciones $\omega_c + n \cdot \omega_m$. Los valores de las funciones de Bessel para el valor de β son

$$J_0(5) = -0,18, \quad J_1(5) = -0,32, \quad J_2(5) = 0,05, \quad J_3(5) = 0,37, \quad J_4(5) = 0,39, \quad J_5(5) = 0,26, \dots$$

La Figura 3.36 muestra la forma de la respuesta en frecuencia para frecuencias positivas. Hay que tener en cuenta que la respuesta en frecuencia de un coseno es una delta con amplitud π veces la amplitud del coseno. La propiedad de las funciones de Bessel de que $J_{-n}(\beta)$ sea igual a $J_{+n}(\beta)$ o a dicho valor cambiado de signo, dependiendo de que n sea par o impar, proporciona esa peculiar simetría de la respuesta en frecuencia con respecto a la frecuencia de la portadora ω_c .

Modulación mediante una señal periódica

En este caso se llega, mediante un desarrollo similar a la misma conclusión que en el caso de una señal sinusoidal, también se van a tener únicamente frecuencias de la forma $f_c + n f_m$. Una señal periódica admite un desarrollo en serie de Fourier, de forma que se puede expresar como una suma de sinusoides de frecuencias múltiplo de la que define el período. Por tanto, las frecuencias en el espectro de la señal

$$f_c \pm n \cdot f_m \quad \text{ó} \quad (\omega_c \pm n \cdot \omega_m)$$

Las amplitudes de cada frecuencia vendrán dadas por la suma de las contribuciones de todos los armónicos.

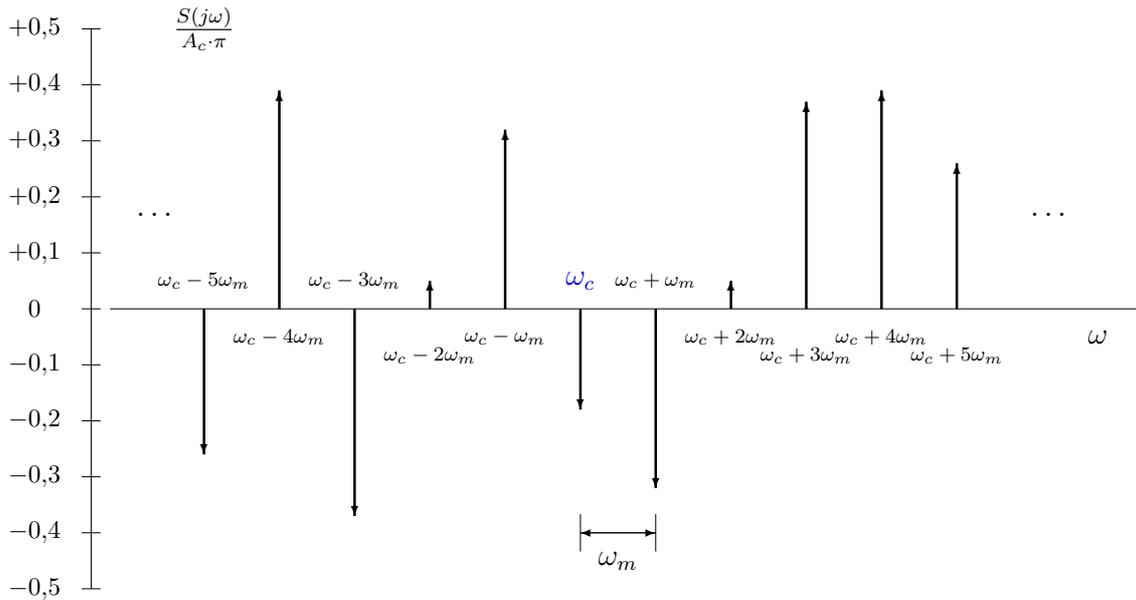


Figura 3.36: Respuesta en frecuencia de una modulación angular para un índice de modulación $\beta = 5$ con una moduladora sinusoidal de frecuencia ω_m rad/s.

Modulación mediante una señal determinista no periódica

Al análisis de este caso es muy complejo debido a la no linealidad de las modulaciones. Sin embargo, existe una regla heurística que proporciona el valor aproximado del ancho de banda de la señal modulada. Es la denominada *regla de Carson*, que dice que el ancho de banda de la señal modulada cuando la señal moduladora tiene un ancho de banda de B Hz, es aproximadamente

$$BW_{Carson} \approx 2 \cdot (\beta + 1) \cdot B \text{ Hz.}$$

Teniendo en cuenta que en modulaciones FM de banda ancha el valor de β está normalmente alrededor de 5 o incluso en valores mayores, este ancho de banda es mucho mayor que el ancho de banda de los esquemas de modulación AM, que era B (BLV o BLU) o $2B$ (DBL y AM convencional).

3.3.4. Modulación de las señales FM y PM

Cualquier proceso de modulación o demodulación, tanto para modulación de amplitud como para modulaciones angulares, implica la generación de frecuencias que no se encuentran en la señal mensaje original. Esto significa que tanto un modulador como un demodulador no se pueden modelar mediante un sistema lineal e invariante, ya que un sistema lineal e invariante no produce nuevas frecuencias, frecuencias no presentes en la señal de entrada del sistema, en la salida del mismo.

Los moduladores angulares son, en general, sistemas no lineales y variantes en el tiempo. Un método para generar una señal de FM de forma directa es diseñar un oscilador cuya tensión varía con una tensión de entrada. Este tipo de osciladores se denominan *osciladores controlados por tensión* y se suelen denotar con las siglas inglesas VCO. Un VCO se puede implementar de varias formas:

1. Mediante un *diodo varactor*: un varactor es un elemento cuya capacidad varía con la tensión que se le aplica. Por tanto, si tal dispositivo se utiliza en el diseño de un oscilador, la frecuencia del mismo varía en función de la capacidad y por tanto de la tensión aplicada.

$$C(t) = C_0 + k_0 m(t).$$

Cuando $m(t) = 0$, la frecuencia del circuito sintonizado es

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}.$$

En general, para $m(t)$ no nulo se tiene

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0(C_0 + k_0 m(t))}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{C_0} m(t)}} \\ &= f_c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{C_0} m(t)}}. \end{aligned}$$

Asumiendo que

$$\varepsilon = \frac{k_0}{C_0} m(t) \ll 1,$$

y utilizando las aproximaciones

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon,$$

se obtiene la expresión

$$f_i(t) \approx f_c \left(1 - \frac{k_0}{2C_0} m(t) \right).$$

2. Utilizando *un tubo de reactancia*: un tubo de reactancia es un dispositivo cuya inductancia varía con la tensión aplicada. Se puede hacer un análisis similar al del diodo varactor.

Otra posibilidad para la generación de señales de una modulación angular es el denominado *método indirecto*. En este caso, el proceso se divide en dos partes:

1. Se genera una modulación angular de banda estrecha. Debido a la relación con la modulación AM esto es sencillo de realizar.
2. El segundo paso es generar la señal de banda ancha a partir de la señal de banda estrecha. Si la señal de banda estrecha es

$$s_{be}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)),$$

la salida del multiplicador de frecuencia es

$$y(t) = A_c \cos(2\pi n f_c t + n\phi(t)).$$

Finalmente, para ajustar la frecuencia portadora deseada, se multiplica por un oscilador local

$$s(t) = A_c \cos(2\pi(n f_c - f_{OL})t + n\phi(t)).$$

3.3.5. Demodulación de las señales FM y PM

La demodulación de una señal FM consiste en encontrar la frecuencia instantánea de la señal modulada $s(t)$, y a continuación restarle la frecuencia de la portadora, ya que

$$m(t) = \frac{f_i(t) - f_c}{k_f}.$$

En cuanto a una señal PM, la demodulación consiste en encontrar la fase de la señal, ya que

$$m(t) = \frac{\phi(t)}{k_p}.$$

En general un demodulador FM se puede implementar mediante un conversor de FM a AM y luego utilizar un demodulador AM, tal y como muestra la Figura 3.37.



Figura 3.37: Esquema general de un demodulador FM.

La conversión FM-AM se puede hacer de muchas formas:

1. Un derivador

$$|H(j\omega)| = \omega.$$

2. Característica en frecuencia de un circuito sintonizado. Se aprovecha la parte lineal de dicha respuesta. Este sistema es fácil de implementar, aunque la zona lineal puede ser pequeña. Cuando la zona lineal es demasiado pequeña, se pueden utilizar dos circuitos sintonizados a dos frecuencias y combinarlos con el denominado *discriminador balanceado*.

Estos métodos, tienen el inconveniente de que el ancho de banda de la señal AM generada en el paso intermedio es igual al ancho de banda equivalente, B_e , de la modulación FM, con lo que el ruido correspondiente es el ruido contenido en esa banda que es generalmente mayor que B .

Para minimizar el efecto del ruido, y sobre todo del umbral de ruido que veremos posteriormente, se utilizan varias alternativas:

1. Demodulador de FM con realimentación.
2. Demodulador mediante lazo enganchado en fase (PLL).

3.4. Ruido en sistemas de comunicaciones analógicas

Anteriormente se han estudiado las propiedades de potencia y de ancho de banda de las distintas modulaciones analógicas, de amplitud y angulares. En este apartado se analiza el efecto del ruido en estas modulaciones. En todos los casos se van a considerar las siguientes premisas:

- La señal moduladora $m(t)$ tiene un ancho de banda B Hz.
- Se asume una transmisión ideal, o transmisión sobre canal gaussiano, donde la señal transmitida $s(t)$ no sufre ninguna distorsión lineal y el único efecto producido durante la transmisión es la suma de ruido térmico

$$r(t) = s(t) + n(t).$$

La potencia recibida a la entrada del receptor debida al término de señal es por tanto P_S , la potencia de la señal modulada transmitida. En cuanto al término de ruido térmico, se utilizará el modelo estadístico habitual

- Proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$
- El receptor utilizado para modulaciones e amplitud será un receptor coherente
 - Se introducirán filtros para limitar el efecto del ruido antes de proceder a la demodulación. Los filtros se ajustarán al ancho de banda de la señal transmitida, de forma que se minimice el efecto del ruido sin producir ninguna distorsión en la señal de información $s(t)$.
 - Los filtros se considerarán ideales, de forma que se obtengan las prestaciones máximas alcanzables.

El objetivo es calcular la relación señal a ruido (S/N o SNR) de la señal demodulada para los distintos tipos de modulación y se comparará con la relación señal a ruido de la señal en una transmisión en banda base, cuando se transmite la señal moduladora sin modular, y que se denotará como $(\frac{S}{N})_b$.

3.4.1. Relación señal a ruido en una transmisión en banda base

En este apartado se obtiene la relación señal a ruido de referencia, la obtenida cuando se transmite la señal sin modular, de forma que

$$s(t) = m(t) \rightarrow P_S = P_M.$$

La señal a la entrada del receptor será por tanto

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

En el receptor el único procesamiento que se realizará será un filtrado para minimizar el efecto del ruido sin distorsionar la señal de información. Para ello se utilizará un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz. La Figura 3.38 muestra el esquema del receptor.

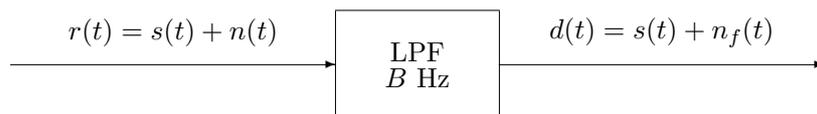


Figura 3.38: Esquema de un receptor en banda base para la recepción de una señal de ancho de banda B Hz.

La potencia del ruido a la salida del filtro se obtiene integrando su densidad espectral de potencia. Teniendo en cuenta que a la salida de un sistema lineal e invariante la densidad espectral de

potencia es la de la entrada multiplicada por el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro, la densidad espectral de potencia del ruido filtrado $n_f(t)$ es

$$S_{n_f}(j\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{si } |\omega| \leq W = 2\pi B \text{ rad/s} \\ 0 & \text{si } |\omega| > W = 2\pi B \text{ rad/s} \end{cases}$$

Por tanto, la potencia del ruido filtrado es

$$P_{n_f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_f}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 \cdot B \text{ Watt.}$$

Este mismo resultado se podría obtener teniendo en cuenta que la potencia de ruido que atraviesa un filtro ideal de ancho de banda B Hz es $N_0 \times B$ Watt. En cualquier caso, la relación señal a ruido en banda base es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 \cdot B}.$$

Este será el valor de referencia con el que se comparará la relación señal a ruido obtenida con las distintas variantes de modulación que se analizarán.

3.4.2. Efecto del ruido en modulaciones de amplitud

En esta sección se determina la relación señal a ruido a la salida del receptor que demodula las señales moduladas en amplitud. Los resultados obtenidos se comparan con el resultado del efecto del ruido en un sistema de comunicaciones banda base.

Receptor coherente y filtrado para minimizar el efecto del ruido

Para todas las modulaciones de amplitud se va a utilizar el receptor que se muestra en la Figura 3.39, donde $\phi = \phi_c$ al tratarse de un receptor coherente. Cuando sea preciso, por cuestión de simplicidad, se considerará $\phi_c = 0$.

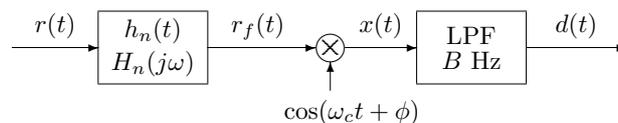


Figura 3.39: Receptor utilizado para modulaciones de amplitud.

El filtro de ruido $h_n(t) / H_n(j\omega)$ se coloca antes del demodulador síncrono para minimizar el efecto del ruido. Para ello, es un filtro paso banda ideal cuya banda de paso, y por tanto el ancho de banda, es igual que la de la señal modulada $s(t)$.

La señal recibida se modela con el modelo de ruido aditivo térmico

$$r(t) = s(n) + n(t).$$

La señal filtrada por el filtro de ruido, teniendo en cuenta que este no modifica la señal de información recibida, es

$$r_f(t) = s(n) + n_f(t), \text{ con } n_f(t) = n(t) * h_n(t).$$

La señal demodulada se obtiene como

$$x(t) = r_f(t) \times \cos(\omega_c t) = s(t) \cdot \cos(\omega_c t) + n_f(t) \cdot \cos(\omega_c t) = x_S(t) + x_n(t)$$

y la señal demodulada filtrada es

$$d(t) = x(t) * h_{LFP-B}(t) = x_S(t) * h_{LFP-B}(t) + x_n(t) * h_{LFP-B}(t) = d_S(t) + d_n(t).$$

Como se puede ver, a la salida del receptor hay dos términos:

- Un término debido a la señal modulada $s(t)$, que es $d_S(t)$.
- Un término debido al ruido térmico $n(t)$, que es $d_n(t)$.

En cuanto al término de señal, no se ve afectado por el filtro de ruido. Para modulaciones de amplitud se calculó en su momento, y el resultado obtenido, junto con la potencia de la señal demodulada, P_{d_S} , se muestra en la Tabla 3.2.

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

P_{d_S} : potencia en $d_S(t)$ relativa a $m(t)$

P_{M_a} : potencia de $m_a(t)$, $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} P_M$

Tabla 3.2: Potencia de la señal modulada, señal de salida del demodulador, y potencia de la señal para cada tipo de modulación de amplitud cuando se utiliza un demodulador síncrono.

En cuanto al término de ruido, su potencia depende del filtro de ruido empleado, que a su vez depende del tipo de modulación, y en particular de su ancho de banda. Denotaremos su potencia como P_{d_n} , y se calculará posteriormente su valor para cada tipo de modulación.

Una vez que se haya obtenido la potencia de ruido a la salida del demodulador, la relación señal a ruido tras la demodulación se obtendrá como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}}$$

y se comparará con la relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_o \cdot B}.$$

Potencia de ruido a la salida del demodulador - Análisis general

La densidad espectral de potencia del ruido filtrado $n_f(t)$ es

$$S_{n_f}(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |H_n(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_n(j\omega)|^2$$

La densidad espectral de potencia del ruido demodulado $x_n(t)$ es entonces

$$S_{x_n}(j\omega) = \frac{1}{4}S_{n_f}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_{n_f}(j\omega + j\omega_c) = \frac{N_0}{8} [|H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 + |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2]$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia tras el filtrado paso bajo $d_n(t)$ es

$$S_{d_n}(j\omega) = S_{x_n}(j\omega) \cdot |H_{LPF-B}(j\omega)|^2 = \begin{cases} S_{x_n}(j\omega), & \text{si } |\omega| \leq W = 2\pi B \\ 0, & \text{si } |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$

En ese caso, la potencia tras el filtrado paso bajo se calcula como

$$\begin{aligned} P_{d_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{d_n}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_{x_n}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0}{8} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega \right] \end{aligned}$$

Cálculo de la potencia de ruido - AM convencional y DBL

Como el ancho de banda de las modulaciones AM convencional y de doble banda lateral es idéntico, el filtro de ruido y por tanto la potencia de ruido es también la misma. Para ambas modulaciones el filtro de ruido es idéntico

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde W es el ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$). La Figura 3.40 representa el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado.

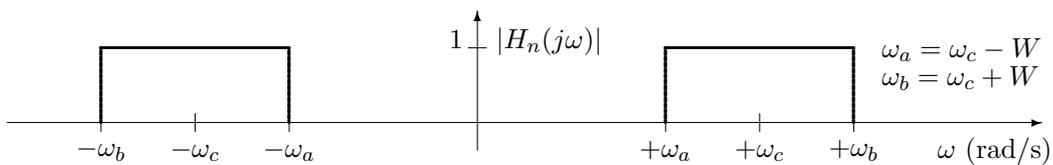


Figura 3.40: Respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado en la modulación AM convencional y en la modulación de doble banda lateral.

Para este filtro de ruido se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 4B$$

y la potencia de ruido es por tanto

$$P_{d_n} = \frac{1}{2}N_0B.$$

La Figura 3.41 muestra la interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor.

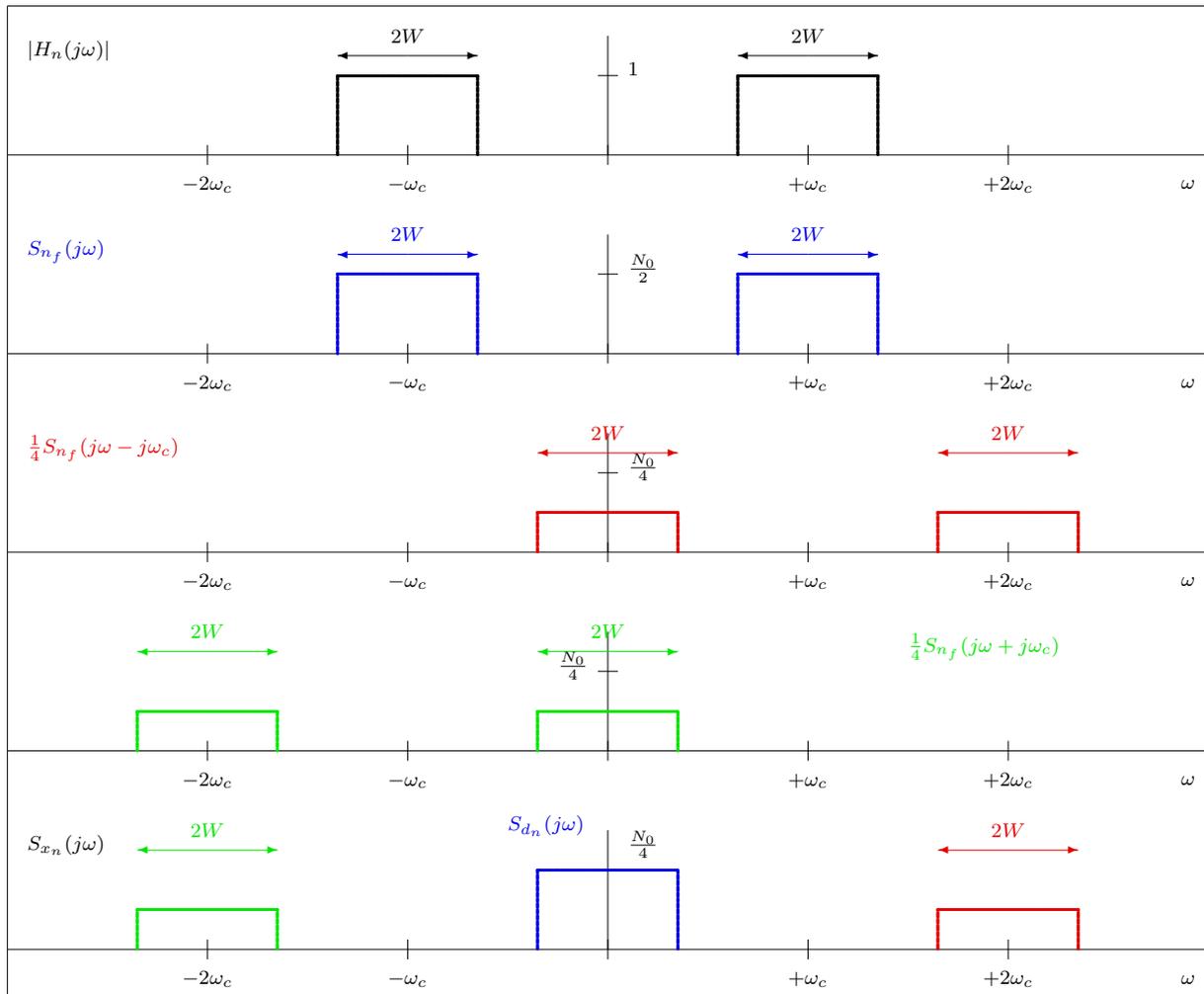


Figura 3.41: Interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor para las modulaciones AM convencional y DBL.

Cálculo de la potencia de ruido - Banda lateral única (BLU)

Se va a considerar el caso de una modulación BLU de banda lateral superior. Para banda lateral inferior el resultado es el mismo. Para esta modulación el filtro de ruido tiene la siguiente respuesta en frecuencia

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde W es el ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$). La Figura 3.42 representa el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado.

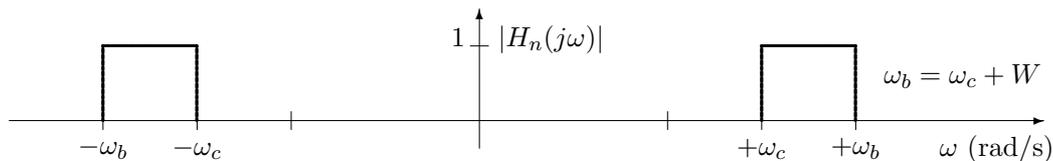


Figura 3.42: Respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado en una modulación de banda lateral única (banda lateral superior).

Para este filtro de ruido se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2B$$

y la potencia de ruido es por tanto

$$P_{dn} = \frac{1}{4} N_0 B.$$

La Figura 3.43 muestra la interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor.

Cálculo de la potencia de ruido - Banda lateral vestigial (BLV)

Se va a considerar el caso de una modulación BLV de banda lateral superior. Para banda lateral inferior el resultado es el mismo. Para esta modulación el filtro de ruido tiene la siguiente respuesta en frecuencia

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - \Delta_W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde W es el ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$), y Δ_W es el exceso de ancho de banda vestigial en rad/s ($\Delta_W = 2\pi\Delta_B$). La Figura 3.42 representa el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado.

Para este filtro de ruido se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2(B + \Delta_B)$$

y la potencia de ruido es por tanto

$$P_{dn} = \frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B).$$

La Figura 3.45 muestra la interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor.

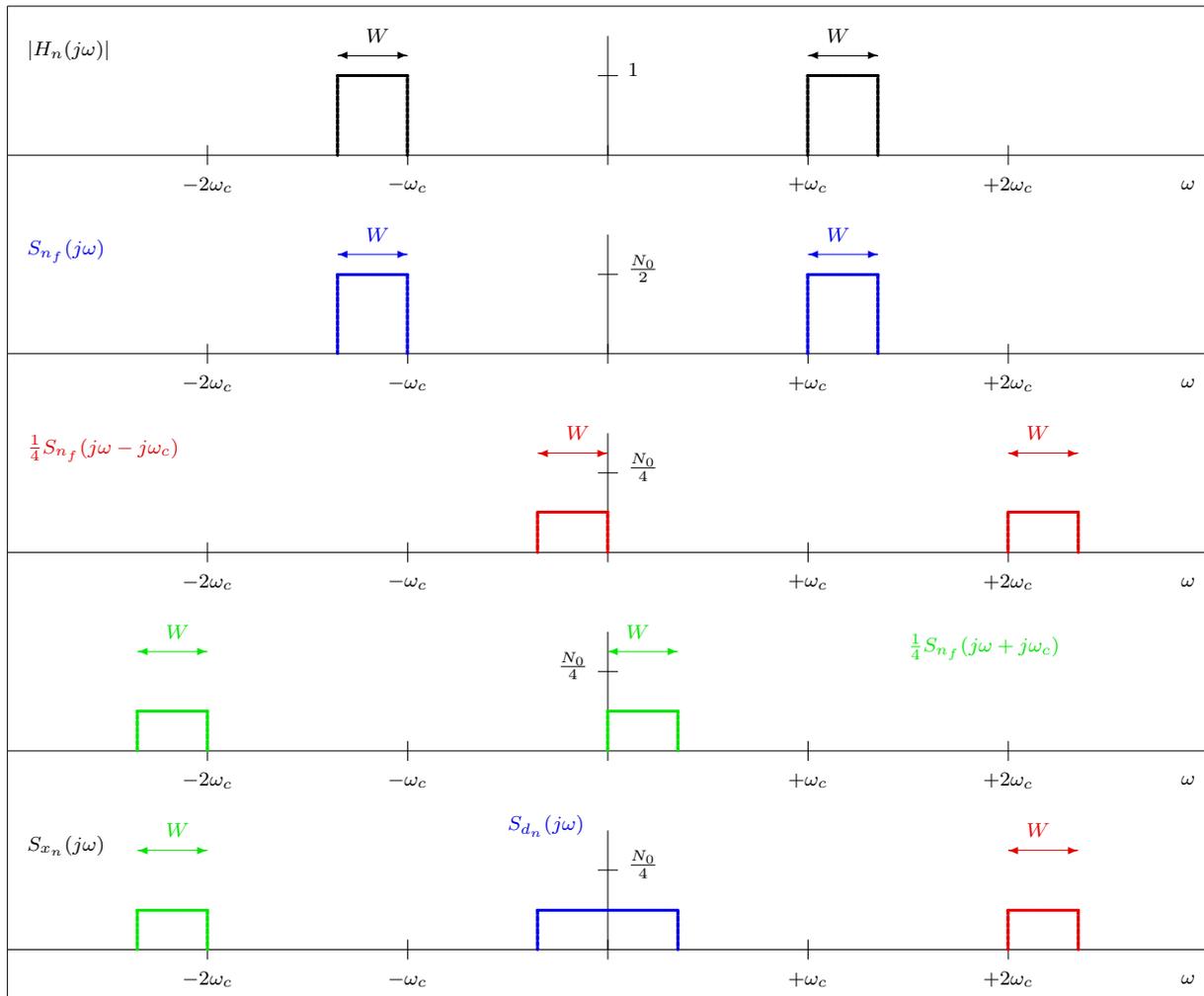


Figura 3.43: Interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor para una modulación de banda lateral única (banda lateral superior).

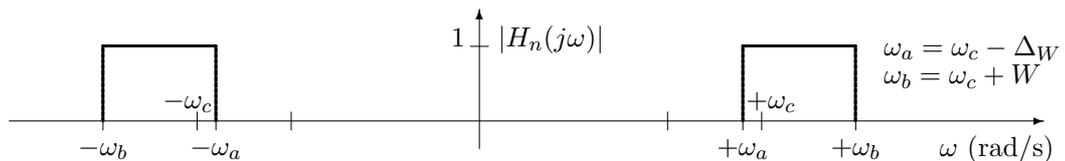


Figura 3.44: Respuesta en frecuencia del filtro de ruido utilizado en una modulación de banda lateral vestigial (banda lateral superior).

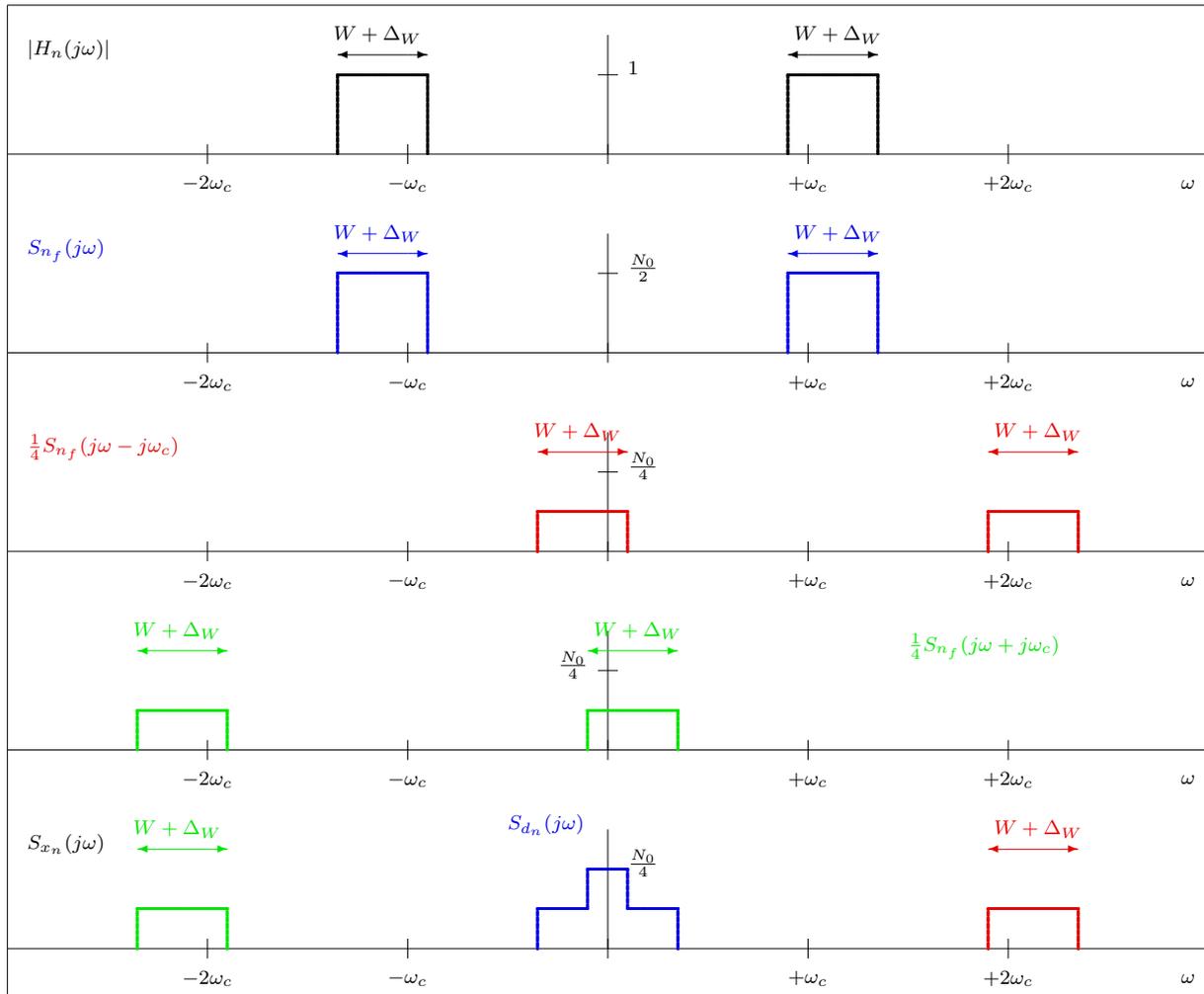


Figura 3.45: Interpretación frecuencial del proceso que sufre el ruido en el receptor para una modulación de banda lateral vestigial (banda lateral superior).

Cálculo de las relaciones señal a ruido

Una vez conocidas la potencia de la señal y del ruido a la salida del demodulador (que se resumen en la Tabla 3.3), sólo falta calcular la relación señal a ruido y compararla con la obtenida en una transmisión en banda base.

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

Tabla 3.3: Potencias de señal y de ruido a la salida del demodulador para las modulaciones de amplitud.

Modulación de doble banda lateral (DBL) La relación señal a ruido para este tipo de modulación es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBL} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b.$$

Se puede ver que para una modulación DBL se tiene exactamente la misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base.

Modulación de banda lateral única (BLU) La relación señal a ruido para una modulación BLU es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLU} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 B} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

De nuevo, la misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base.

Modulación AM convencional La relación señal a ruido para una modulación AM convencional es

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{AM} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}}{N_0 B} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} \frac{\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}}}_{\eta_{AM}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{AM} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

En este caso se tiene peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base. Esto es debido a la transmisión de la portadora, que no contiene información, y que hace que este tipo de modulación sea poco eficiente en potencia. El factor de eficiencia $\eta_{AM} < 1$ es en este caso

$$\eta_{AM} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} = \frac{\frac{a^2}{C_M^2} P_M}{1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M} = \frac{P_M}{\frac{C_M^2}{a^2} + P_M}.$$

Como se puede ver, la eficiencia depende del índice de modulación a , habiendo peor eficiencia para valores bajos de a .

Modulación de banda lateral vestigial (BLV) La relación señal a ruido para una modulación BLV es

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{BLV} &= \frac{P_{dS}}{P_{dn}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{B}{B + \Delta_B} \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{B}{B + \Delta_B}}_{\eta_{BLV}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{BLV} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

En este caso la relación es también peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base. El factor de eficiencia $\eta_{BLV} < 1$ es ahora

$$\eta_{BLV} = \frac{B}{B + \Delta_B}.$$

La eficiencia depende por tanto del exceso de ancho de banda Δ_B vestigial. Si el vestigio es pequeño en relación al ancho de banda, $\Delta_B \ll B$, en ese caso $\eta_{BLV} \approx 1$, i.e., la relación señal a ruido es prácticamente igual que en banda base.

3.4.3. Efecto del ruido en modulaciones angulares

El análisis es relativamente complicado debido a la no linealidad presente al estar la dependencia de la señal modulada con respecto a la señal moduladora en el argumento de una senoide.

En general, por resumir las principales características sin entrar en un desarrollo analítico riguroso, la señal demodulada se puede escribir como

$$d(t) = \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}.$$

El término de ruido, $Y_n(t)$, es de tal naturaleza que lleva a obtener las siguientes expresiones para la densidad espectral del ruido a la salida del demodulador

$$S_{n_d}(j\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{N_0}{A_c^2} \omega^2, & \text{FM} \end{cases}.$$

Esto implica que la potencia de ruido a la salida del demodulador es

$$\begin{aligned} P_{n_d} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_d}(j\omega) d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{A_c^2} d\omega, & \text{PM} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{A_c^2} \omega^2 d\omega, & \text{FM} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2N_0 B}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{2N_0 B^3}{3A_c^2} \omega^2, & \text{FM} \end{cases}. \end{aligned}$$

Y la relación señal a ruido,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{P_R}{P_{n_d}} = \frac{P_S}{P_{n_d}},$$

es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2 P_M}{2 N_0 B}, & \text{PM} \\ \frac{3k_f^2 A_c^2 P_M}{2B^2 N_0 B}, & \text{FM} \end{cases}.$$

Si se denota la potencia recibida como $P_R = \frac{A^2}{2}$ y se consideran los índices de modulación

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 B}, & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 B}, & \text{FM} \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 B},$$

la relación señal a ruido se puede escribir en función de la relación señal a ruido transmitiendo en banda base.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} P_M \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3P_M \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}.$$

Se puede observar que en las modulaciones angulares se tiene una ganancia en relación señal a ruido proporcional al índice de modulación al cuadrado.

Efecto umbral en modulaciones angulares

Este efecto de ganancia sólo se produce en la práctica si la relación señal a ruido banda base es mayor que un umbral que viene dado por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{umbral}} = 20 \cdot (\beta + 1).$$

Esto implica en la práctica que hay un nivel umbral de potencia recibida a partir del que se obtiene esa ganancia en relación señal a ruido

$$P_{R_{\text{umbral}}} = (N_0 B) \times \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{umbral}} \rightarrow A_{c,\text{umbral}} = \sqrt{2P_{R_{\text{umbral}}}}.$$