Universidad Carlos III de Madrid

OPEN COURSEWARE CONSORTIUM

Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 2

RUIDO EN LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES

Marcelino Lázaro

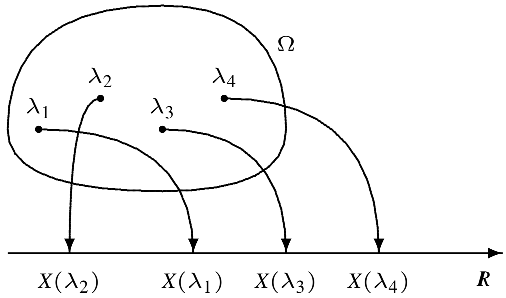
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

Variable aleatoria (Real)

Función que asigna un valor numérico (real) a la salida de un experimento aleatorio

$$\Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$$
$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda) \in \boldsymbol{R}$$

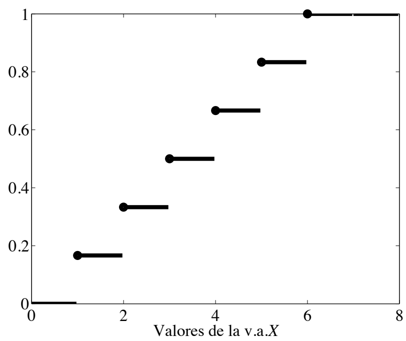


- Rango de X: $\text{Rango}_X = \{x \in \boldsymbol{R} : \exists\, \lambda \in \Omega,\ X(\lambda) = x\}$
  - V.a. discreta: rango formado por conjunto discreto de valores
  - V.a. continua: rango continuo de valores
- Descripción (probabilística):
  - Función de distribución: $F_X(x)$
  - Función densidad de probabilidad: $f_x(x)$

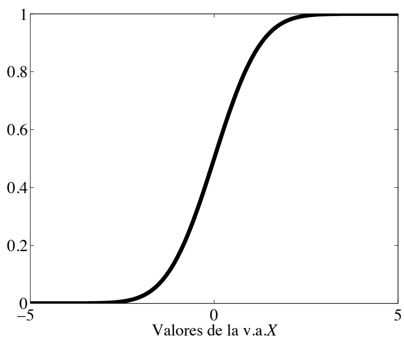
Función de distribución

- Definición
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Interpretación frecuencial (probabilística)
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $X \leq x$

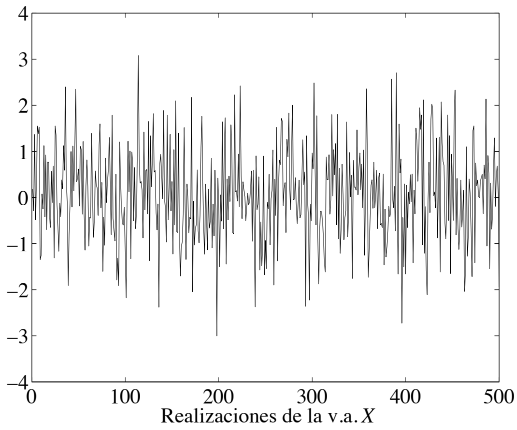


(a) Discreta

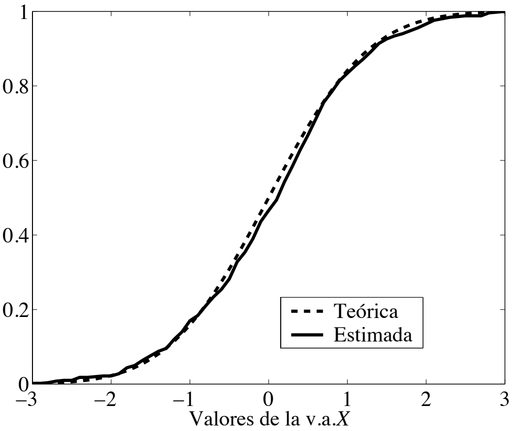


(b) Continua

Estima de la función de distribución



(a) Realizaciones



(b) Estima de $F_X(x)$

Propiedades de la función de distribución

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ($F_X(x)$ es no decreciente)
3. $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$ $\left(\lim_{x\rightarrow-\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x\rightarrow\infty} F_X(x) = 1\right)$
4. $F_X(x^+) = F_X(x)$ ($F_X(x)$ es continua por la derecha)
5. $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a^-) \\ P(a < X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a) \\ P(a \leq X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a^-) \end{aligned}$$

6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$
7. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Función densidad de probabilidad

- Definición

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

  - V.a. discreta: puntos de masa $p_i = P(X = x_i)$
  - Notación v.a. discreta: $p_X(x_i) = p_i$

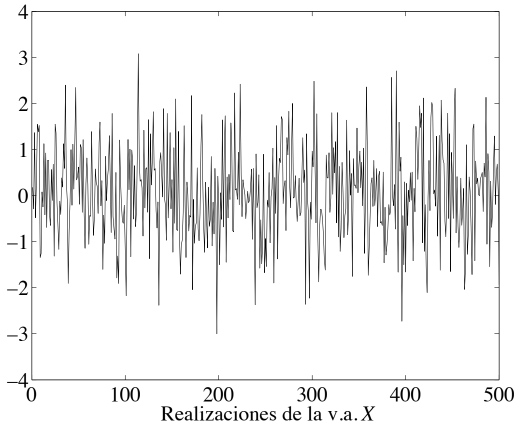
- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta_x)}{\Delta_x}$$

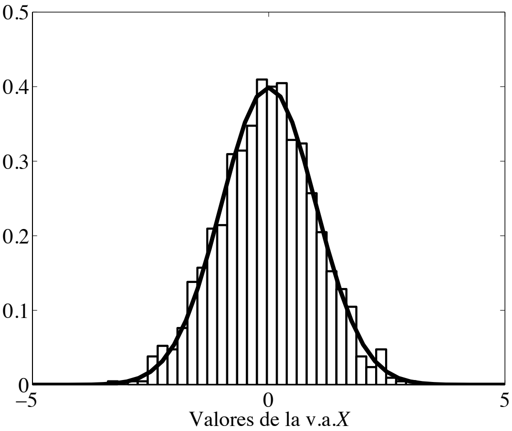
$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta_x} \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n} \right\}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $x \leq X \leq x + \Delta_x$

Estima de la f.d.p.



(a) Realizaciones



(b) Estima de $f_X(x)$

Propiedades de $f_X(x)$

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$
3. $\displaystyle\int_{a^+}^{b^+} f_X(x) \cdot dx = P(a < X \leq b)$
4. En general, $P(X \in A) = \displaystyle\int_A f_X(x) \cdot dx$
5. $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x^+} f_X(u) \cdot du$

Variable aleatoria de Bernoulli

- Variable aleatoria discreta con Rango$_X = \{0, 1\}$
- Parámetro: $p = P(X = 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplos de aplicación en comunicaciones
  - Generador de datos binario
  - Modelo de errores

Variable aleatoria Binomial

- Número de 1's en n experimentos de Bernoulli (indep.)
- Parámetros: n, p.
- Rango$_X = \{0, 1, \cdots, n\}$

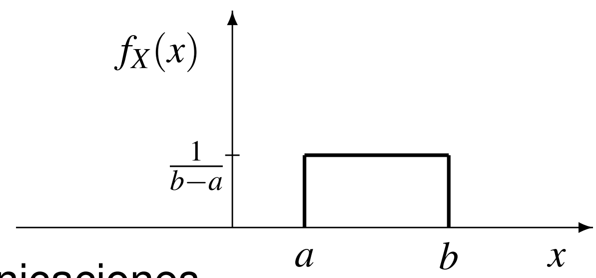
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n \text{ y } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Número total de bits recibidos con error

Variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria continua de parámetros a y b
  - Notación: $\mathcal{U}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

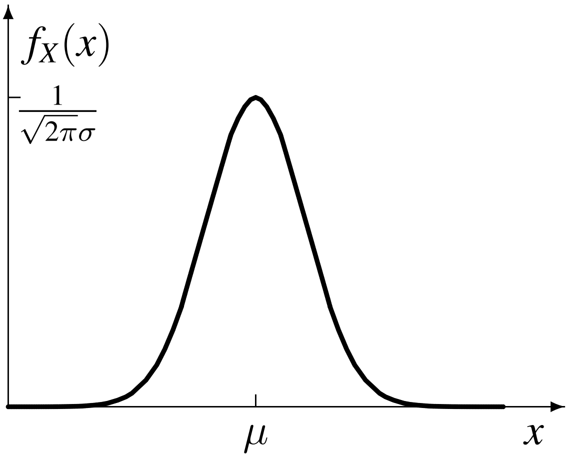


- Ejemplo aplicación en comunicaciones
  - Fase aleatoria en una sinusoide: v.a. uniforme entre 0 y 2π

Variable aleatoria gausiana (normal)

- Parámetros: media (μ), y varianza (σ^2)
  - Notación: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

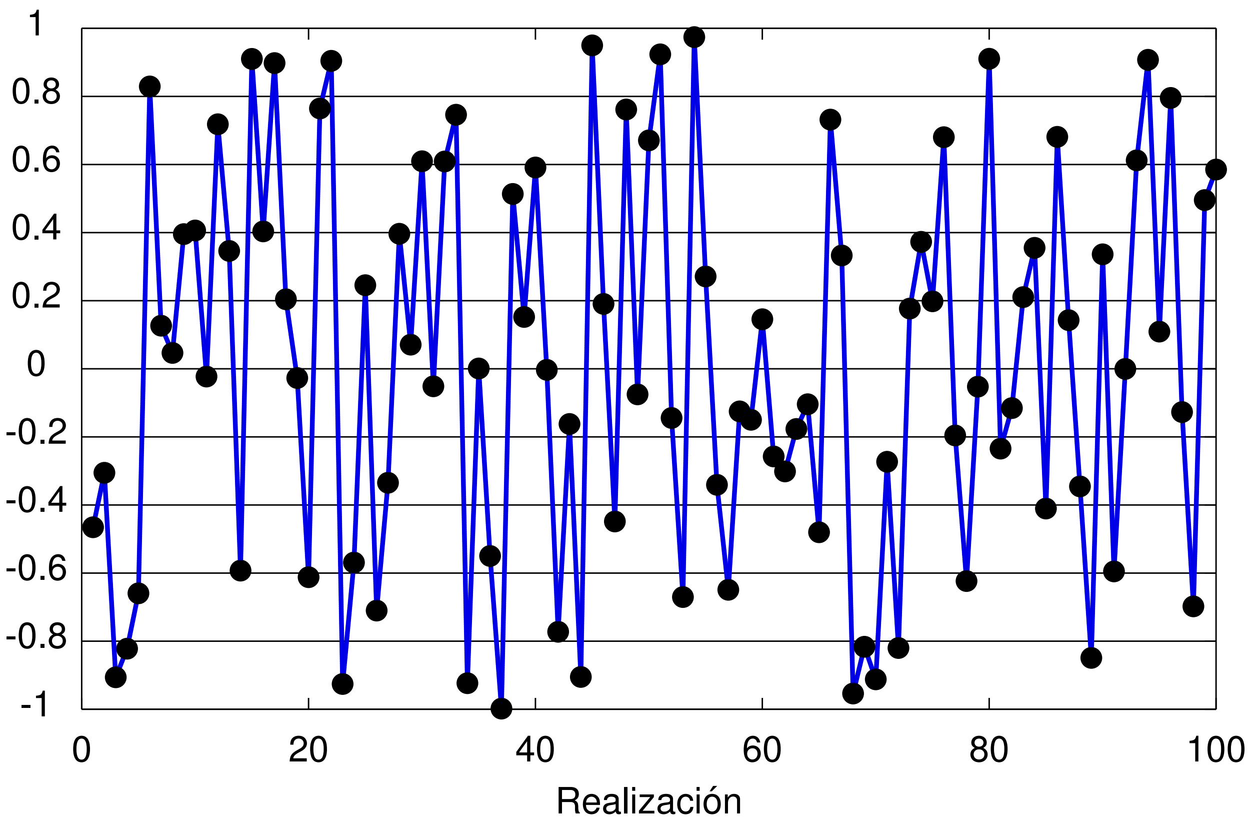


- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Modelado del ruido térmico

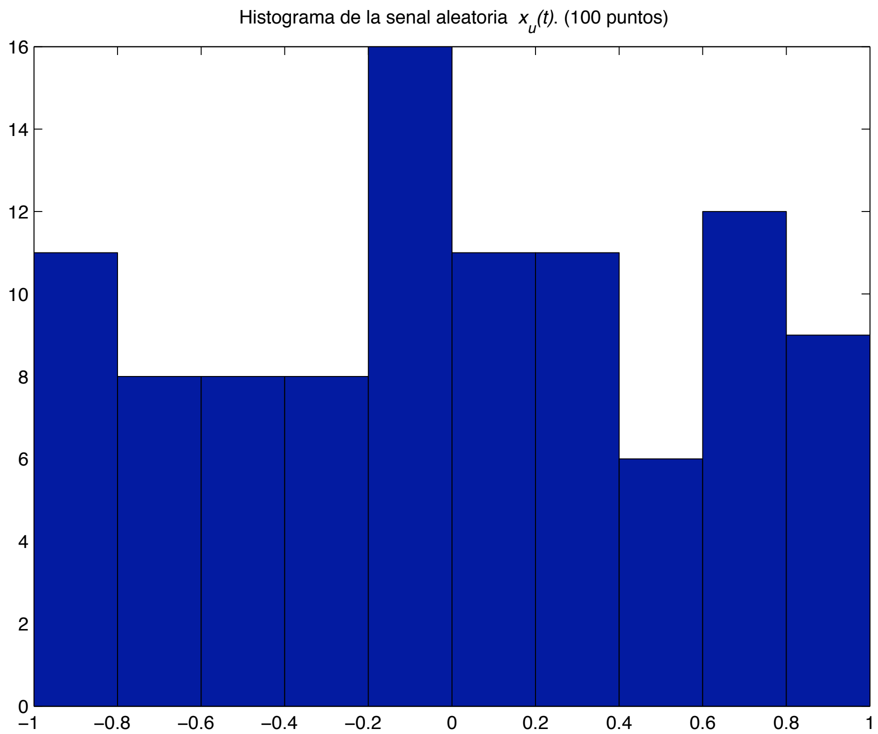
Interpretación de la función densidad de probabilidad

- La f.d.p. indica cómo se distribuyen los valores que toma una variable aleatoria
- Rangos donde $f_X(x)$ toma valores elevados indican una probabilida alta de que la variable aleatoria tome valores en ese rango
  - Por esta razón esta función puede utilizarse para el cálculo de probabilidades sobre los posibles valores de una variable aleatoria
- Una f.d.p. se puede interpretar como un histograma llevado al límite
- A continuación se muestran varios ejemplos
  - Variable aleatoria uniforme
  - Variable aleatoria gausiana

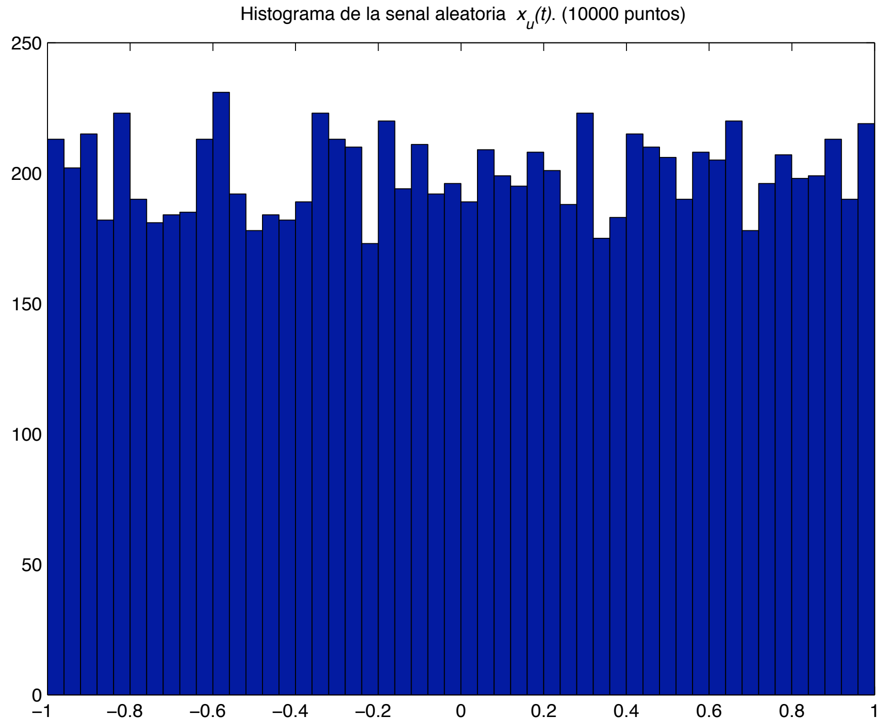
Realizaciones de una variable aleatoria uniforme



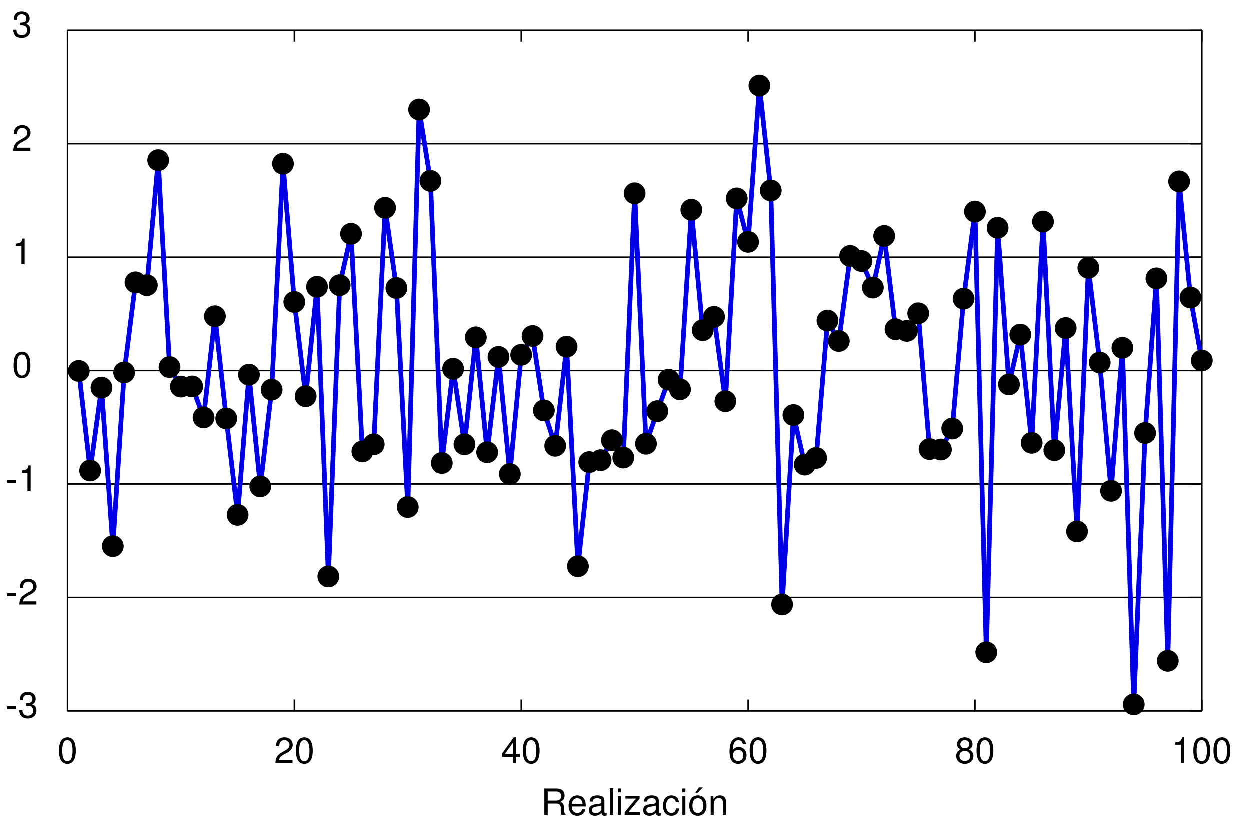
Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria uniforme



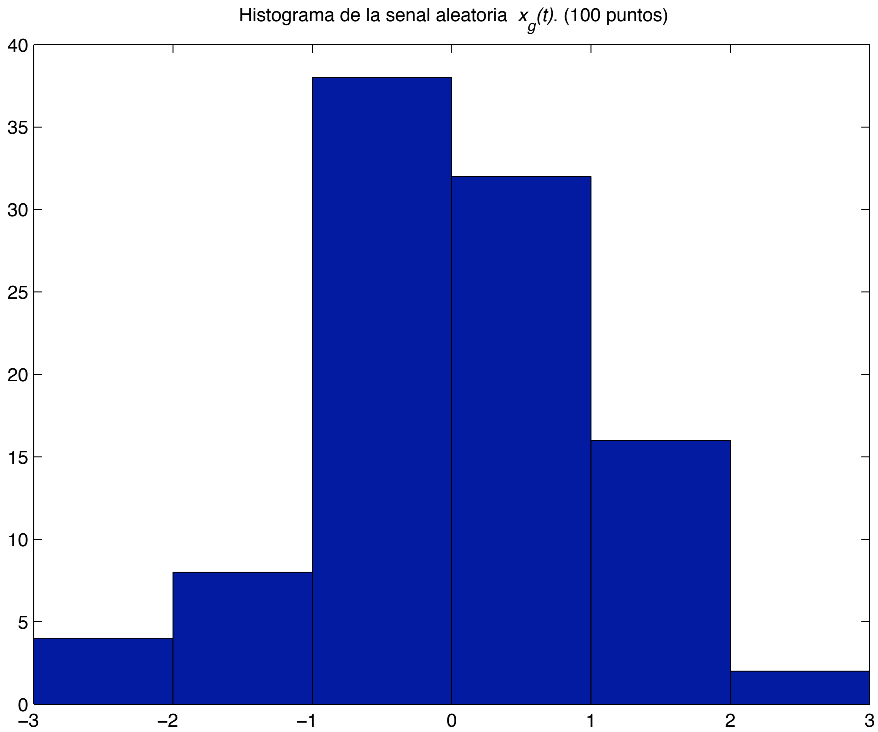
Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria uniforme



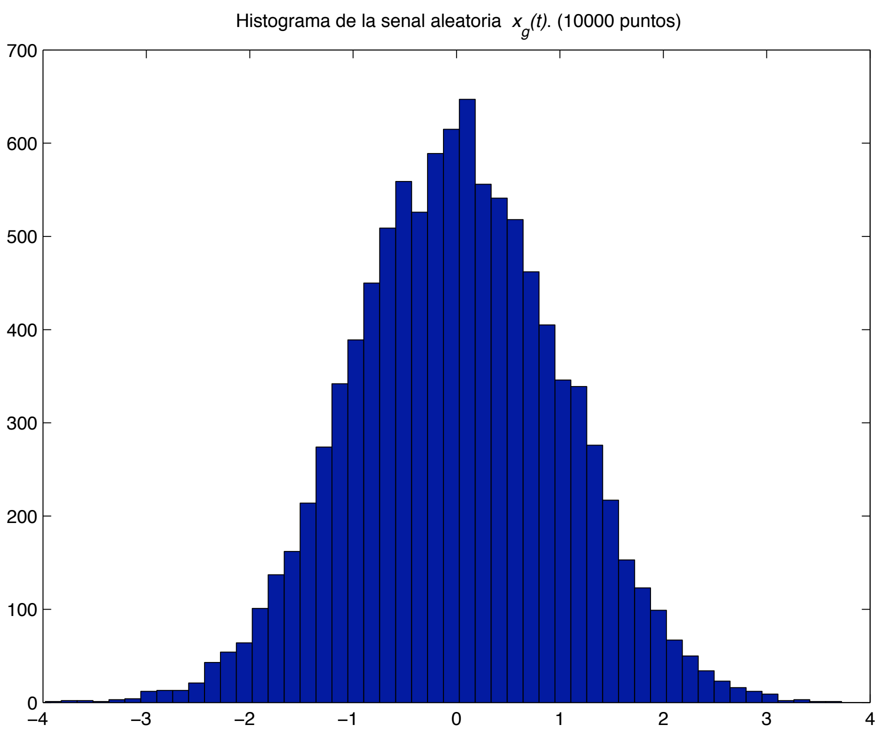
Realizaciones de una variable aleatoria gausiana



Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria gausiana



Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria gausiana



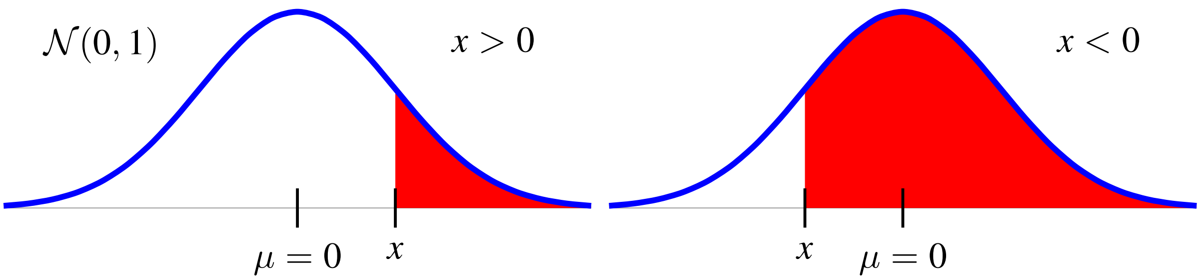
Función $Q(x)$

- Función tabulada calculada numéricamente relacionada con la integral de una distribución gausiana
- Definición: probabilidad de que una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza unidad tome valores mayores que su argumento

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow f_X(x) = \mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow Q(x) = P(X > x)$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_X(z)\, dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

- Interpretación gráfica
  - Sólo se tabula para $x \geq 0$
  - Para $x < 0$, dada la simetría de $f_X(x)$: $Q(-x) = 1 - Q(x)$



Función $Q(x)$ - Propiedades

- Relación con la función de distribución de una v.a. gausiana (con $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

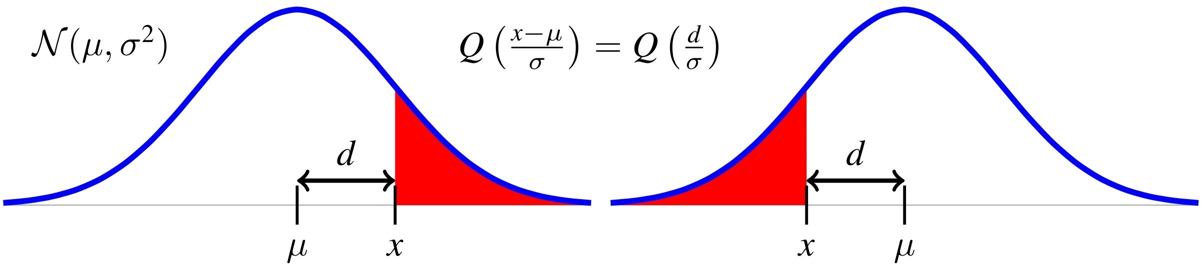
- Función $Q(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ para $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
- Algunas propiedades de la función $Q(x)$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$
  - $Q(0) = \frac{1}{2}$
  - $Q(\infty) = 0$

Integrales sobre distribuciones gausianas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

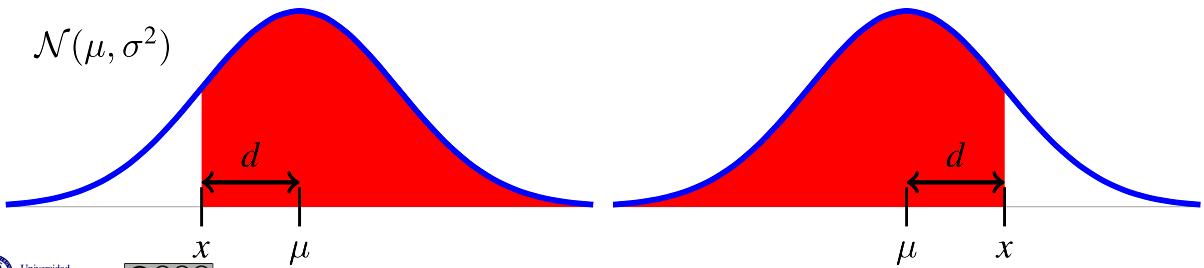
- Si la distribución gausiana tiene media μ y varianza σ^2

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Interpretación gráfica (considerando definición y simetría)

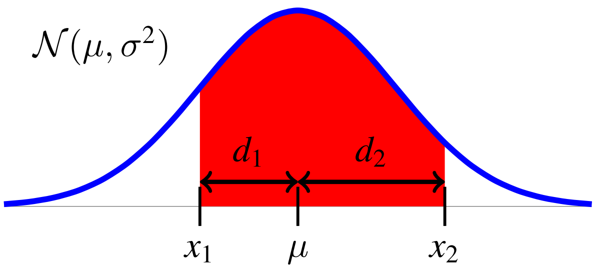


$$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(-\frac{d}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

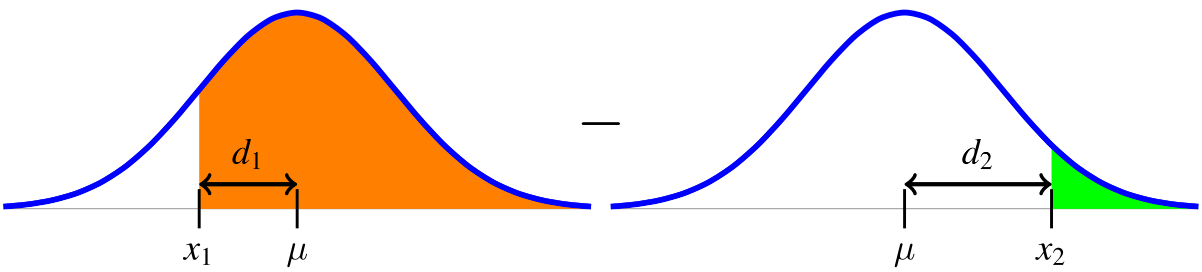


Integrales sobre $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en intervalos

- En general se pueden escribir como sumas o diferencias de diferentes términos involucrando integrales desde un punto a $\pm\infty$, que ya hemos visto como se obtienen utilizando la función $Q(x)$
- Un ejemplo ilustrativo



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) - \int_{x_2}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \left[1 - Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)\right] - \left[Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)\right]$$



Funciones de una variable aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ de una v. a. es una variable aleatoria.
- Función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(x \in B_X^g(y)), \; B_X^g(y) = \{x \in \boldsymbol{R} : g(x) \leq y\}$$

- Función densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

  - $\{x_i\}$: raíces de la ecuación $y = g(x)$
  - $g'(x)$: derivada de la función $g(x)$
  - Condiciones: número finito de raíces, N_r y $g(x_i) \neq 0 \; \forall x_i$

Momentos estadísticos

- Valor esperado (media, o esperanza matemática)

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$$

- Valor esperado de una función de X ($g(X)$)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx$$

- Momento de orden n

$$m_X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) \, dx$$

- Varianza

$$\sigma_X^2 = E\left[(x - m_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f_X(x) \, dx$$

NOTA: $\sigma_X^2 = E\left[(x - m_X)^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (m_X)^2$

Propiedades de los momentos

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = m_X + m_Y$ (Operador lineal)
- $E[c] = c$ (para cualquier constante c)
- $E[c \cdot X] = c \cdot E[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$
- $\text{Var}(c) = 0$
- $\text{Var}(c \cdot X) = c^2 \cdot \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$

Variables aleatorias multidimensionales

- Se puede trabajar de forma conjunta con dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral Ω
- Modelado probabilístico conjunto
  - Función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

  - Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Propiedades de $F_{X,Y}(x,y)$ y $f_{X,Y}(x,y)$

- $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$
- $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = 1$
- $P((X,Y)\in A) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy$
- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\ du\ dv$

Función densidad de probabilidad condicionada

- Conocimiento del valor de una variable modifica las probabilidades de la otra

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Definición de independencia estadística:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

  - Implicación: para variables aleatorias independientes

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

Momentos estadísticos

- Valor esperado de una función $g(X,Y)$

$$E[g(X,Y)] = \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

- Casos particulares
  - Correlación: $g(X,Y) = X\cdot Y$
  - Covarianza: $g(X,Y) = (X-m_X)\cdot(Y-m_Y)$
- Implicación de independencia: si $g(X,Y) = g_1(X)\cdot g_2(Y)$

$$E\left[g_1(X)\cdot g_2(Y)\right] = E\left[g_1(X)\right]\cdot E\left[g_2(Y)\right]$$

NOTA: Sólo bajo independencia !!!!

Incorrelación

- Coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y},\quad 0\le|\rho_{X,Y}|\le 1$$

  - Si $\rho_{X,Y}=0$: v.a.'s **incorreladas**
    - ★ Independencia implica incorrelación
    - ★ Incorrelación no implica independencia
  - Si $\rho_{X,Y}=\pm1$: $Y = aX+b$
    $\rho_{X,Y}=+1\rightarrow a>0;\quad \rho_{X,Y}=-1\rightarrow a<0$
- Incorrelación sólo implica independencia para variables aleatorias conjuntamente gausianas
  NOTA: Salvo este caso, en general, incorrelación no implica independencia !!!

Funciones de variables aleatorias

- Funciones de variables aleatorias: $Z = g(X,Y)$, $W = h(X,Y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{array} \right.$$

- Función de distribución conjunta, $F_{Z,W}(z,w)$

$$F_{Z,W}(z,w) = P(Z \le z, W \le w) = P\left((x,y) \in B_{X,Y}^{g,h}(z,w)\right)$$

$$B_{X,Y}^{g,h}(z,w) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : g(x,y) \le z, h(x,y) \le w\}$$

- Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{Z,W}(z,w) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i,y_i)}{|\det \boldsymbol{J}(x_i,y_i)|}, \quad \boldsymbol{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

  - $\{x_i, y_i\}$: raíces del sistema de ecuaciones $z = g(x,y)$, $w = h(x,y)$
  - Número finito de raíces y determinante no nulo para todas ellas

Variables aleatorias conjuntamente gausianas

- Dos variables, X, Y: caracterizadas por una f.d.p. conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} - \frac{\rho(x-\mu_x)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

- Para n variables aleatorias $\mathbf{X} = X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C})}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}$$

  - Vector de medias: $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n]^T$
  - Matriz de covarianzas: $\boldsymbol{C}$, dada por

$$C_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Propiedades de v.a.'s conjuntamente gausianas

- Completamente caracterizadas por $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{C}$ (estadísticos de 2º orden)
- Si n variables aleatorias son conjuntamente gausianas, cualquier subconjunto también está distribuido de forma conjuntamente gausiana. En particular, todas las variables individuales son gausianas
- Cualquier subconjunto de v.a. conjuntamente gausianas, condicionadas a otro subconjunto de las mismas v.a. conjuntamente gausianas originales, tiene una distribución conjuntamente gausiana
- Cualquier conjunto de combinaciones lineales de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ es conjuntamente gausiano. En particular, individualmente cualquier combinación lineal Y_i es gausiana
- Dos variables incorreladas son independientes
- Si las variables están incorreladas, $\rho_{i,j} = 0\ \forall i \neq j$, $\boldsymbol{C}$ es una matriz diagonal

Suma de variables aleatorias

- **Ley de los grandes números (débil)**: Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ están *incorreladas* y todas tienen la misma media m_X y varianza $\sigma_X^2 < \infty$, independientemente de su distribución, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\text{si } Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \lim_{n\to\infty} P(|Y - m_X| > \varepsilon) = 0$$

- **Teorema del límite central**: Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ son *independientes* con medias $m_1, m_2, \cdots, m_n$, y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2$, entonces la distribución de

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m_i}{\sigma_i}$$

converge a una distribución gausiana de media 0 y varianza 1

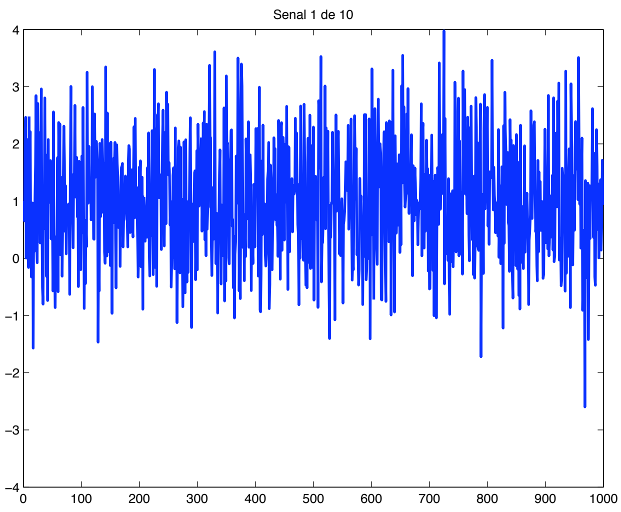
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \equiv \mathcal{N}(0, 1)$$

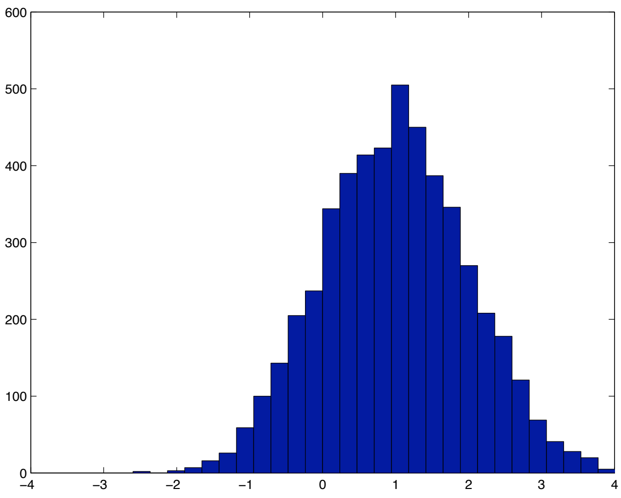
Suma de variables aleatorias (II)

- Caso particular: variables *independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)*, es decir, que todas tengan la misma distribución con la misma media m y la misma varianza σ^2; el promedio
$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
converge a una distribución $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Esto es así aunque la distribución original no sea gausiana.
- Recordatorio: condiciones a satisfacer
  - Ley de los grandes números (débil): incorrelación
  - Teorema del límite central: independencia

Realizaciones 1 variable aleatoria gausiana

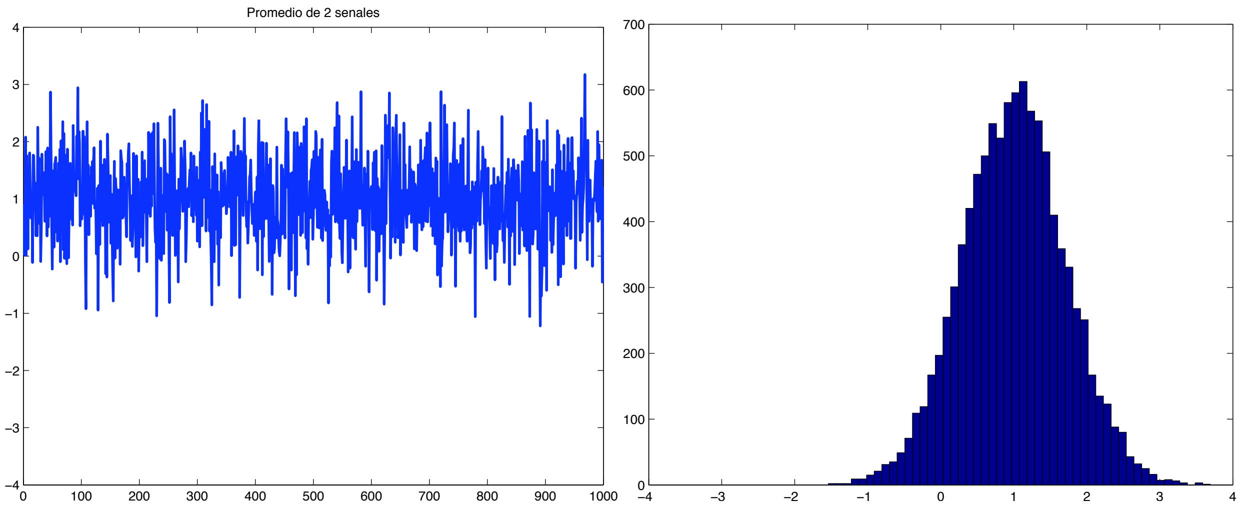
- Variable aleatoria gausiana: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$





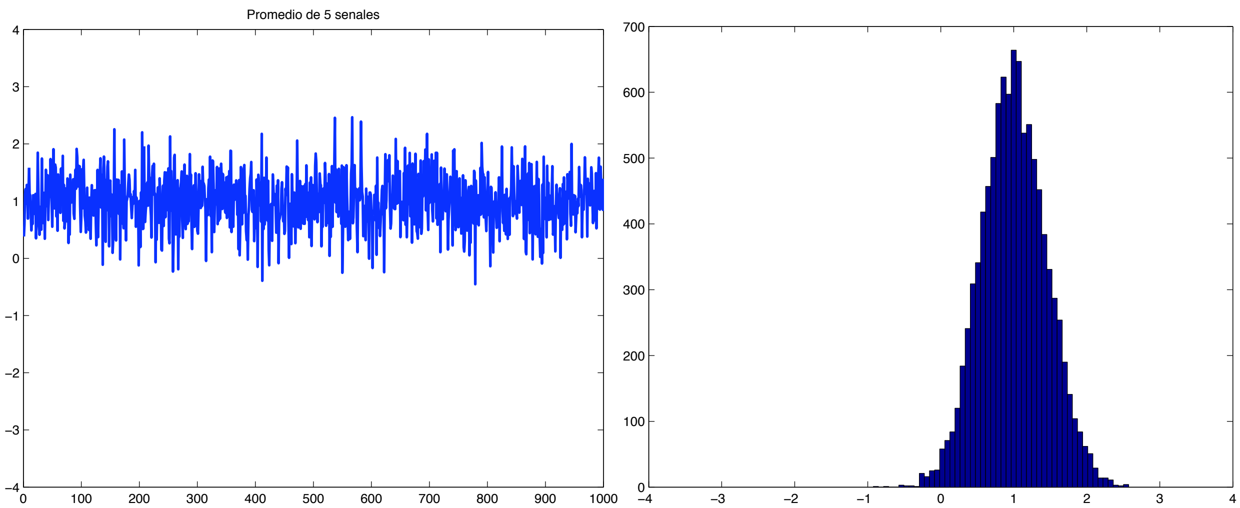
Promedio de 2 variables aleatorias gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



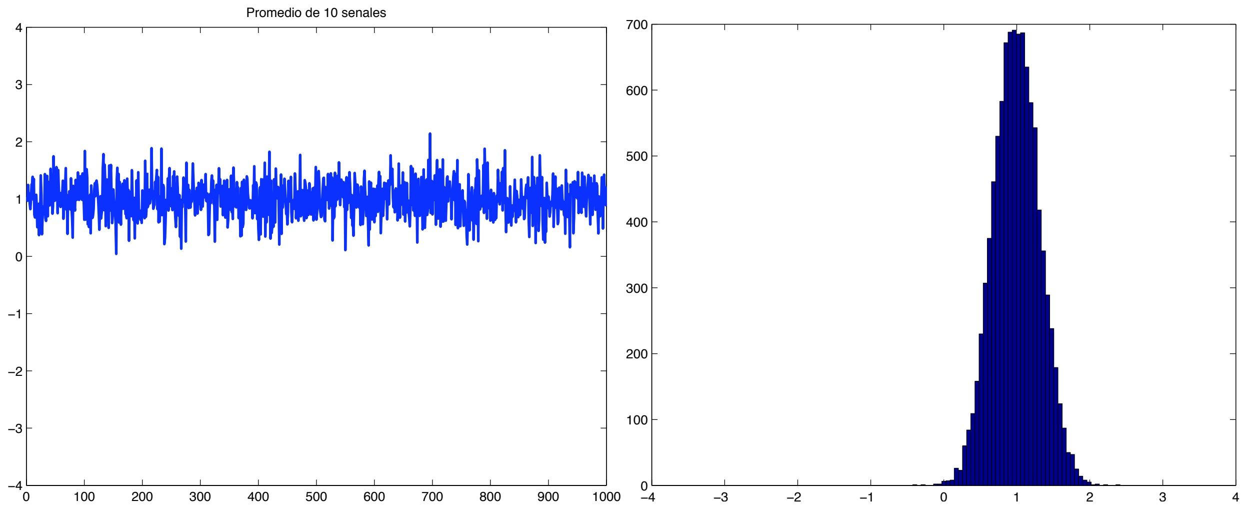
Promedio de 5 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



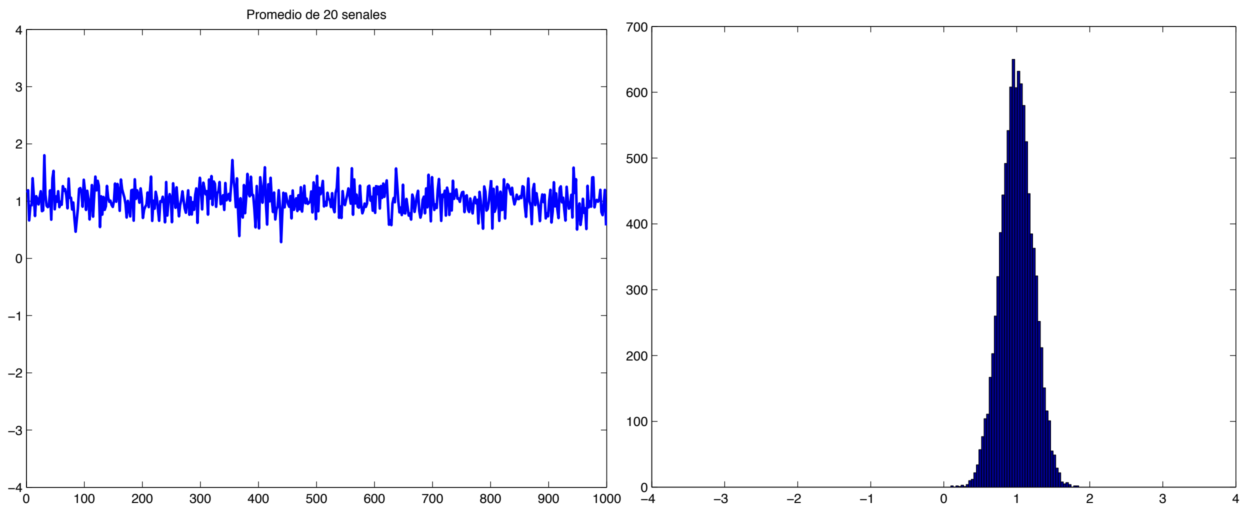
Promedio de 10 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



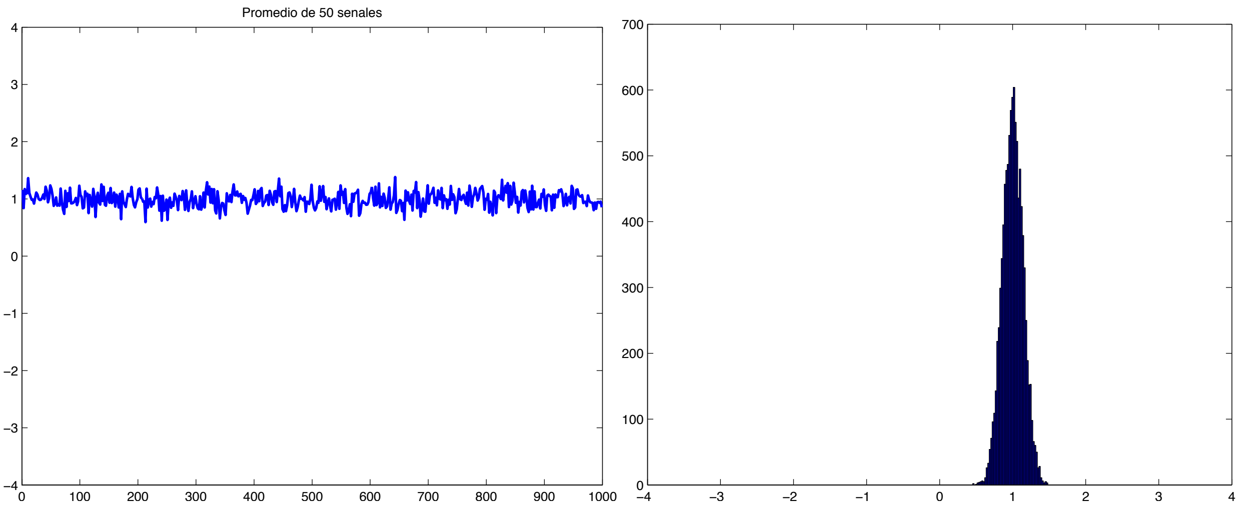
Promedio de 20 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



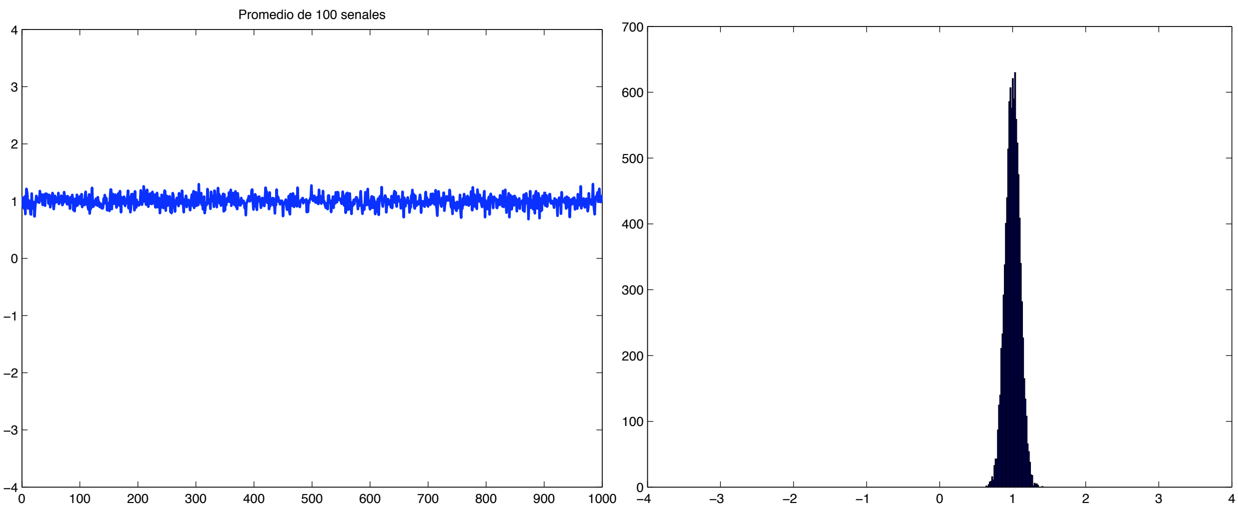
Promedio de 50 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



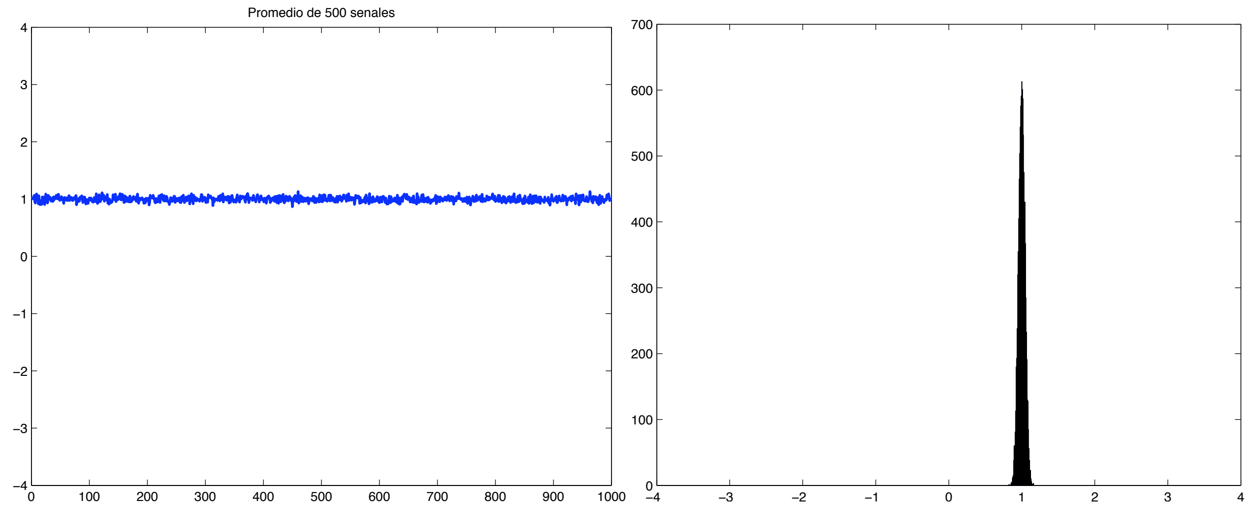
Promedio de 100 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



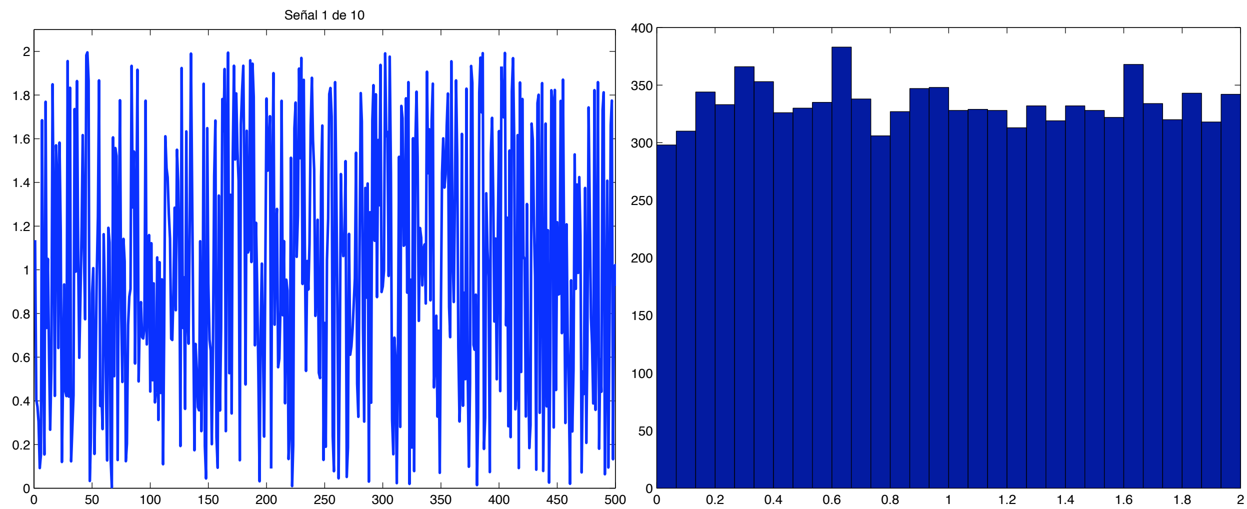
Promedio de 500 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



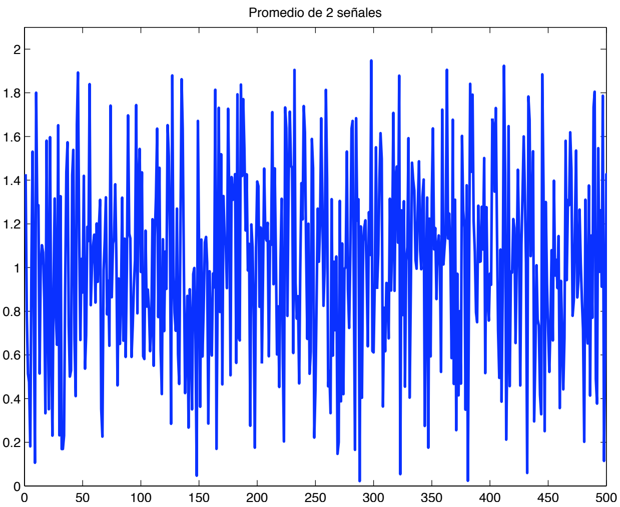
Realizaciones de 1 variable aleatoria uniforme

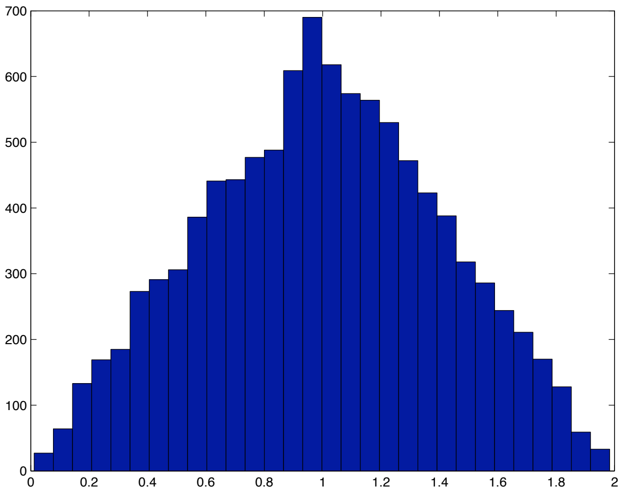
- Variable aleatoria uniforme entre 0 y 2



Promedio de 2 variables aleatorias uniformes (realizaciones)

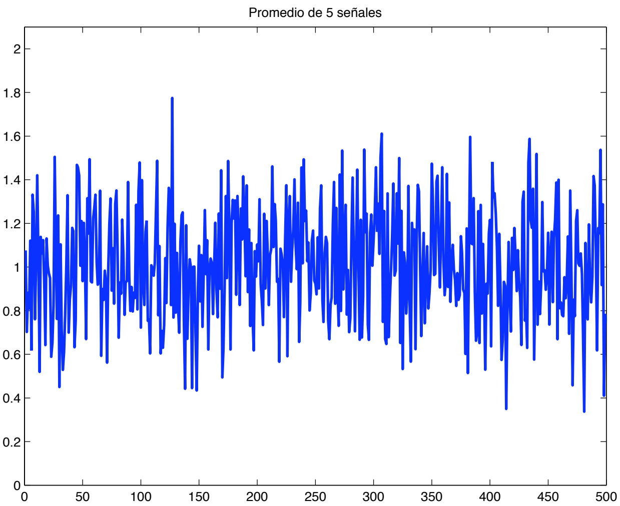
- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.

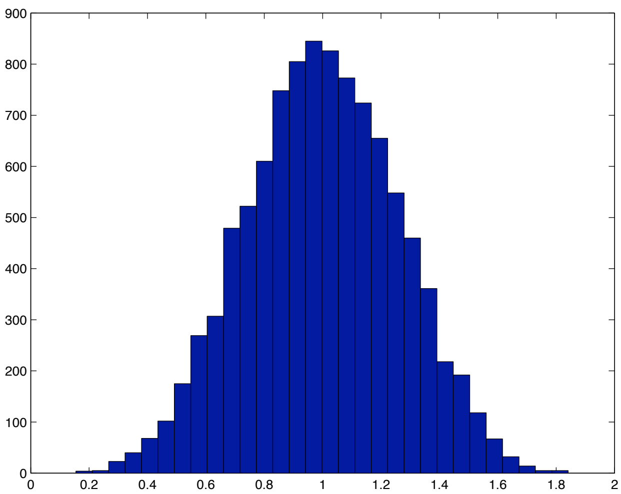




Promedio de 5 v. a. uniformes (realizaciones)

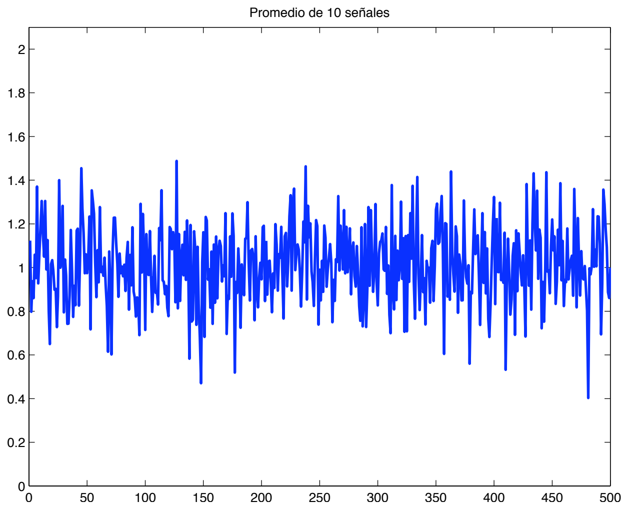
- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.

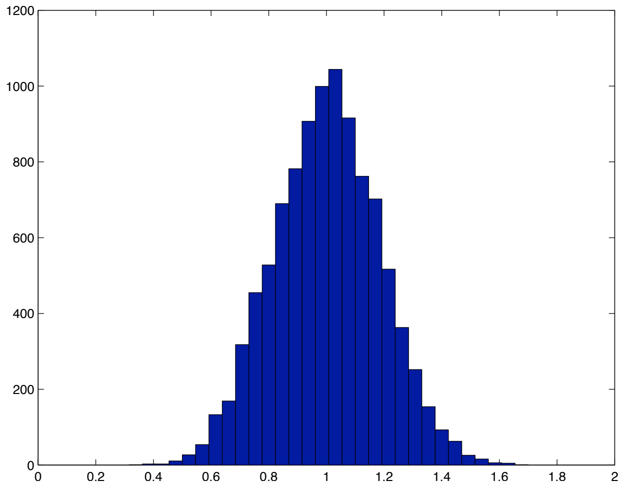




Promedio de 10 v. a. uniformes (realizaciones)

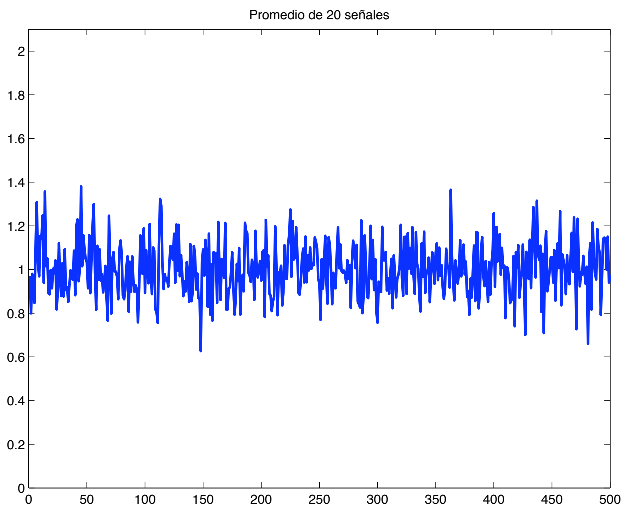
- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.

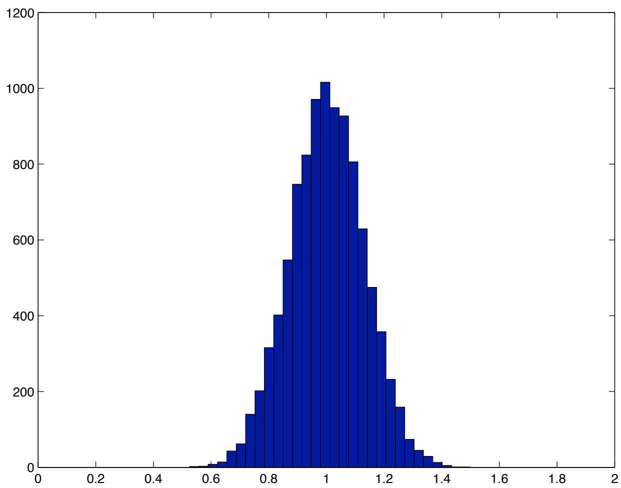




Promedio de 20 v. a. uniformes (realizaciones)

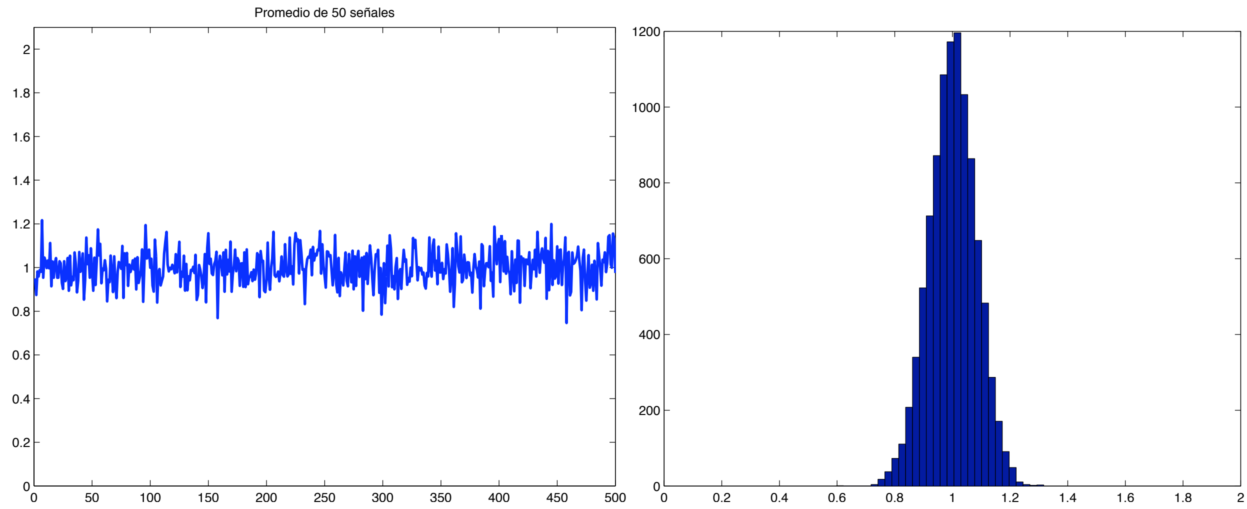
- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.





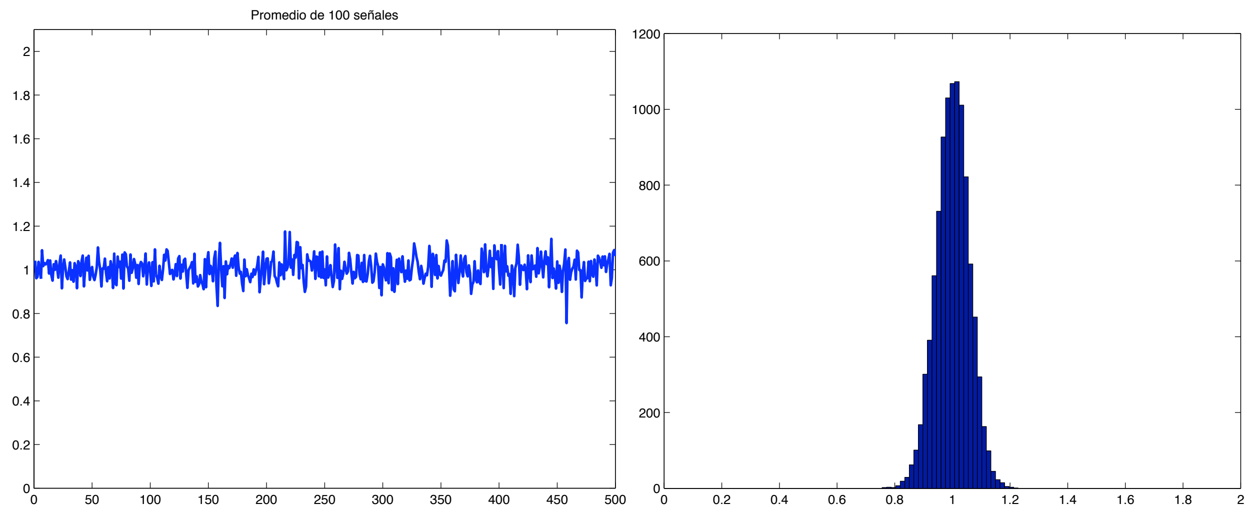
Promedio de 50 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Promedio de 100 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Procesos aleatorios

- Extensión de v.a. incluyendo dependencia temporal
  - Variable aleatoria
$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda)$$
  - Proceso aleatorio
$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(t, \lambda)$$
- Particularizaciones
  - $X(t_i, \lambda_j)$: realización individual
  - $X(t, \lambda_i)$: señal temporal asociada a λ_i, $x_i(t)$
  - $X(t_i, \lambda)$: variable aleatoria ($X(\lambda)$)
- Notación: $X(t)$ o $X[n]$
- Interpretación: Conjunto indexado de variables aleatorias
  - Índice continuo ($t \in \boldsymbol{R}$): Proceso aleatorio continuo
  - Índice discreto ($n \in \mathbb{Z}$): Proceso aleatorio discreto

Descripción de un proceso aleatorio

- Descripción analítica
$$X(t) = f(t, \boldsymbol{\theta})$$
$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$: vector de variables aleatorias
  - Ecuación $f(t, \boldsymbol{\theta})$ y descripción estadística de $\boldsymbol{\theta}$
- Descripción estadística
  - Completa: $\forall\ (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $\forall\ n$
$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
  - De orden M: $\forall\ n \leq M$, $\forall\ (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$
$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Esperanzas de los procesos (promedios estadísticos)

- Media de un proceso

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X(t)}(x)dx$$

- Función de autocorrelación de un proceso

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

Estacionariedad y cicloestacionariedad

- Estacionariedad en sentido estricto: $\forall\ (t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $\forall n$, $\forall \Delta$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta),\cdots,X(t_n+\Delta)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

  - Estacionariedad de orden M: para $n \leq M$

- Estacionariedad en sentido amplio
  1. $m_X(t) = m_X$ (no depende de t)
  2. $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ (definiendo $\tau = t_1 - t_2$)
     También se suele denotar $R_X(t + \tau, t) = R_X(\tau)$

- Cicloestacionariedad
  1. $m_X(t + T_o) = m_X(t)$
  2. $R_X(t + \tau + T_o, t + T_o) = R_X(t + \tau, t)$, para todo t y τ

Autocorrelación de procesos estacionarios

La función de autocorrelación de un proceso estacionario $X(t)$, $R_X(\tau)$, tiene las siguientes propiedades:

- Es una función par
$$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$
- El máximo en módulo se obtiene en $\tau = 0$
$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$
- Si para algún T_o se cumple $R_X(T_o) = R_X(0)$, entonces para todo entero k
$$R_X(kT_o) = R_X(0)$$
- Es una función semidefinida positiva (se verá más tarde)

Ergodicidad

- Promedios para un proceso $X(t)$ y una función $g(x)$:
  1. Promedio estadístico
$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X(t)}(x) \cdot dx$$
     Este valor es, en general, dependiente de t.
  2. Promedio temporal de $x(t, \omega_i)$
$$< g(x) >_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt$$
     Independiente de t, pero en general dependiente de ω_i
- $X(t)$ estacionario es ergódico, si $\forall\ g(x)$ y $\forall\ \omega_i \in \Omega$
$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt = E[g(X(t))]$$

Potencia y Energía

- Energía del proceso aleatorio $X(t)$, E_X

$$E_X = E[\mathcal{E}_X], \quad \mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt$$

- Potencia del proceso aleatorio $X(t)$, P_X

$$P_X = E[\mathcal{P}_X], \quad \mathcal{P}_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt$$

  - Un proceso aleatorio es de energía si $E_X < \infty$
  - Un proceso aleatorio es de potencia si $0 < P_X < \infty$

Potencia y energía (II)

$$E_X = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)] \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t,t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned} P_X &= E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt\right] \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X^2(t)] \cdot dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t,t) \cdot dt \end{aligned}$$

Para *procesos aleatorios estacionarios* $R_X(t,t) = R_X(0)$

$$P_X = R_X(0), \quad E_X = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(0) \cdot dt$$

Procesos estacionarios de interés: de potencia

Procesos aleatorios multidimensionales (múltiples)

- Independencia: $X(t)$ e $Y(t)$ son *independientes* si $\forall\ t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes
- Incorrelación: $X(t)$ e $Y(t)$ están *incorreladas* si $\forall\ t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ están incorreladas
- Función de correlación cruzada

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)]$$

En general

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{Y,X}(t_2, t_1)$$

- Estacionariedad conjunta: $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente estacionarios* si
  - Ambos son individualmente estacionarios
  - $R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(\tau)$, con $\tau = t_1 - t_2$
    - Notación alternativa: $R_{X,Y}(t + \tau, t) = R_{X,Y}(\tau)$

Procesos aleatorios en el dominio de la frecuencia

- Espectro de una de las señales del proceso aleatorio

$$x_i(t) = X(t, \lambda_i) \rightarrow X_i(j\omega) = \mathcal{TF}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

  - No todas las señales tienen definida una transformada de Fourier
- Definición de señales truncadas de duración T

$$x_i^{[T]}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Las señales truncadas sí tienen definida la transformada

$$X_i^{[T]}(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{x_i^{[T]}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^{[T]}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Densidad espectral de potencia

- Proceso aleatorio truncado de duración T

  $X^{[T]}(t)$: Proceso cuyas señales son $X^{[T]}(t, \lambda_i) = x_i^{[T]}(t)$ (truncadas)

- Proceso aleatorio truncado en el dominio de la frecuencia

  $X^{[T]}(j\omega)$: Proceso cuyas señales son las TF de $x_i^{[T]}(t)$, i.e., $X_i^{[T]}(j\omega)$

- Densidad espectral de potencia de $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2\right]}{T}$$

Representación del comportamiento medio del módulo al cuadrado de la tranformada de Fourier de todas las señales que componen el proceso aleatorio (con el "*truco*" de truncar para asegurar la existencia de dicha transformada de Fourier para todas las señales, y llevando la longitud de truncado al límite)

Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left|\int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau, t)dt\right| < \infty$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\{< R_X(t+\tau, t) >\}$$

siendo el promedio temporal de la función de autocorrelación

$$< R_X(t+\tau, t) > \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau, t)\ dt$$

Teorema de Wiener-Khinchin - Corolarios

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau \cdot R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}[R_X(\tau)]$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t+\tau, t) \cdot dt \right| < \infty$$

entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}[\widetilde{R}_X(\tau)]$$

donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} R_X(t+\tau, t) \cdot dt$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario

Potencia de un proceso aleatorio

- En el dominio de la frecuencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, d\omega$$

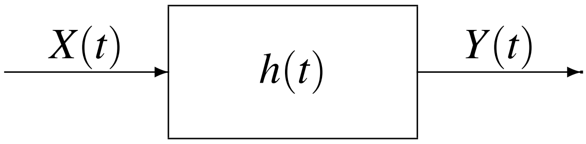
- En el dominio del tiempo
  - Proceso estacionario

$$P_X = R_X(0)$$

  - Proceso cicloestacionario

$$P_X = \tilde{R}_X(0)$$

Procesos aleatorios estacionarios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, de media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa a través de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$. En este caso, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, siendo

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot dt$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Además, se puede comprobar que

$$R_Y(\tau) = R_{X,Y}(\tau) * h(\tau)$$

Media del proceso de salida

Se parte de que

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)] \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &\stackrel{u=t-s}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot du \end{aligned}$$

Correlación cruzada $R_{X,Y}(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{X,Y}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)\cdot Y(t_2)]\\
&= E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\cdot h(t_2-s)\cdot ds\right]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)\cdot X(s)]\cdot h(t_2-s)\cdot ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-s)\cdot h(t_2-s)\cdot ds\\
&\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-t_2-u)\cdot h(-u)\cdot du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u)\cdot h(-u)\cdot du\\
&= R_X(\tau) * h(-\tau)
\end{aligned}
$$

Correlación de salida $R_Y(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]\\
&= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\cdot h(t_1-s)\cdot ds\right)\cdot Y(t_2)\right]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)\cdot Y(t_2)]\cdot h(t_1-s)\cdot ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(s-t_2)\cdot h(t_1-s)\cdot ds\\
&\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u)\cdot h(t_1-t_2-u)\cdot du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u)\cdot h(\tau-u)\cdot du\\
&= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau)\\
&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)
\end{aligned}
$$

Relaciones en el dominio frecuencial

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot H(0)$$

- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2$$

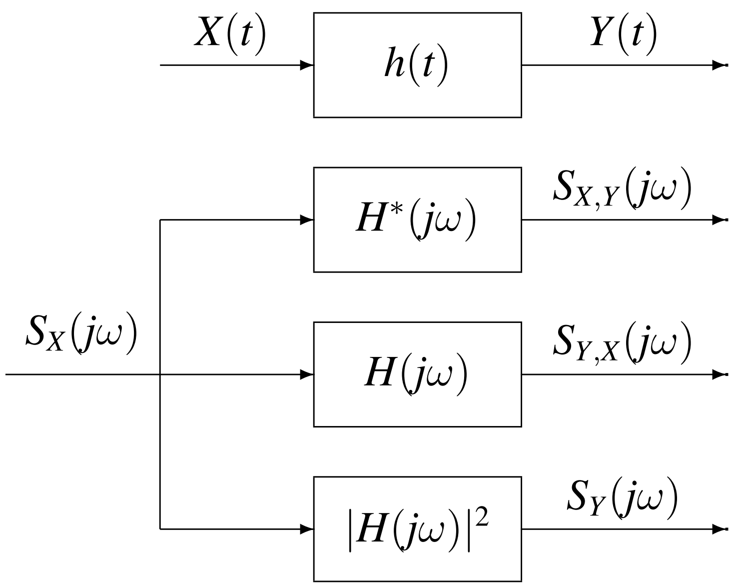
- Densidades espectrales cruzadas

$$S_{X,Y}(j\omega) \stackrel{def}{=} \mathcal{TF}[R_{X,Y}(\tau)]$$

$$S_{X,Y}(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot H^*(j\omega)$$

$$S_{Y,X}(j\omega) = S^*_{X,Y}(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

Relaciones entre densidades espectrales de potencia



Procesos aleatorios discretos

- Notación: $X[n]$
- Promedios estadísticos
  - Media: $m_X[n] = E\left[X[n]\right]$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k,n] = E\left[X[n+k] \cdot X[n]\right]$
- Estacionariedad:
  - Estadísticos independientes del índice temporal n
  - Media: $m_X[n] = m_X$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k,n] = R_X[k]$
- Cicloestacionariedad:
  - Estadísticos periódicos de período N
  - Media: $m_X[n+N] = m_X[n]$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k+N, n+N] = R_X[n+k,n]$

Procesos aleatorios discretos - Espectro y potencia

- Densidad espectral de potencia
  - Procesos estacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\left\{R_X[k]\right\}$$

  - Procesos cicloestacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\left\{\tilde{R}_X[k]\right\}, \quad \tilde{R}_X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} R_X[n+k,n]$$

  - Potencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})\, d\omega = \begin{cases} R_X[0], & X[n] \text{ estacionario} \\ \tilde{R}_X[0], & X[n] \text{ cicloestacionario} \end{cases}$$

Procesos aleatorios discretos - Sistemas lineales

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot \sum_n h[n] = m_X \cdot H(0)$$

- Autocorrelación del proceso de salida

$$R_Y[k] = R_X[k] * h[k] * h[-k]$$

- Densidad espectral de potencia del proceso de salida

$$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot \left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

- Estadísticos cruzados

$$R_{X,Y}[k] = R_X[k] * h[-k]$$

$$S_{X,Y}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$$

Suma de procesos aleatorios

- $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios
- Proceso suma: $Z(t) = X(t) + Y(t)$
  - Media del proceso

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = m_X + m_Y = m_Z$$

  - Función de autocorrelación

$$\begin{aligned} R_Z(t+\tau, t) =& E[Z(t+\tau) \cdot Z(t)] \\ =& E[(X(t+\tau) + Y(t+\tau)) \cdot (X(t) + Y(t))] \\ =& E[X(t+\tau) \cdot X(t)] + E[X(t+\tau) \cdot Y(t)] \\ &+ E[Y(t+\tau) \cdot X(t)] + E[Y(t+\tau) \cdot Y(t)] \\ =& R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) + R_Y(\tau) \\ =& R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) = R_Z(\tau) \end{aligned}$$

    - ⋆ Proceso aleatorio $Z(t)$ es estacionario
  - Densidad espectral de potencia

$$\begin{aligned} S_Z(j\omega) =& S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + S_{X,Y}(j\omega) + S_{Y,X}(j\omega) \\ =& S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + 2 \cdot \text{Re}[S_{X,Y}(j\omega)] \end{aligned}$$

Suma de procesos aleatorios - Incorrelados

- Relación (covarianza / correlación) para procesos conjuntamente estacionarios

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X(t+\tau),Y(t)) =& E[(X(t+\tau)-m_X)\cdot(Y(t)-m_Y)]\\ =& \underbrace{E[X(t+\tau)\cdot Y(t)]}_{R_{X,Y}(\tau)} - m_Y\cdot\underbrace{E[X(t+\tau)]}_{m_X}\\ &- m_X\cdot\underbrace{E[Y(t)]}_{m_Y} + m_X\cdot m_Y\\ =& R_{X,Y}(\tau) - m_X\cdot m_Y\end{aligned}$$

- Procesos incorrelados:

$$\begin{aligned}\text{Por definición}: \text{Cov}(X(t+\tau),Y(t)) &= 0,\ \forall\tau\\ \text{Consecuencia}: R_{X,Y}(\tau) &= m_X\cdot m_Y\end{aligned}$$

  - Si al menos uno de los procesos (incorrelados) tiene media nula

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$
$$S_Z(j\omega) = S_X(j\omega) + S_Y(j\omega)$$

    - ★ Caso habitual de suma de señal y ruido: incorrelación, ruido con media nula

Proceso gausiano

- Definición: $X(t)$ es un *proceso gausiano* si para todo n y todo $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, las variables aleatorias $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ tienen una distribución conjuntamente gausiana
- Propiedades de los procesos gausianos
  - $m_X(t)$ y $R_X(t_1,t_2)$, proporcionan una descripción estadística completa del proceso
    - ★ Permiten calcular vector de medias y matriz de covarianzas
      - Para $X(t_i)$, $\Rightarrow \mu_i = m_X(t_i)$
      - $X(t_i), X(t_j)$, $\Rightarrow C_{i,j} =$ Cov($X(t_i)$,$X(t_j)$)=$R_X(t_i,t_j) - m_X(t_i)\cdot m_X(t_j)$
  - Para procesos gausianos, estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio son equivalentes
  - Si $X(t)$ pasa por un sistema lineal e invariante, el proceso de salida, $Y(t)$ es gausiano
  - Para $X(t)$ gausiano, estacionario y de media nula, una condición suficiente para la ergodicidad de $X(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|\, d\tau < \infty$$

Procesos aleatorios conjuntamente gausianos

- Definición: Los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente gausianos*, si para todo n, m, y todo $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ y $\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m\}$, las variables aleatorias

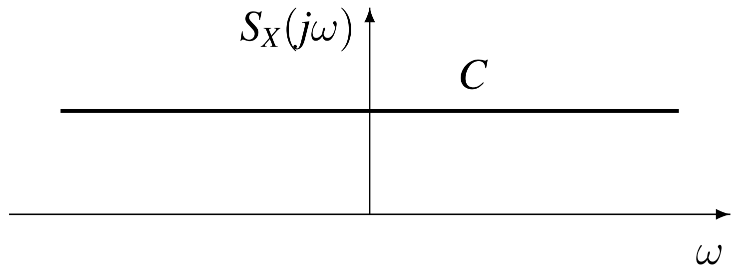
$$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n), Y(\tau_1), Y(\tau_2), \cdots, Y(\tau_m),$$

  tienen una distribución conjuntamente gausiana (de dimensión $n + m$)
- Propiedad: Para procesos conjuntamente gausianos, incorrelación e independencia son equivalentes

Proceso blanco

- Un proceso es blanco si su densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias

$$S_X(j\omega) = C$$



  - Consecuencias
    - Función de autocorrelación de un proceso blanco estacionario

$$R_X(\tau) = \mathcal{TF}^{-1}\{C\} = C \cdot \delta(\tau)$$

    - La potencia de un proceso blanco es infinita

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C\, d\omega = \infty$$

Filtrado de un proceso blanco

- Proceso $X(t)$ blanco con $S_X(j\omega) = C$ se filtra ($h(t)$ / $H(j\omega)$)
- Densidad espectral de potencia a la salida del filtro ($Y(t)$)

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2 = C \cdot |H(j\omega)|^2$$

  - En general el proceso $Y(t)$ no es blanco
- Función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(\tau) = C \cdot r_h(\tau)$$

- Potencia del proceso

$$P_Y = R_Y(0) = C \cdot r_h(0)$$

  - Como por definición $r_h(0) = \mathcal{E}\{h(t)\}$

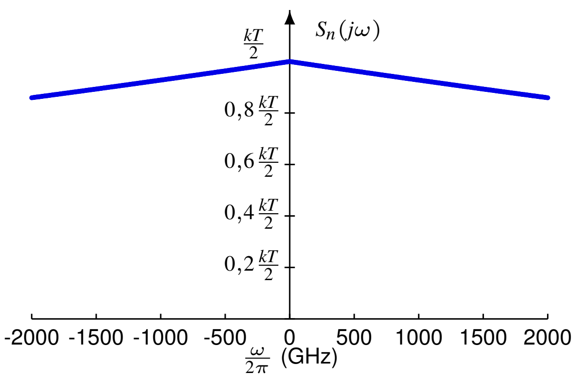
$$P_Y = C \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}$$

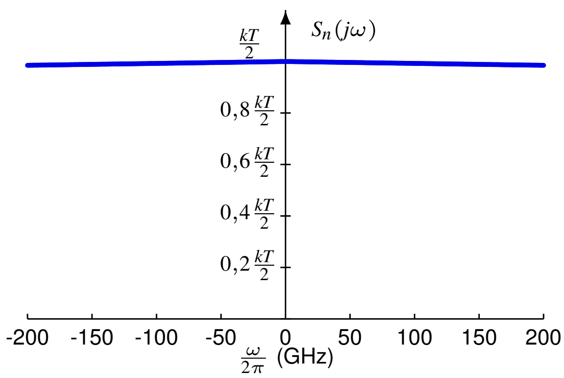
Ruido térmico

- Densidad espectral de potencia del ruido térmico (mecánica cuántica)

$$S_n(j\omega) = \frac{h\omega}{4\pi(e^{\frac{h\omega}{2\pi kT}} - 1)}$$

$$\text{donde} \begin{cases} h\text{: Constante de Planck } (6.6\times 10^{-34} \text{ Julios} \times \text{segundo}) \\ k\text{: Constante de Boltzmann } (1.38\times 10^{-23} \text{ Julios/}^{o}\text{Kelvin}) \\ T\text{: Temperatura en grados Kelvin} \\ \omega\text{: Pulsación } (2\pi \text{ veces la frecuencia) en rad/s} \end{cases}$$





- Estadística gausiana

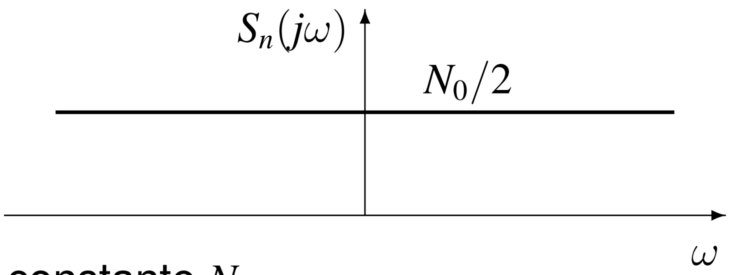
Modelo de ruido térmico

- Proceso aleatorio $n(t)$ blanco, gausiano, estacionario, ergódico
  - Media nula ($m_n = 0$)
  - Función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

  - Densidad espectral de potencia

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$

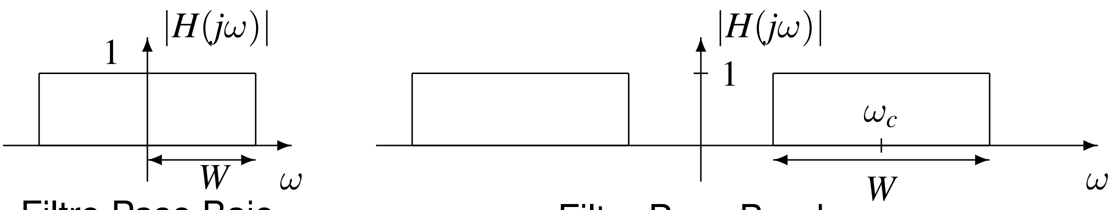


- Valor de la constante N_0

$$N_0 = k \cdot T^{\text{a}} \text{ Watt/Hz}$$

Potencia de ruido térmico a la salida de filtros ideales

- Filtros ideales de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s): filtro paso bajo o filtro paso banda con frecuencia central f_c Hz (o $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)



Filtro Paso Bajo

Filtro Paso Banda

- Proceso de salida de los filtros

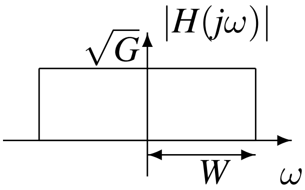
$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

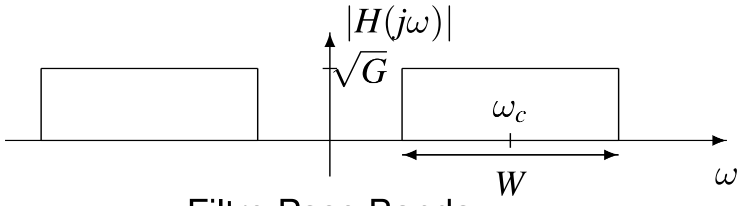
$$P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\, d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2B} = N_0 \cdot B$$

Potencia de ruido térmico en filtros ideales con ganancia

- Filtros ideales (paso bajo/paso banda) de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s) y con ganancia en potencia G (ganancia en voltaje $\sqrt{G}$)



Filtro Paso Bajo



Filtro Paso Banda

- Proceso de salida de los filtros

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\, d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2BG} = N_0 \cdot B \cdot G$$

Ancho de banda equivalente de ruido

- Salida de un sistema lineal (respuesta $h(t)$, $H(j\omega)$)

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de ruido a la salida de un sistema lineal

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega)\, d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Potencia de ruido en función del ancho de banda equivalente de ruido

$$P_Z = N_0 \cdot B_{eq} \cdot G_{eq}$$

  - B_{eq}: Ancho de banda equivalente de ruido
  - G_{eq}: Ganancia en potencia equivalente

$$G_{eq} = H_{max}^2, \text{ con } H_{max} = \max_{\omega} |H(j\omega)|$$

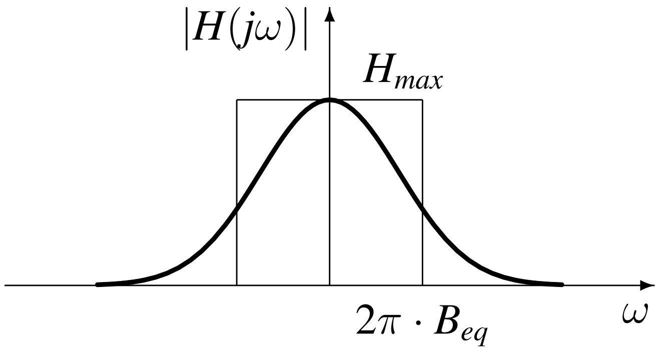
Ancho de banda equivalente de ruido - Identificación

- Identificación del valor de B_{eq}

$$B_{eq} = \frac{\mathcal{E}\{h(t)\}}{2 \cdot G_{eq}}$$

$$\mathcal{E}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \, d\omega$$

- Interpretación: Un sistema lineal ideal, de ancho de banda B_{eq} y amplitud H_{max} ($\sqrt{G_{eq}}$) tiene la misma potencia de ruido a la salida que el filtro $h(t)$



Relación señal a ruido (a la salida de un filtro)

- Señal a la entrada del filtro: Proceso $X(t)$, potencia P_X
- Ruido a la entrada del filtro: modelo de ruido térmico $n(t)$
- Filtro (normalmente en el receptor): respuestas $h(t)$ y $H(j\omega)$
- Señal a la salida del filtro receptor: Proceso $Y(t)$
- Ruido a la salida del filtro receptor: Proceso $Z(t)$
- Relación señal a ruido

$$\frac{S}{N} = \frac{P_Y}{P_Z}, \qquad \frac{S}{N}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_Y}{P_Z}$$

  - Pot. señal: $P_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(j\omega) \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2 \, d\omega$
  - Potencia ruido: $P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega) \, d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \, d\omega$
    - Filtros ideales (sin ganancia | con ganancia)

$$P_Z = N_0 \cdot B \quad \Big| \quad P_Z = N_0 \cdot B \cdot G$$

    - Filtro con ancho de banda equivalente B_{eq} y ganancia G_{eq}

$$P_Z = N_0 \cdot B_{eq} \cdot G_{eq}$$